# 现代高等工程应用数学

## （一）智能系统非经典数学方法

朱剑英

南 京 航 空 航 天 大 学

1999 年

# 现代高等工程应用数学

## （一）智能系统非经典数学方法

朱剑英

南 京 航 空 航 天 大 学

1999 年

# 前　言

我写这部书的动机有两个：

一是为了满足广大工科院校研究生(特别是博士研究生)做研究工作的需要。近十年来，工科院校的研究生们在他们的研究工作中，大量地应用了近代非经典数学的成果，他们的研究课题，大多选择在高新技术领域或基础学科的新分支领域。这样，他们原有的经典数学知识就显得很不够用。现在许多院校，对工科博士生都开设了数学课，这是很必要的。但博士生们提出，更希望学习工程领域应用的非经典数学，如模糊数学、神经网络数学、遗传算法、Petri 网理论、分形与分维、混沌理论、小波分析、非线性数学、大系统理论、非经典逻辑……等等。他们还希望学习工程数学方法论、数学建模、数学发展简史等，以提高他们的数学文化素养，促进创新能力的发挥。这些要求，无疑是积极的、合理的。然而由谁来承担这样的教学任务呢?我们原有的数学教师学的教的都是经典数学，他们并不从事工程和科技前沿的研究工作，显然他们难以承担这样的教学任务。看来，做这一件事，只能由在工程和科技第一线做研究的专业教师来担任了。近二十年来，我已指导了数十名工程博士生，在他们的研究课题中，应用了许多不同领域的非经典数学方法，因此我们积累了不少经验和体会。从去年开始，我便开设了我校博士生的非经典数学课程。第一遍讲下来，效果不错，学生们学了就能用，课程很受欢迎。唯一欠缺的是没有教材，学生只能作笔记。所以今年抽暑假时间，我将讲稿整理成教材，以帮助研究生们学习和研究。

二是为了满足广大科技工作者做研究工作的需要。21 世纪是科技更加突飞猛进的世纪，是科技更加显示为第一生产力的世纪。现在，“信息时代”、“知识经济”、“智力社会”、“知识工程”、“网络世界”、“数字地球”……等等已成为热门话题。任何时代、社会、经济的基础是生产，而生产的基础则是诸多生产要素及其有机组织。不过，未来的这些生产要素及其有机组织，却具有许多新的特征，即信息化、网络化、数字化、集成化、智能化。围绕着这些特征，许多高新技术研究方兴未艾。数学方法从来都是科学研究的有力工具，数学理论也是各门学科的基础。马克思说：“一种科学只有成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。”但是在围绕着上述几个“化”的研究中，特别是在涉及到人的智能和知识的智能化问题的研究中，原有的经典数学就遇到许多难以克服的困难。广大的科技工作者迫切希望有一些精练实用的近代非经典数学理论与方法的书籍，以便他们学习、应用，提高研究水平，促进研究创新。因此，我写这部书的另一动机，也就是想为他们实现良好愿望提供参考。

非经典数学理论与方法是五十年代后逐步发展完善起来的，至今不过四、五十年时间，同时涉及的领域又很广，所以大多不太成熟。特别是这些非经典数学的理论基础研究很不够，有的涉及到较高层次的数学哲理(如模糊逻辑)，就更是研究不深。因此，我在介绍这些数学时，主要着重于方法而不着重于理论，主要着重于创新思维而不着重于证明与推导。

特别值得指出的是，从近几十年来的非经典数学发展的实际情况来看，许多非经典数学问题往往不是数学家提出来的，相反大多是由各行各业的科学家和工程技术人员提出来的。例如，模糊数学是由计算机科学专家 L. A. Zadeh 教授于 1965 年提出的，而遗传算法则是由系统与控制专家 J. H. Holland 教授于 1962 年提出的。非经典数学方法有较强的创新精神和与实际问题紧密结合的特点，所以这些数学方法，有许多还往往是由研究生们为解决实际工程和科技问题而提出来的。例如 Petri 网理论，就是由博士生 C. A. Petri 在他的博士论文“自动化通信”中提出的。所以，我希望使用本书的读者们，不要单纯地学习，而是要学习、思考、实践、创造，再学习、再思考、再实践、再创造。

写这部书时，得到了我的学生们的许多帮助，其中有些例题，是他们学习本课程时做的习题；有些应用实例，就是他们所研究的课题；还有些见解，是他们讨论本课程时发表的创见。在此对他们表示衷心的感谢。

在本书付印中，还得到我校研究生部、教务处和印刷厂许多同志的帮助，在此一并对他们表示诚挚的谢意。

朱剑英

1999 年 9 月

# 目　　录

# 现代高等工程应用数学

## 第一章 绪 论

### 1.1 为什么要学习现代高等工程应用数学?

#### 1.1.1 现代高等工程应用数学是现代工程的理论基础

江泽民主席在1998年6月接见两院院士时曾深刻地指出:“人类已进入信息时代,科学技术日新月异,知识经济初见端倪,国力竞争日趋激烈。”

人类很快就要进入21世纪。21世纪将是“知识经济”的世纪。“知识经济”是以知识的获取、占有、生产、分配、使用(消费)为基础的经济。这种经济就其实质而言是“智力经济”。经济的基础是产业,而知识产业的基础则是各种“智能系统”。马克思说过:“一种科学只有成功地运用数学时,才算达到了真正完善的地步。”“智能系统”的理论基础就是“智能数学”。它是与经典数学完全不同的数学,现在还在形成过程中。

我们在此向大家介绍的现代高等工程应用数学,就是最近几十年来,在现代工程中应用和发展起来的一些非经典数学和经典数学中的一些新分支。

关于未来的时代、社会、经济与“智能数学”的关系,可以参见下图1.1.1。

#### 1.1.2 近年来,在高新技术领域的科学研究中,大量应用现代高等工程应用数学

发展最快、并且处于领先地位的信息科学技术,正向着小型化、网络化、智能化方向发展,智能化是基础。人的智能除了有逻辑推理的功能外,更重要的是形象、艺术思维,它在更大的程度上决定了人们的创造能力。原有的经典数学,再也不能适应这一变化的需要。在现代工程、科技、经济乃至现代生活用品的研究与开发中,广泛地采用了各种智能化的方法和技术,如模糊数学与技术、人工神经网络理论与技术、遗传算法、模式识别理论与技术、分形与分维、混沌理论与方法、图论方法、小波分析、人工智能、网络学、系统优化、非线性数学等等,此外,还应用了工程数学方法论和现代数学建模方法等理论。以上这些理论与方法,也是近年来工科领域的研究生们广泛应用的理论与方法,有的甚至成为他们研究课题创新部分的核心内容。因此,学习这部分内容,对于从事高新技术领域科学研究的人们来说,是有着十分重要的意义的。

#### 1.1.3 学习现代高等工程应用数学,对于提高数学文化素养、促进创新思维有重要意义

目前,教育界讨论的一个热点问题,就是加强素质教育。其实,教育最重要的问题是两

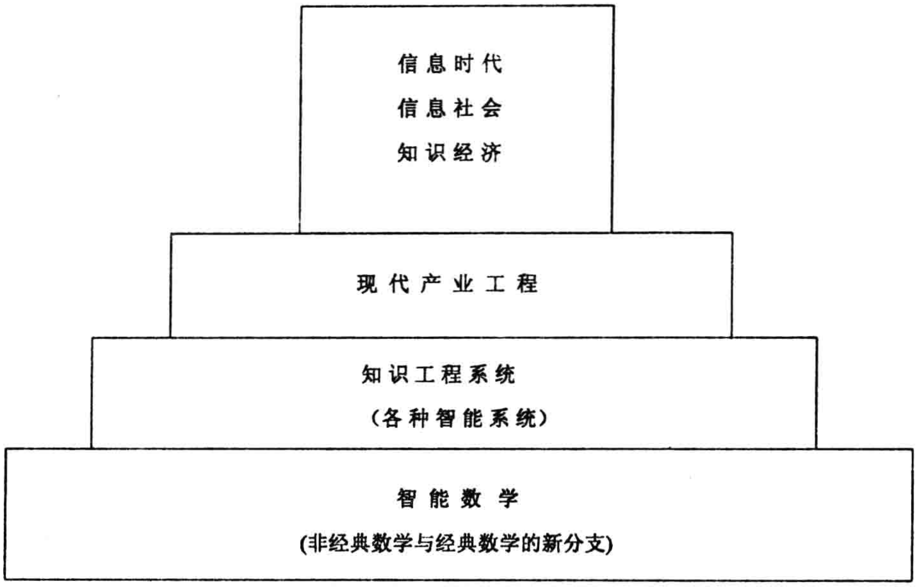


图 1.1.1 “知识经济”与“智能数学”的关系

个：一是教育如何做人，另一是教育如何思维。素质教育中最重要的也就是教人做人和教人思维。学习数学对提高这两方面的素质是有重要作用的。许多伟大的数学家都有非常良好的个人素质：他们胸怀宽广、献身科学；他们刻苦努力、治学严谨；他们坚毅顽强、百折不挠；这些都是教育学生“做人”的好教材。在现代数学中，有着许多杰出的数学思维方法，人们在学习数学时，受这些方法的启迪，可以发展自己的创造能力，在工作中取得重大的突破，乃至有所发现和发明，对人类作出更大的贡献。

## 1.2 现代高等工程应用数学的内容

现代高等工程应用数学大体上有以下四个部分：

1. 现代工程及科学研究中应用较多的非经典数学；
2. 经典数学中的新分支和新方法；
3. 现代工程数学方法论；
4. 数学文化。

具体来说，分成以下三册教材：

第一册是智能数学(一)，包括绪论、三次数学危机及启示、模糊数学、人工神经网络数学基础、遗传算法。

第二册是智能数学(二)，包括组合数学、图论、模式识别、Petri 网理论、网络学。

第三册是非线性数学，包括时间序列分析、小波分析、分形与分维、混沌理论、工程数学方法论、数学建模、数学思维与创新。

由于每期博士生的学习时间有限，各班学生在工程应用中应用的数学工具也有差别，所以每期学生上课时，仅选择以上的部分内容进行，不同班级可选不同章节。以上各部分内容、

均有相对独立性，授课时，可以分开选择不同的组合进行。第一册内容是当前工程博士生应用最多的非经典数学方法，可以优先选择。

## 1.3 如何学习现代高等工程应用数学？

**第一，要勤学**

什么是天才？中外古今的哲人早就说过“天才就是勤奋”，“天才是99%的汗水加1%的智力”。人很容易懒惰，我们要一辈子和自己的懒惰作斗争。马克思非常勤奋，他写《资本论》写了一生，光为此写的笔记本和手稿就堆满了整整一间房间。马克思在《资本论》中应用了不少数学。他甚至在休息时也常做数学习题。他最后是坐在工作椅上写东西时去世的，也就是说，他在世前一秒钟还在工作。我们敬爱的周总理也是十分勤奋地工作的。据说他一天只睡3—4个小时，有时甚至一连几天都不睡觉，只是坐汽车时，在车上睡一会儿。古人说：“业精于勤荒于嬉。”这就是说只有勤奋，才能使业务精益求精。

**第二，要勤思**

就是说要勤于思考。古人说：“心之官则思。”孔子说：“学而不思则罔，思而不学则殆。”学习不思考，就是读死书，死读书，最后只能读书死，没有意义。学校要培养学生的能力，其中最重要的是思维能力，它是创新的基础。

**第三，要勤用**

勤用就是要抓住实质和规律勇于实践。大数学家华罗庚曾说：“读书要由薄到厚，再由厚到薄”。广读书就是“由薄到厚”；读书抓住实质和规律，就是“由厚到薄”。怎样才算掌握了实质和规律呢？这就是学了要到工程实践和科研中去解决实际问题。

爱国诗人陆游在给他的儿子，写的示儿诗中说：“纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行。”孙中山先生给中山大学题的校训是“博学之、审问之、慎思之、明辨之、笃行之”。最后的落脚是“笃行之”，可见实践的重要。其实一个人学任何学问，只有用这些学问真正解决实际问题了，他才算掌握了这些学问。大教育家陶行知给他自己取的名字就是行然后知，就是说只有实践才能求得真知。解决实际问题要克服许多意想不到的困难，既要有勇气和毅力，也要有知识和能力，更要有创新和发展。

学习、思考、实践、创新，这就是我们的结论。

# 第二章　三次数学危机及其启示

## 2.1　什么是数学危机？数学危机有什么意义？

所谓数学危机，是指在数学发展的某个历史阶段中，出现了一种相当激化的、涉及整个数学理论基础的矛盾[1]。

数学理论基础是指关于构筑某数学体系的最原始、原根本的对象、公设、公理、原则及其推理、运算方法的理论。数学理论基础出了问题，那么在此基础上的整个“数学殿堂”就会倒塌，该数学体系就会陷入自相矛盾的状态，而不能令人信服，甚至在某种情况下就不能应用。

每一次数学危机的出现，都引起了许多数学家及其他科学家的关注，对数学研究对象和范围进行扩充，对根本的数学理论和方法加以改善，从而克服了“危机”，使数学科学发生了飞跃式的革命性变化，甚至带动了其他科学和产业发生了革命。

在数学历史上，发生过三次数学危机。第一次数学危机是关于有理数与无理数的危机。这一次危机导致数学研究对象从有理数推广到无理数，进一步促使人们，从依靠直观感觉与经验转向依靠证明，推动了公理几何学与逻辑学的诞生和发展。第二次数学危机是关于微积分基础理论的危机。这一次危机导致数学研究对象进一步从有限向无限（无限大、无限小）、从静态向动态（从常量向变量）的发展，导致了 Dedekind 的实数论和 Cauchy 的 $\varepsilon$-$\delta$ 方法和极限论及 Contor 的集合论的产生和发展。第三次数学危机是关于集合论的危机。这一次危机出现在本世纪，可以说到现在还没有解决。可以预计，关于这次危机的数学理论基础的研究，将会导致数学研究对象的进一步扩充：从确定向非确定，从精确向非精确，从清晰向模糊，从有序向混沌的扩充。一句话，从非智能向智能发展，最终会导致智能数学的产生。

## 2.2　第一次数学危机

公元前 5 世纪，人们普遍认为“宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数比”。“整数或整数比”，现在称谓有理数。当时希腊有一个学派，叫做 Pythagoras（毕达哥拉斯）学派。他们也深信这一信条，而且认为“数的和谐与数是万物之本源”，他们在这里所说的数就是有理数。毕氏学派还有一个贡献，就是证明了勾股弦定理——斜边的平方等于两个直角边的平方和（此定理我国古代已有证明）。Pythagoras 学派中有一个人，叫 Hippasus，他发现了等腰直角三角形的直角边与斜边不可通约。他的证明过程如下：取一直角边均为 1 的等腰直角三角形，如果其斜边为整数比，约去分子分母间的公因数 $k$ 为 $m/n$，那么 $m$ 与 $n$ 中至少有一个是奇数（不可能两个都是偶数，因为若是，则还可以约去，最后至少有一个是奇数才不能再约），由勾股弦定理知，有 $1^2+1^2=\left(\frac{m}{n}\right)^2$，于是 $2=m^2/n^2$，故 $m^2=2n^2$，所以 $m$ 是偶数（只有偶数的平方才是偶数，奇数的平方不可能是偶数）。那么，一方面由于 $m$ 与 $n$ 中必有一个为奇数，而

知 $n$ 为奇数，另一方面，既然 $m$ 为偶数，亦可表为 $m=2k$，于是 $4k^2=2n^2$，故 $n^2=2k^2$，因而 $n$ 亦为偶数，矛盾。

这说明等腰直角三角形的斜边无法用整数或整数比去表示。这就严重触犯了 Pythagoras 学派的信条，同时也冲击了当时希腊人的普遍见解，直接动摇了这个历史时期的数学基础。相传 Pythagoras 学派因此而将 Hippasus 投入海中处死，因为他在宇宙间搞出了一个直接否定他们学派信条的怪物，而且他不顾学派的规定，敢于向学生披露新的数学思想。当然，Hippasus 的伟大发现是淹不死的，它迫使人们去认识和理解“整数与整数比（有理数）不能包括一切几何量”。Hippasus 悖论的提出迫使 Pythagoras 学派提出“单子”这一概念去解决这一矛盾。“单子”是一种如此之小的度量单位，以致本身是不可度量却同时要保持为一种单位。这或许是企图通过“无限”来解决问题的最早努力。但 Pythagoras 学派的这种努力，又引起了 Zeno 的非难。Zeno 认为一个“单子”或者是 0，或者不是 0，如果是 0，则无穷多个单子相加也产生不了长度，如果不是 0，则由无穷多个“单子”组成的有限线段应该是无限长。不论何说都矛盾。

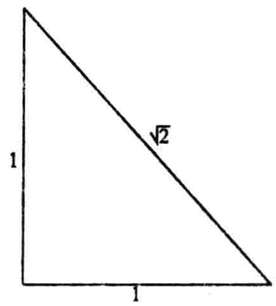


图2.1.1　等腰直角三角形的斜边不可表示成整数或整数比

如上所说的矛盾局面，以及当时许多其他的悖论，都被视为构成数学第一次危机的组成部分。

解决这一次矛盾比较容易，只要把数学研究的对象从有理数扩大到无理数，从有限扩充到无限，使人们从依靠直观感觉转向依靠公理出发的证明便解决了问题。从此，公理几何学与逻辑学便诞生了。

## 2.3　第二次数学危机

数学史上把 18 世纪微积分诞生以来在数学界出现的混乱局面，称为数学的第二次危机。微积分是牛顿（Isaac Newton）于 1666 年 10 月写在他的一篇《论流数》的论文中，这篇手稿没有发表。他最早发表的论微积分的论文是：《运用无限多项方程的分析》，写于 1669 年，发表于 1711 年。但现在公认的微积分起源时间是 1666 年（虽然在牛顿的手稿中还有更早的记录，1665 年 5 月 20 日的牛顿手稿中，首先出现“流技术”的记载）。德人 Leibniz，Gottfried Wilhelm1684 年发表在《学艺》（Acta eruditorum）上的论文：“一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算”，也独立地提出了微积分的概念和方法，所以现在统一称牛顿-莱布尼兹发明了微积分。在 17 世纪和整个 18 世纪，由于微积分理论的产生及其在各个领域里的广泛应用，使得微积分理论得到了飞速的发展。但在另一方面，当时的整个微积分理论却是建立在含混不清的无穷的概念上，因而没有一个牢固的基础，遭到了来自各个方面的非难和攻击。

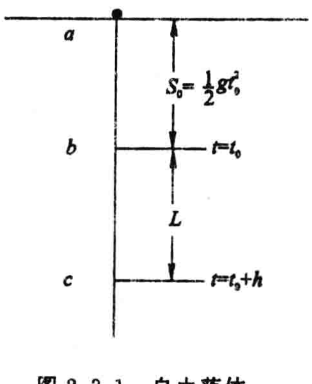


图 2.3.1　自由落体

牛顿与莱布尼兹的微积分，是从求自由落体的瞬时速度开始的。如图 2.3.1 所示，物体

从 $a$ 点自由下落，当 $t=t_0$ 时，下落的距离 $S_0=\frac{1}{2}gt_0^2$；当 $t=t_0+h$ 时，其下降距离为 $S_0+L=\frac{1}{2}g(t_0+h)^2$。现在要求在 $t=t_0$ 时（物体在 $b$ 点）的瞬时速度。为此，他们先求在 $h$ 秒内物体下落的平均速度。物体在 $h$ 秒内所降的距离为

$$L=\frac{1}{2}g(t_0+h)^2-S_0=gh(t_0+h/2) \tag{2.3.1}$$

因而物体在 $h$ 秒内的平均速度为

$$\frac{L}{h}=\frac{gh(t_0+h/2)}{h}=g(t_0+h/2) \tag{2.3.2}$$

当 $h$ 很小时，$h$ 可略去不计，而 $c$ 点就无限接近于 $b$ 点，于是平均速度就是瞬时速度，也就是说瞬时速度值为 $gt_0$。

但是这一思想遭到大主教 Berkeley 的质疑，他在 1734 年攻击说：所谓瞬时速度是 $\Delta s/\Delta t$ 在 $\Delta t$ 趋向于 0 时的值，那么 $\Delta s$ 或 $\Delta t$ 是什么东西？如果 $\Delta t$ 和 $\Delta s$ 是 0，则 $\Delta s/\Delta t$ 就是 $0/0$，从而无意义。如果它们不是 0，即使极为微小，其结果只能是近似值，决不是所求瞬时速度的精确值。总之，不论它们是 0 或不是 0，都将导致荒谬。针对(2.3.2)式，他还说，显然，当时间间隙 $h$ 越小时，平均速度就与瞬时速度或真正速度越接近。但是不论 $h$ 多么小，只要 $h$ 不等于 0，则平均速度就不等于该点的速度或真正速度。如果 $h=0$，即考虑那一点的速度，但此时已经没有距离的改变，从而所说之 $\frac{L}{h}$ 变成了没有意义的 $\frac{0}{0}$，从而也无法求得真正的速度。

Newton 和 Leibniz 也曾为摆脱此困境而分别提出种种解释，例如：

(1)说 $h$ 是无穷小，故 $h$ 不等于 0，因而认为 $\frac{L}{h}=\frac{gh(t_0+h/2)}{h}$ 有意义，并可化简为 $g(t_0+h/2)$，但无穷小与有限量相比，可以忽略不计，于是 $g(t_0+h/2)$ 就变成 $gt_0$，它就是 $t=t_0$ 时的点速度。

(2)说 $\frac{gh(t_0+h/2)}{h}$ 的终极比(*ultimate ratio*)为 $gt_0$，也就是 $t=t_0$ 时的点速度。

(3)说 $h$ 趋于 0 时，既不在 $h$ 变为 0 之前，也不在 $h$ 变为 0 之后，而正好在 $h$ 刚刚达到 0 时，$\frac{gh(t_0+h/2)}{h}$ 之值为 $gt_0$。

不论那种说法，无非都是为消除如下的矛盾而使之能摆脱困境。这个矛盾是：一方面要使 $\frac{gh(t_0+h/2)}{h}$ 有意义，必须 $h$ 不等于 0。另一方面，要使 $t=t_0$ 时的真正速度为 $gt_0$，则又必须 $h=0$。那么同一个数量 $h$ 在同一个问题中，如何能既等于 0，同时又不等于 0 呢？这个矛盾，人们皆称之为 Berkeley 悖论。

在这一时期，各方面对微积分的攻击和非难很多，其中最激烈的要算大主教 Berkeley。文献[2]中说："Berkeley 批判了 Newton 的许多论点，例如，在〈求曲边形面积〉一文中，Newton 说他避免了无穷小，他给 $x$ 以增量，展开 $(x+0)^n$，减去 $x^n$，再除以 0，求出 $x^n$ 的增量与 $x$ 的增量之比，然后扔掉 0 的项，从而得到 $x^n$ 的流数。Berkeley 说 Newton 首先给 $x$ 以一个增量，然后让它是 0，这违背了背反律。""至于导数被当作 $y$ 与 $x$ 消失了的增量之比，即 $dy$ 与 $dx$ 之比。Berkeley 说它们既不是有限量，也不是无穷小量，但又不是无。这些变化率只不过是消失了的量的鬼魂。"大主教 Berkeley 之所以猛烈攻击微积分，主要是因为他对当时自然科学的发展所造成的对宗教信仰的日益增长的威胁极为恐惧。但另一方面，也正是由于当

时的微积分理论没有一个牢固的基础，致使来自各方面的非难和攻击看上去言之有物。所以，“在整个18世纪，对于微分和积分运算的研究具有一种特殊的痛苦，因为一方面是纯粹分析领域及其应用领域内的一个接一个的光辉发现，但另一方面与这些奇妙的发现相对照的，却是由其基础的含糊性所导至的矛盾愈来愈尖锐。”[3]这就不能不迫使数学家们认真对待这个 Berkeley 悖论，以便解除数学的第二次危机。经过了差不多两个世纪的努力，直到1900年，才解决了微积分理论的奠基问题。图 2.3.2 表示了微积分的不同层次的基础。首先

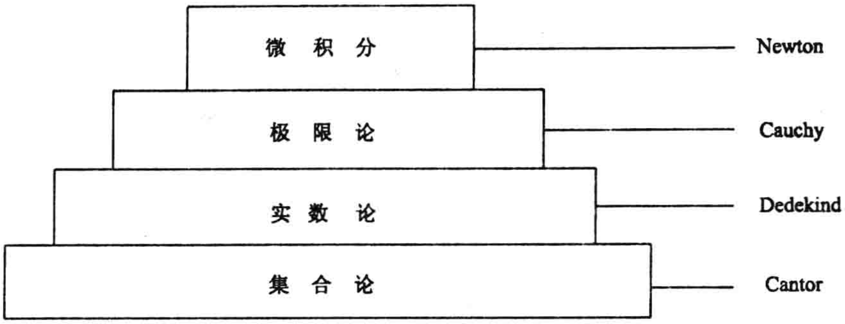


图 2.3.2　经典数学奠基于集合论

是 Cauchy 详细而有系统地发展了极限论。他证明了极限的存在，进一步说明了无限与有限的关系，他举出了许多实例，表明无限数列之和的极限是有限数。所以牛顿的微积分理论到此得到了有力的解答：平均速度在时间间隔 $h$ 趋近于 0 时的极限就是瞬时速度。有极限概念和无极限概念对人们的认识来说是一个飞跃。在无极限概念的范畴中来认识事物，即使是合理的事，也认为是不合理的，跳出了这个框子，认识就前进了一大步。这种情况正如中国古诗所说：“不识庐山真面目，只缘身在此山中。”这对我们是极有启发的。

其次，Dedekind 在实数论的基础上，证明了极限论的基本定理。后来 Cantor 和 Weierstrass 都加入了为微积分理论寻找牢固的基础而努力工作的学者的行列，他们发展了 $\varepsilon$-$\delta$ 方法和极限理论，避开了实体无限小和无限大概念的设想和使用，最后使微积分奠定在集合论的基础上，这就是今天所说的标准分析。

## 2.4　第三次数学危机

微积分的理论基础问题，由于极限论、实数论和集合论的建立而得到了解决。第二次数学危机历经两个世纪，终于排除了。人们松了一口气，于是在1900年，在巴黎召开的国际数学会议上，法国大数学家 Poincare′ 宣称：“数学的严格性，看来今天才可以说是实现了。”事实上，当时的数学家都喜气洋洋，非常乐观[4]。

但是这种安全的想象未能维持多久，不到两年，著名的 Russell（罗素）悖论被公诸于世。Russell 悖论是关于 Comtor 集合论的悖论，只要用逻辑术语来替代集合论术语。Russell 悖论直接牵涉到逻辑理论本身，从而是直接冲击了集合论与逻辑这两门被数学家认为是最严谨的学科。这样，Russell 悖论便惊动了整个西方哲学界、逻辑学界和数学界，使得许多数学家和逻辑学家不得不认真对待和研究 Russell 悖论问题。

事情还得从 Cantor 集合论最原始的思想开始。Cantor 建立古典集合论的一个最重要的思想方法就是概括原则，该原则自然、直观，使用又方便。在 Cantor 早期的工作中，并没有将该原则的思想明确立为公理，而只是隐蔽地被使用。直到 Frege 才公开而明确地把它作为公理模式使用。所谓概括原则，通俗地说，就是任给一个性质 $p$（或概念），我们就能把所有满足所给性质 $p$ 的对象，也仅由这些具有性质 $p$ 的对象汇集在一起而构成一个集合。用符号来表示就是：

$$G = \{g \mid p(g)\} \tag{2.4.1}$$

式中，"|"左边的 $g$ 表示集合 $G$ 的任一元素，而"|"右边的 $p(g)$ 表示 $G$ 的元素 $g$ 具有性质 $p$，又{}表示把所有具有性质 $p$ 的对象 $g$ 汇集成一个集合。因此，概括原则的另一表达式就是：

$$\forall g(g \in G \leftrightarrow p(g)) \tag{2.4.2}$$

亦即 $G$ 的任一元素 $g$ 必有性质 $p$，而任一具有性质 $p$ 的对象必为集合 $G$ 的元素。

针对 Cantor 的集合论原始构集思想，*Russell* 指出，有两种集合，一种是本身分子集，例如"一切概念所组成的集"，由于它本身也是一个概念，所以必为该集自身的一个元素。又如"一切集合所组成的集合"也是一个本身分子集，因为按定义知，任何集都是该集的元素，而其本身既为一集合，因而也不能例外地为该集（即其自身）的一个元素。这种集有性质 $x \in x$，集合可以写成 $\Sigma = \{x \mid x \in x\}$。另一种是非本身分子集，即其本身不是它自身的元素。例如，自然数集合决不是某个自然数，因此自然数集合 $N$ 不可能是 $N$ 的一个元素，即 $N \notin N$，一般地写成 $x \notin x$，对应的集合写成 $\Sigma = \{x \mid x \notin x\}$。如此，任给一个集合 $\Sigma$，则 $\Sigma$ 要么是本身分子集，即 $\Sigma \in \Sigma$，要么是非本身分子集，即 $\Sigma \notin \Sigma$。现根据 Cantor 的概括原则，可将一切非本身分子集汇集起来构成一集，亦即

$$\Sigma = \{x \mid x \notin x\} \tag{2.4.3}$$

此处 $x \notin x$ 表示集合 $x$ 不是它自身的元素，即 $x$ 为一非本身分子集。现在要问上述一切非本身分子集（$x \notin x$）构成的集 $\Sigma$ 是哪一种集？即问此集 $\Sigma$ 是本身分子集，还是非本身分子集？若设 $\Sigma$ 是本身分子集，则有 $\Sigma \in \Sigma$，而 $\Sigma$ 的每个元素都是非本身分子集，即性质 $x \notin x$，所以作为 $\Sigma$ 之元的 $\Sigma$ 也必须是一个非本身分子集，故 $\Sigma \notin \Sigma$。再设 $\Sigma$ 为一非本身分子集，即 $\Sigma \notin \Sigma$，按 $\Sigma$ 的构造知，任何非本身分子集都是 $\Sigma$ 的元素，故 $\Sigma$ 作为非本身分子集，亦应为 $\Sigma$ 的一元素，即 $\Sigma \in \Sigma$，两种说法都矛盾，都说不通。这就是著名的 Russell 悖论。

Russell 悖论作为古典集合论中的一个悖论，不仅很快发现它可化归为最基本的逻辑概念的形式，而且进一步发现能用日常语言来表述它的基本原则，Russell 自己就在 1919 年把它改为著名的"理发师悖论"。现陈述如下：

李家村上所有有刮胡子习惯的男人可分为两类，一类是自己给自己刮胡子的；另一类则是自己不给自己刮胡子的。李家村上有一个有刮胡子习惯的理发师自己约定："给且只给村子里自己不给自己刮胡子的人刮胡子。"现在要问这个理发师自己是属于哪一类的人？如果说他是属于自己给自己刮胡子的一类，则按他自己的约定，他不应该给他自己刮胡子，因而是一个自己不给自己刮胡子的人。再设他是属于自己不给自己刮胡子的一类，则按他自己的约定，他必须给他自己刮胡子，因此他又是一个自己给自己刮胡子的人了。哪种说法都不通，这就是所谓"理发师悖论"。

其实在 Russell 悖论出现以前，古典集合论的创始者 Cantor 于 1895 年第一个在他自己所创立的集合论中发现了悖论，但他没有公开，也不敢公开。后来这个由 Cantor 发现的悖论

由 Burali-Forti 发现了，并公诸于世，人们称为 Burali-Forti 悖论。不过当时没有引起数学家的不安，因为大家认为这只涉及到一些专门的技术问题，只要作些小修改，便能解决问题。

在 Russell 悖论出现后，相继出现了许多悖论，如法国人 Richard 于 1905 年提出的一个语义悖论和与其类同的一系列悖论，又如 Grelling 于 1908 年提出的一个关于形容词的悖论，直到 1953 年，沈有鼎先生还构造并发表了几个著名的悖论："无根据和有根据悖论"、"循环与非循环悖论"、"$n$ 循环与非 $n$ 循环悖论"[5]。

在数学史上，人们把集合论悖论的出现及其所引起的争论局面，称之谓数学第三次危机。因此，在一定程度上讲，数学第三次危机乃是前两次危机的发展和深化，因为集合论悖论涉及的问题更加深刻，涉及的范围更为广阔。

为了排除集合论中出现的悖论，促进数学家去探索数学推理在什么情况下有效，什么情况下无效，数学命题在怎样的情况下具有真理性，在怎样的情况下失灵。于是，在本世纪初，数学基础论这一分科就诞生了。摆在从事数学基础问题研究的数学家面前的首要任务，就是如何为数学的有效性，建立可靠的依据。由于在这一工作中所持的基本观点的不同，在数学基础论的研究中形成了各个流派。其中，主要的流派有：

1)Russell 的逻辑主义学派；

2)Brouwer 的直觉主义学派；

3)Hilbert 的 Hilbert 主义学派；

4)Cohen 的现代形式主义学派。

以上是在数理逻辑范畴说的情况。在集合论范畴，为了排除集合论中的悖论，促使了现代公理集合论的诞生，其中最著名的有两个，即是由 Bernays 与 Gödel 建立的 BG 公理集合论系统及由 Zermelo 和 Fraenkel 建立的 ZFC 公理集合论系统。特别是后者，是现在普遍公认最完善的一个系统。这些系统有一个共同点，即是在保留概括原则的"合理因素"的前提下，对造集的任意性加以适当限制。ZFC 系统包括了外延、空集、配对、并集、幂集、子集（即划分）、无穷、选择、替换、正则等 10 条非逻辑公理。Zermelo 于 1908 年建立了他的集合论公理系统，几经改进，最后由 Fraenkel 与 Skolem 在 1921—1923 年间给了一个严格的解释，进而形成著名的 ZF 系统，ZF 系统是承认选择公理的，通常写成 ZFC 系统，其中英文字母 C 表示该系统接受选择公理。[1]

ZFC 系统的真实目的是为分析学奠定严格的基础。如前所述，微积分的基础已通过 Cauchy 的极限论归约到 Dedekind 的实数论，而实数论的不矛盾性又归约于集合论的不矛盾性。ZFC 系统是以如下的路线来为微积分奠基的，这就是由无穷公理来保证自然数集的合法性，再由幂集公理导至实数集的合法化，然后再由子集公理来保证实数集中满足性质 $p$ 的元所组成的子集的合法性。这样一来，只要 ZFC 系统无矛盾，严格的微积分理论就能在 ZFC 公理集合论上建立起来了。但是，问题正在于 ZFC 系统本身的无矛盾性至今没有被证明，所以至今不能保证在这个系统中今后不会出现悖论，虽然在 ZFC 系统中能够排除已经出现的那些集合论的悖论，并且 ZFC 系统应用到今天，尚未出现过其他矛盾。但是，Poincaré 指出：我们设置栅栏，把羊群围住，免受狼的侵袭，但是很可能在围栅栏时就已经有一条狼被围在其中了。[6]

由于 ZFC 系统不能保证在这个系统中今后不会出现悖论，从这个意义上来说，第三次数学危机并没有彻底解决，我们甚至可以说，我们还处在第三次数学危机中。