GAODENG SHUXUE

经济与管理专业公共课教材

高等数学

概率统计

白锦东 姚增善 刘宝生 陈中慧 编

中国海洋大学出版社

课教材

高等数学

概率统计

白锦东 姚增善 刘宝生 陈中慧 编

中国海洋大学出版社

·青岛·

内 容 提 要

本书由微积分(上)、微积分(下)、线性代数和概率统计四部分内容组成。全书概念清晰,结构合理,用现代数学的观念突出了数学在经济、管理和社会等领域中的应用。

本书可作为高校经济与管理类专业的教学用书,也可用作高等职业教育和成人教育相关专业的教材以及考研参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/白锦东等编.—青岛:中国海洋大学出版社,2003.9(2011.1重印)

ISBN 978—7—81067—515—4

Ⅰ.高… Ⅱ.白… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O319.9

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第082916号

中国海洋大学出版社出版发行

(青岛市香港东路23号 邮政编码:266071)

出版人:王曙光

日照报业印刷有限公司印刷

新华书店经销

*

开本:850 mm×1 168 mm 1/32 印张:34.5 字数:866千字

2003年9月第1版 2011年1月第5次印刷

印数:5 101~6 100 全套4册总定价:66.00元

前　　言

本书根据中国海洋大学2000年重点教材立项课题的要求编写而成。全书共分四册：第一册为微积分(上)，由姚增善执笔；第二册为微积分(下)，由陈中慧和姚增善执笔；第三册为线性代数，由白锦东执笔；第四册为概率统计，由刘宝生执笔。

在编写过程中，我们主要遵循了以下原则：

(1)努力突出高等数学的基本思想和基本方法，以便学生在学习中能较好地了解各部分内容的内在联系，从总体上把握高等数学的思维方法；

(2)在坚持教学大纲基本要求的基础上，按照适当介绍和循序渐进的原则，渗透现代数学思想，突出数学在经济、管理和社会等领域中的应用特色；

(3)尽量多地引入现代经济模型作为例题或习题，重视培养学生运用数学方法解决实际问题的能力，体现教学改革的方向。

概率统计分为两部分，概率论部分作为基础(第1～4章)，数理统计部分(第5～8章)主要讲述参数估计、假设检验和一元线性回归分析。在编写过程中，根据多年的教学经验，力求做到通俗易懂、深入浅出，对于某些繁杂的证明，则注意淡化形式注重核心内容。另外在编写过程中还参考了近几年研究生招生考试中数学三、四对本课程的要求。在教学计划和教学大纲的指导下，编写一

本成熟的教材，是一个长期努力的过程。为此，编者参考了大量现有的教材和著作，在此谨向这些作者表示衷心的感谢；在编写过程中，数学系的类淑河、张立振等老师也给予了很多有益的建议，在此一并表示感谢。

在定稿过程中，编写组共同审阅了书稿。另外，学校教务处、经济学院和数学系领导为本书的出版给予了大力支持，特表衷心的感谢。

限于编者的水平以及编写时间的紧迫，书中肯定会有不妥和疏漏之处，敬请读者不吝指正。

编　者

2003 年 9 月

目　录

第1章 随机事件与概率

§1.1 随机现象与随机事件

一、随机现象与随机事件

概率论与数理统计是研究随机现象数字规律性的数学分支，是近代数学的重要组成部分，同时也是近代经济理论应用与研究的重要数学工具. 例如马库威茨(Markowitz)20世纪50年代利用均值—方差概念创立的Markowitz模型兼顾了金融市场中收益和风险两大因素，为现代证券投资组合理论的发展开创了新的局面，他也因此获得1990年诺贝尔经济奖.

观察自然现象和社会现象，会发现许多事件在一定条件下必然会发生，例如在一个标准大气压下，水加热到100℃会沸腾，封闭容器中气体温度升高时压力会增大等等. 这种在一定条件下必然会发生的事件称为必然事件. 反之，在一定条件下，必然不会发生的事件称为不可能事件. 例如掷一枚硬币同时出现正面和反面是不可能的. 像以上这些在一定条件下结果完全肯定或否定的现象，我们称之为决定性现象.

但自然现象和社会现象中还广泛存在着与决定性现象有本质区别的另一类现象. 例如掷一枚硬币，“正面向上”在掷之前就完全

不能确定；同一仪器多次测量同一物体长度，结果也会有所差别. 以上所举这些现象有一个共同特点：在基本条件不变的情况下，一系列试验或观察会得到不同的结果. 就个别试验和观察而言，它时而出现这种结果，时而出现另一种结果，呈现出一种偶然性. 这种现象我们称之为随机现象. 对于随机现象，我们通常关心的是某个结果是否出现. 这种随机现象的结果我们称为随机事件，简称为事件，一般用 A,B,C 等大写英文字母表示.

为了语言上的便利，我们通常把随机试验和对随机现象的观察统称为随机试验，而随机试验的结果就是随机事件. 在随机试验中必然会发生的事件称为必然事件，用 Ω 表示；一定不会发生的事件称为不可能事件，用 $\varnothing$ 表示.

二、事件的关系及其运算

我们常常看到在研究一种随机现象时会有多个事件，其中有些比较容易，而有些比较复杂. 分析事件之间的关系，研究它们之间的运算，从而找出它们之间的本质联系，自然是十分必要的.

1. 事件的包含

定义 如果事件 A 发生必然导致 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$；此时也称 A 是 B 的子事件.

对任何事件 A，我们规定 $\varnothing\subset A$；显然对任何事件 $A\subset\Omega$.

2. 事件的相等

定义 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

3. 事件的并与积（交）

定义 我们把 A,B 中至少出现一个的事件记为 $A\cup B$，称为 A,B 事件的并；把 A,B 同时发生的事件记为 AB 或 $A\cap B$，称为 A 与 B 的积（交）.

显然有：$A\cap\Omega=A, A\cap A=A, A\cup\varnothing=A$,

$A \cup \Omega = \Omega, A \cup A = A,$

当 $A \subset B$ 时，$A \cup B = B, AB = A$.

4. 对立事件与事件的差

定义 把事件 A 发生且 B 不发生的事件记为 $A-B$，称为事件 A 与 B 的差. 把 A 不发生的事件记为 $\overline{A}$，称为 A 的对立事件. 即 $\overline{A}$ 发生意味着 A 不发生.

由定义显然有：$\overline{\overline{A}} = A$， $\overline{A} \cup A = \Omega$， $A\overline{A} = \varnothing$，

$$A - B = A\overline{B}, \qquad \overline{A} = \Omega - A.$$

5. 互不相容（互斥）

定义 如果事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与 B 互不相容，或称为 A, B 互斥.

易证：$AB = \varnothing \Leftrightarrow A \subset \overline{B} \Leftrightarrow B \subset \overline{A}$.

需要指出：n 个事件互不相容是指 n 个事件两两互不相容.

当 $AB = \varnothing$ 时，$A \cup B$ 也记为 $A+B$，称为 A 与 B 的和.

显然对任何事件 A, B 有：

$$A \cup B = A + \overline{A}B = B + A\overline{B}$$

$$A = AB + A\overline{B}$$

两个事件的运算，很容易推广到有限个事件，甚至可列个事件的运算，这里就不详细叙述了.

三、样本空间与随机事件

对于一个随机试验，虽然事先并不知道将出现哪一个结果，但我们可以知道可能出现的各种结果. 例如掷抛一颗骰子会出现“1”，“2”，“3”，“4”，“5”，“6”点六种情况之一；掷一枚硬币可能出现正面，也可能出现反面.

我们把随机试验所有可能出现的基本结果的集合称为样本空间，用 Ω 表示. 而每一个基本结果称为样本点，用 ω 表示.

例 1 掷一枚硬币用 ω_1 表示出现正面，ω_2 表示出现反面，则

$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

例 2 抛一枚骰子，用 ω_i 表示出现"i"点，$i=1,2,3,4,5,6$. 则 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.

例 3 用 t 表示电子器件的寿命，则 $\Omega=\{t \mid t\geqslant 0\}$.

通常我们把样本空间的子集 A 理解为随机事件，A 发生当且仅当 A 包含的某个样本点在随机试验中出现了. 这样全集 Ω 就是必然事件，而空集 $\varnothing$ 就是不可能事件.

在例 2 中，记 A 表示出现偶数点，则 $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$；$A$ 发生也就是在掷骰子的试验中出现了"2"，"4"，"6"之一.

这样规定了事件以后，我们看到事件的运算，也就可以看成是集合的运算，因此所有集合运算满足的运算法则，对于事件运算都成立，这里就不一一列出，只列出几个常用的公式

(1)交换率：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$

(2)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$

(3)分配律：$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$,

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

(4)德莫根(De Morgan)公式：$(\overline{A\cup B})=\bar{A}\cap\bar{B}, (\overline{A\cap B})=\bar{A}\cup\bar{B}$

一般地，$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}, \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$,

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}, \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

§1.2 随机事件的概率

随机事件虽然有其偶然性的一面，但在大量重复试验中，可以发现它是有内在规律的，即它出现的可能性大小是可以"度量"的. 随机事件的概率就是用来度量随机事件出现可能性大小的一个数

字，它是概率论中最基本的概念之一.

一、概率的统计定义

我们知道，一个随机事件，在每次试验中，可能发生也可能不发生，即在每次试验中，随机事件的发生带有偶然性. 然而，对同一事件，在相同条件下进行大量试验，又会呈现出一种确定的规律来. 它告诉我们：随机事件发生的可能性的大小是可以度量的.

历史上，有人做过抛掷硬币的试验，结果如下表所示：

试验者	投掷次数 n	“正面向上”次数 μ	“正面向上”频率 f
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维　尼	30 000	14 994	0.499 8

容易看出，随着抛掷次数的增加，正面向上的频率 $f=\mu/n$ 围绕着一个确定的常数 0.5 做幅度越来越小的摆动. 正面向上的频率稳定于 0.5 附近，这是一个客观存在的事实，不随人们主观意志为转移的. 这一规律，就是频率的稳定性.

一般地，在大量重复试验中，事件 A 发生的频率 $f=\frac{\mu}{n}$ 总是在一个确定的常数 p 附近摆动，且具有稳定性. 这个常数 p 就是事件 A 发生的可能性大小的度量，称为事件 A 的概率，记作 $P(A)$. 概率的这个定义称为概率的统计定义.

这就是说，频率的稳定性是概率的经验基础，而频率的稳定值是随机事件的概率. 频率是个试验值，具有偶然性，可能取多个不同的值，它近似地反映了事件发生可能性的大小；概率是个理论值，只能取惟一值. 只有概率，才精确反映出事件发生可能性的大

小.

概率的这个定义使我们在实践中求概率时,可以利用多次重复试验时的频率来近似概率.

这一定义的科学性,在第 4 章讲解了大数定律后,才能严格证明.

二、概率的古典定义

在讨论一般的随机现象之前,我们先讨论一类最简单的随机现象,这种随机现象有以下两个特征:

(1) 在试验中它的全部可能的基本结果只有有限个. 即样本空间 Ω 有限,记为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\},$$

由 n 个样本点构成.

(2) 所有基本事件 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 都是等可能出现的.

一般把具有上述两个特征的随机现象称为古典概型. 在古典概型中,对任何事件 A,设 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}\}$是由 Ω 中 k 个样本点构成的,因此定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

即 A 包含样本点的个数与样本点总数之比.

概率的这种定义,称为**概率的古典定义**.

由于样本点等可能性的假定,很容易理解上述定义确实客观反映了随机事件出现可能性的大小.

例 1 在一批 20 件正品、3 件次品组成的产品中,任取一件产品,求取得正品的概率.

解 设想把这些产品进行编号,把 20 件正品依次编成 1,2,$\cdots$,20,把 3 件次品依次编为 21,22,23,那么所有可能结果全体为 $\Omega=\{1,2,\cdots,23\}$,其中"i"表示取得编号为"i"的一件产品($i=1$,

2，…，23），显然由于抽取是随机的，事件“i”发生的可能性相等，记 A 表示取到正品，则

$$A=\{1,2,\cdots,20\}$$

$$P(A)=20/23$$

例 2 在一个装有 N 个球的袋中有 n 个红球（$n<N$），现有 N 个人，每人依次从中取一个球，求第 k 个人抽到红球的概率.

解法一 把 N 个球分别编号 $1,2,\cdots,N$，前 n 个编号的球为红球，设想第 k 个人抽出的球放在直线上第 k 个位置，则抽球的结果相当于这 N 个球的一个全排列，每种结果的等可能性是显然的. 此时总样本点数为 P_N^N，而第 k 个人抽到红球相当于排列的第 k 个位置为红球，这样的排列有 $n\,P_{N-1}^{N-1}$ 种情况，所以该事件的概率为 $p=n\,P_{N-1}^{N-1}/\,P_N^N=n/N$.

解法二 仅考察第 k 个人抽到的结果，共有 N 种可能性，由于对称性，抽到哪个球都是等可能的，而抽到红球的情况有 n 种，所以 $p=n/N$.

值得注意的是，解法一、解法二的结果都与 k 无关，这也就是所谓的抽签的公正性. 另外还可以看到尽管解法一、解法二考察角度不一致，但结果是一致的.

例 3 设有 n 个球，每个球都能以同样的可能 $\frac{1}{N}$ 落到 N 个格子（$N\geqslant n$）的每一个格子中，试求：

（1）某指定的 n 个格子中各有一球的概率 P_1.

（2）没有一个格子中有两个球的概率 P_2.

解 这是一个古典概型问题. 由于每个球可落入 N 个格子中的任何一个，所以 n 个球在 N 个格子中的分布相当于从 N 个元素中选取 n 个进行有重复的排列，共有 N^n 种可能分布.

在第一个问题中，每一种场合相当于 n 个球在那指定的 N 个格子中的一个全排列，总数为 $n!$，因而所求概率为 $P_1=\frac{n!}{N^n}$.

在第二个问题中，等价于 n 个球落入 n 个不同的格子中，即 n 个格子中各有一球，这时 n 个格子可以任意，即可以从 N 个格子中任意选出 n 个来，这种选法共 C_N^n 种；对于每种选定的 n 个格子，还有 $n!$ 种排列方式，故所求概率为

$$P_2=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}$$

以上这个例子是古典概型中一个很典型的问题，不少实际问题可以归结为它.

例如，把球解释为印刷错误个数，格子解释为书的页码数，上题可理解为印刷错误在书中页码的分布情况.

另一个颇为有名的例子是：求某班级 n 个人中没有两人生日相同的概率. 若把 n 个人看作上面问题中的 n 个球，而把一年中的 365 天作为格子，则 $N=365$，这时，P_2 就给出了所求概率. 下表给出了班级人数 n 分别为 20，30，40，50，55，64，100 时，没有两个人生日相同的概率 P_2.

n	20	30	40	50	55	64	100
P_2	0.589	0.294	0.109	0.030	0.01	0.003	3×10^{-7}

从上表可以看出：随着 n 的增加 P_2 越来越小，在仅有 50 个人的班级中，没有两个人生日相同的概率为 0.03，从而可得到“至少有两人生日相同”的概率为 0.97，这一概率与 1 相差无几. 因此，如做实际调查的话，几乎总是会出现的.

利用概率的古典定义，易证古典概率有下列性质：

(1) $P(A)\geqslant 0$ ；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 当 $AB=\varnothing$ 时，$P(A+B)=P(A)+P(B)$.

三、几何概率

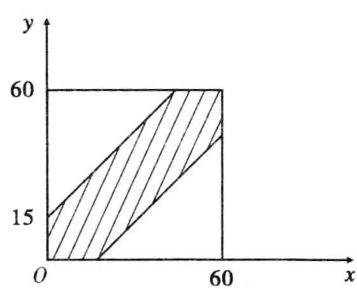
古典概率只能适用于有限样本空间，而当试验的结果无限，而且可用一个有度量(如长度、面积、体积等)的几何区域表示时，与这类试验有关的概率如何求呢?

我们先讨论下面的例子.

例 4(会面问题) 甲、乙两人相约上午 8:00 到 9:00 在某地会面，先到者最多等候另一人 15 分钟，见不上面则离去，试求两人能会面的概率.

解 分析这个问题可以看出，用 x,y 分别表示甲、乙到达指定地点的时刻，则实数对(x,y)就是试验的一个结果. 由于 x,y 分别在区间$[0,60]$内等可能取值，故样本点(x,y)全体是平面上正方形区域：$[0,60]\times[0,60]$，且具有等可能性，而事件“两人能会面”则等价于“满足 $0\leqslant|x-y|\leqslant15$”的$(x,y)$，且 $(x,y)\in[0,60]\times[0,60]$(注：上午 8:00 规定时刻为 0，9:00 为 60).

很明显，所求概率认为和面积成正比是合理的.



即

$$p=(60^2-45^2)\div60^2$$
$$=1-\frac{3^2}{4^2}=7/16$$