全国高职高专教育“十二五”规划教材

计算机数学基础

张国勇　主编

科学出版社

全国高职高专教育“十二五”规划教材

计算机数学基础

张国勇　主　编
张玉祥　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书根据计算机类专业课教学的需求，贯彻“必需、够用”的教学原则，有机地整合了高职计算机类专业教学中常用的数学内容，读者可根据具体需求有所侧重和取舍.

本书可作为高职高专、成人高校计算机及相关专业的数学教学用书或自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学基础/张国勇主编. —北京：科学出版社，2012
(全国高职高专教育“十二五”规划教材)
ISBN 978-7-03-031636-3

Ⅰ.①计… Ⅱ.①张… Ⅲ.①电子计算机-数学基础-高等职业教育-教材 Ⅳ.①TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 033365 号

策划：姜天鹏 姜 波
责任编辑：李 瑜 张振华 / 责任校对：王万红
责任印制：吕春珉 / 封面设计：科地亚盟

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京鑫丰华彩印有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 3 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2012 年 3 月第一次印刷 印张：13 3/4
字数：312 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈鑫丰华〉)
销售部电话 010-62142126 编辑部电话 010-62148322

版权所有，侵权必究

举报电话：010-64030229；010-64034315；13501151303

前言

本书根据高职院校计算机类专业课教学的需求，贯彻“必需、够用”的教学原则，充分考虑高职教育的特殊层次和学生的实际情况，着力于突出以下特色：

(1) 在不违背科学性的前提下，把高职计算机类专业教学中常用到的数学知识有机地整合为基本衔接的章节，读者可根据具体需求适当取舍.

(2) 遵循理论够用的原则，对一些必要的理论只提供直观的解释，不做复杂的推导. 一方面达到削减篇幅、学时，有效地解决当前普遍存在的“学时多、内容多”的问题；另一方面又满足专业课教学的实际需要. 内容力求直观实用、通俗易懂.

(3) 内容注重了解、会说、会用三个层面的要求. 一般只要求了解、会用.

(4) 有机地融入了一些数学建模、数学实验的思想和方法，使学生不觉得单调、枯燥，使教师好教，学生易学.

(5) 注意到与中学教改及与计算机类专业课教学需要的协调和配合.

(6) 所配备的例题、习题尽量做到不偏不难，具有典型性，并与专业联系密切.

本书分别由福建船政交通职业学院的张国勇教授和张玉祥副教授担任主编和副主编，负责稿件的大纲及统筹工作。具体编写分工如下：甘缓(第 1、2 章)，黄惠玲(第 3、4 章)，刘淋(第 5、7 章)，沈焰金(第 6 章)，金晶晶(第 8 章)，黄柳铃(第 9 章).

由于编者水平有限，加之编写时间仓促，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

2011 年 7 月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续 …… 1
1.1　函数的概念 …… 1
1.1.1　基本初等函数 …… 1
1.1.2　复合函数 …… 1
1.1.3　初等函数 …… 2
1.2　函数的极限 …… 2
1.2.1　当 $x \to \infty$ 时的极限 …… 2
1.2.2　当 $x \to x_0$ 时的极限 …… 3
1.3　极限的四则运算法则 …… 5
1.4　两个重要极限 …… 8
1.4.1　极限 $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ …… 8
1.4.2　极限 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ …… 9
1.5　无穷小量与无穷大量 …… 10
1.5.1　无穷小量 …… 10
1.5.2　无穷大量 …… 12
1.5.3　无穷小量的比较 …… 12
1.6　函数的连续性 …… 13
1.6.1　函数的连续 …… 14
1.6.2　函数的间断 …… 15
1.6.3　初等函数的连续性 …… 16
1.6.4　闭区间上连续函数的性质 …… 17
复习题 1 …… 18
第 2 章　导数与微分 …… 21
2.1　导数的概念 …… 21
2.1.1　两个实例 …… 21
2.1.2　导数的概念 …… 21
2.1.3　导数的几何意义 …… 22
2.1.4　可导与连续 …… 23
2.2　直接求导法 …… 23
2.2.1　用导数的定义求函数的导数 …… 23
2.2.2　导数的四则运算法则 …… 24

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

2.2.3 反函数的导数 …… 25
2.3 复合函数求导法 …… 26
2.4 隐函数和参数方程求导法 …… 28
2.4.1 隐函数求导法 …… 28
2.4.2 参数方程求导法 …… 30
2.5 高阶导数的求法 …… 31
2.6 函数的微分 …… 32
2.6.1 微分的概念 …… 32
2.6.2 基本初等函数的微分公式与微分运算法则 …… 32
2.6.3 微分在近似计算中的应用 …… 34
复习题 2 …… 35
第 3 章 导数的应用 …… 38
3.1 洛必达法则 …… 38
3.1.1 拉格朗日中值定理 …… 38
3.1.2 洛必达法则 …… 38
3.2 函数的单调性 …… 41
3.3 函数的极值与最值 …… 43
3.3.1 函数的极值 …… 43
3.3.2 函数的最值 …… 45
3.4 函数图像的描绘 …… 46
3.4.1 函数的凸凹与拐点 …… 46
*3.4.2 曲线的渐近线 …… 47
*3.4.3 函数图像的描绘 …… 48
复习题 3 …… 50
第 4 章 积分及其应用 …… 52
4.1 定积分的概念与性质 …… 52
4.1.1 定积分问题的引例 …… 52
4.1.2 定积分的定义 …… 53
4.1.3 定积分的几何意义 …… 54
4.1.4 定积分的性质 …… 55
4.2 牛顿-莱布尼茨公式 …… 56
4.2.1 原函数与不定积分的概念 …… 56
4.2.2 积分上限函数及其导数 …… 57
4.2.3 牛顿-莱布尼茨公式 …… 57
4.3 不定积分的性质和基本积分公式 …… 59
4.3.1 基本积分公式 …… 59
4.3.2 不定积分的性质 …… 60
4.4 不定积分的换元积分法 …… 62

4.4.1　第一换元积分法 …… 62
4.4.2　第二换元积分法 …… 65
4.5　不定积分的分部积分法 …… 67
4.6　定积分的积分法 …… 70
4.6.1　定积分的换元积分法 …… 70
4.6.2　定积分的分部积分法 …… 71
4.7　定积分在几何方面的应用 …… 72
4.7.1　微元法 …… 72
4.7.2　平面图形的面积 …… 73
4.7.3　平面曲线的弧长 …… 75
复习题 4 …… 76
第 5 章　矩阵与线性方程组 …… 79
5.1　矩阵 …… 79
5.1.1　矩阵的概念 …… 79
5.1.2　特殊矩阵 …… 80
5.2　矩阵的基本运算 …… 82
5.2.1　矩阵的加法 …… 82
5.2.2　数与矩阵的乘法 …… 82
5.2.3　矩阵的乘法 …… 83
5.2.4　矩阵的幂 …… 84
5.2.5　矩阵的转置 …… 85
5.3　矩阵的初等变换 …… 86
5.3.1　矩阵的初等变换 …… 86
5.3.2　用初等行变换求逆矩阵 …… 88
5.3.3　用矩阵的初等变换求方程组的解 …… 89
复习题 5 …… 91
第 6 章　概率论 …… 94
6.1　随机事件与概率 …… 94
6.1.1　随机事件 …… 94
6.1.2　概率的定义 …… 96
6.2　概率的基本运算 …… 99
6.2.1　加法公式 …… 99
6.2.2　条件概率 …… 100
6.2.3　乘法公式 …… 101
6.2.4　事件的独立性 …… 102
6.2.5　伯努利概型 …… 104
6.2.6　全概率公式 …… 105
6.3　离散型随机变量及其分布列 …… 106

6.3.1 随机变量的概念 …… 106
6.3.2 离散型随机变量的分布 …… 107
6.4 连续型随机变量 …… 112
6.4.1 分布密度 …… 112
6.4.2 几种常用连续型随机变量的分布 …… 113
6.5 随机变量的分布函数 …… 115
6.5.1 随机变量的分布函数 …… 115
6.5.2 离散型随机变量的分布函数 …… 116
6.5.3 连续型随机变量的分布函数 …… 117
6.6 正态分布 …… 119
6.6.1 正态分布的定义与性质 …… 119
6.6.2 标准正态分布的计算准则 …… 120
6.6.3 一般正态分布的计算准则 …… 121
6.7 数学期望与方差 …… 122
6.7.1 数学期望 …… 123
6.7.2 方差 …… 125
复习题 6 …… 128
第 7 章 数理逻辑 …… 132
7.1 命题及符号化 …… 132
7.1.1 命题的概念 …… 132
7.1.2 命题的符号化 …… 133
7.2 命题公式及其赋值 …… 138
7.2.1 命题公式 …… 138
7.2.2 命题公式的赋值及真值表 …… 138
7.2.3 等价公式 …… 140
7.2.4 等值演算 …… 141
7.3 命题逻辑基本推理 …… 144
7.3.1 蕴含式的定义 …… 144
7.3.2 基本蕴含式 …… 145
复习题 7 …… 147
第 8 章 图论 …… 149
8.1 图的基本概念 …… 149
8.1.1 图的定义 …… 149
8.1.2 顶点的度 …… 150
8.1.3 完全图 …… 151
8.1.4 图的同构 …… 152
8.2 图的矩阵表示 …… 154
8.2.1 邻接矩阵 …… 155

8.2.2 关联矩阵 …… 156
8.3 图的连通性 …… 158
8.3.1 通路与回路 …… 159
8.3.2 连通性 …… 160
8.3.3 欧拉通路 …… 161
8.3.4 哈密尔顿通路 …… 162
8.3.5 带权图与最短通路 …… 163
8.4 树 …… 164
8.4.1 无向树及其性质 …… 165
8.4.2 生成树与最小生成树 …… 166
8.4.3 有向树 …… 168
复习题 8 …… 169
第 9 章 Matlab 软件简介 …… 172
9.1 基本操作 …… 172
9.1.1 启动与退出 Matlab 系统 …… 172
9.1.2 主窗口 …… 172
9.1.3 命令窗口 …… 173
9.1.4 工作空间窗口 …… 174
9.1.5 命令历史记录窗口 …… 174
9.1.6 启动平台窗口和 Start 按钮 …… 174
9.1.7 Matlab 帮助系统 …… 175
9.1.8 演示系统 …… 175
9.2 矩阵计算 …… 175
9.2.1 矩阵的创建与修改 …… 176
9.2.2 矩阵的运算 …… 177
9.2.3 矩阵的数组运算 …… 178
9.3 数值积分计算 …… 179
9.3.1 一重积分计算 …… 179
9.3.2 二重定积分的数值求解 …… 181
附录 标准正态分布表 …… 183
参考答案 …… 184
参考文献 …… 209

第 1 章 函数、极限与连续

初等数学主要研究的是常量及其运算，高等数学主要研究的是变量以及变量与变量之间的依赖关系，即函数关系. 而极限理论是高等数学的基础，高等数学中的基本概念都是借助极限方法描述的. 连续是与极限密切相关的概念，连续函数是实际中使用最为广泛的函数. 本章将在中学数学已有函数知识的基础上介绍复合函数及初等函数，并进一步讲述极限的概念与运算法则、连续函数的概念与性质等.

1.1 函数的概念

1.1.1 基本初等函数

常数函数 $y=c$；

幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为常数）；

指数函数 $y=a^{x}$（$a>0, a\neq 1$，a 为常数）；

对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0, a\neq 1$，a 为常数）；

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\mathrm{arccot}\, x$.

这 6 种函数统称为基本初等函数，这些函数的定义、图像和性质在中学已经学过，今后会经常使用到.

1.1.2 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$，若 $Z(\varphi)\cap D(f)$ 非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数，其中 x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量.

例 1.1 将下列各题中的 y 表示为 x 的函数，并写出它们的定义域.

（1）$y=u^3, u=\cos x$；（2）$y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=2x-3$.

解 （1）$y=u^3=(\cos x)^3=\cos^3 x$，复合函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

（2）$y=\sqrt{u}=\sqrt{\ln v}=\sqrt{\ln(2x-3)}$，要使函数 y 有意义，需满足

$$\begin{cases}2x-3>0\\ \ln(2x-3)\geqslant 0\end{cases},$$

解之得，$x\geqslant 2$. 所以，复合函数的定义域为 $[2,+\infty)$.

例 1.2 分析下列函数的复合过程.

（1）$y=\sqrt{\cot(3x+2)}$；（2）$y=3^{\sin[\lg(4x-1)]}$.

解 （1）$y=\sqrt{u}, u=\cot v, v=3x+2$；

（2）$y=3^{u}, u=\sin v, v=\lg w, w=4x-1$.

注:(1) 定义中的条件 $Z(\varphi)\cap D(f)\neq\varnothing$,也就是说并不是任意两个函数都能复合成复合函数,当 $Z(\varphi)\cap D(f)=\varnothing$ 时,$y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 就不能复合.

例如:$y=\arcsin u$,$u=x^2+3$. 因为 $D(f)=[-1,1]$,而 $Z(\varphi)=[3,+\infty)$,所以这两个函数不能复合成一个复合函数. 事实上 $y=\arcsin(x^2+3)$ 是没有意义的.

(2) 复合函数也可以由两个以上的复合步骤复合而成,如例 1.2.

1.1.3　初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的,并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例如,$y=e^{\sqrt[3]{x}}$,$y=\log_3\sin 4x$,$y=2-\arctan\sqrt{5x^3}$ 等都是初等函数. 不难发现,我们过去所见过的函数大多是初等函数.

注:由初等函数的概念可知:分段函数大多不是初等函数,因为分段函数一般在定义域的不同范围都由几个不同的解析式来表示;但有的分段函数也可以用一个解析式表示,例如,$y=\begin{cases}x, & x>0\\ -x, & x\leqslant 0\end{cases}$ 可表示为 $y=|x|$,也可表示为 $y=\sqrt{x^2}$,因此,它是初等函数.

习题 1.1

1. 求由函数 $y=e^{-3u}$,$u=\sqrt{5x+1}$ 复合而成的复合函数.

2. 求由函数 $y=\sqrt[3]{u}$,$u=\cos v$,$v=4x^2-3$ 复合而成的复合函数.

3. 分析下列函数由哪些函数复合而成.

(1) $y=\ln^3(\cot\sqrt{2x+5})$;　　　(2) $y=\arccos(e^x+1)^5$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\geqslant 0\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$,求 $f(0)$,$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$,$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1.2　函数的极限

1.2.1　当 $x\to\infty$ 时的极限

$x\to\infty$ 表示 $|x|$ 无限增大. 当 $x>0$ 且无限增大时,记作 $x\to+\infty$;当 $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大时,记作 $x\to-\infty$.

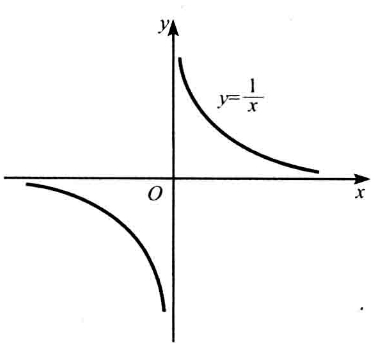

图 1.1

考察函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 图像,如图 1.1 所示.

可以看到,当 $|x|$ 无限增大时,$\dfrac{1}{x}$ 无限趋近于零,即函数图像无限趋近于直线 $y=0$(x 轴).

我们称函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时有极限,极限值为 0,记为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

若函数 $y=f(x)$ 当 $|x|$ 无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，则称 A 为 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A \quad (x\to\infty).$$

若函数 $y=f(x)$ 当 $x>0$ 且无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，则称 A 为当 $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A \quad (x\to+\infty).$$

若函数 $y=f(x)$ 当 $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，则称 A 为 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A \quad (x\to-\infty).$$

显然，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

例 1.3　当 $x\to\infty$ 时，考察 $y=\arctan x$ 的极限.

解　作出 $y=\arctan x$ 的图像，如图 1.2 所示.

当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数 $y=\arctan x$ 的变化趋势是不一样的. 具体说，当 $x\to+\infty$ 时，$\arctan x$ 的图像无限趋近于直线 $y=\frac{\pi}{2}$，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$；当 $x\to-\infty$ 时，$\arctan x$ 的图像无限趋近于直线 $y=-\frac{\pi}{2}$，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$. 综上所述，当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\arctan x$ 极限不存在.

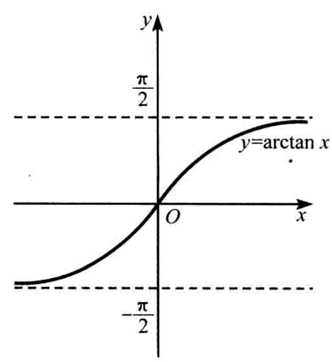

图 1.2

注：$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 中至少有一个不存在，或虽然两个都存在但不相等，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在.

1.2.2　当 $x\to x_0$ 时的极限

考察当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3x+1$ 的极限.

列表 1.1 观察.

表 1.1

x	…	-0.01	-0.001	-0.0001	…	0	…	0.0001	0.001	0.01	…
$f(x)$	…	0.97	0.997	0.9997	…	1	…	1.0003	1.003	1.03	…

从表 1.1 中可以看出，当 $x\to 0$（无论 x 从左侧或从右侧趋于 0）时，函数 $f(x)=3x+1$ 的值总是趋于 1. 我们称当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3x+1$ 的极限为 1，记为 $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1)=1$.

一般的，当 x 从 x_0 的左右两侧同时无限趋近 x_0，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于常数 A 时，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

注：(1) $x\to x_0$ 的方式是任意的，既可以从 x_0 的左侧无限趋近 x_0，也可以从 x_0 的右侧无限趋近 x_0；若极限存在，则相应的函数值 $f(x)$ 都应无限地趋近常数 A.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 与函数 $f(x)$ 在 x_0 处是否有定义无关.

当 $x>x_0$ 且 $x\to x_0$ 时，即当 x 从 x_0 的右侧无限趋近 $x_0(x\to x_0^+)$时，相应的函数值 $f(x)$无限趋近常数 A，则称 A 为当 $x\to x_0^+$ 时函数 $f(x)$的右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0^+).$$

同理，当 $x<x_0$ 且 $x\to x_0$ 时，即当 x 从 x_0 的左侧无限趋近 $x_0(x\to x_0^-)$时，相应的函数值 $f(x)$无限趋近常数 A，则称 A 为当 $x\to x_0^-$ 时函数 $f(x)$的左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0^-).$$

显然，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

例 1.4　设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$，试讨论当 $x\to 0$，$x\to 1$，$x\to -1$ 时，函数 $f(x)$ 的极限.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$. 而 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

由于 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$，所以$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

由于 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-2$，所以 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-2$.

例 1.5　设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1, & x\leqslant 1 \\ x, & 1<x<2 \\ 2x-2, & x\geqslant 2\end{cases}$，试讨论当 $x\to -1$，$x\to 1$，$x\to 1.5$，$x\to 2$，$x\to 3$ 时，函数 $f(x)$的极限.

解　由于 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x^2+2x-1)=-2$，所以 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-2$.

由于 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+2x-1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x=1$. 而 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在.

由于 $\lim\limits_{x\to 1.5} f(x)=\lim\limits_{x\to 1.5} x=1.5$，所以 $\lim\limits_{x\to 1.5} f(x)=1.5$.

由于 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x=2$，$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-2)=2$，$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$.

由于$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(2x-2)=4$，所以$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$.

习题 1.2

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x>1 \\ 1, & x=1 \\ x-1, & x<1\end{cases}$，讨论$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$是否存在.

2. 根据函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 的图像，讨论极限 $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arccot}x$ 和 $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arccot}x$ 的值，并由此说明$\lim\limits_{x\to \infty}\operatorname{arccot}x$ 是否存在.

3. 证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{|x|}$不存在.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ x^2, & 0\leqslant x<1 \\ 1, & x\geqslant 1 \end{cases}$，判断当 $x\to 0, x\to 1, x\to 2$ 时函数极限是否存在.

1.3　极限的四则运算法则

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$（假定 x 在同一变化过程中），则有下列运算法则：

法则 1.1　$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

法则 1.2　$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$.

推论　$\lim c[f(x)]=c\lim f(x)=cA$（$c$ 为常数）.

法则 1.3　$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

注：(1) 法则成立的前提是自变量 x 在同一变化过程中，且极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，若不满足这些前提条件，则法则失效；

(2) 法则 1.1 和法则 1.2 可以推广到有限多个函数的代数和或乘积的情形；

(3) 使用法则 1.3 时一定要保证分母的极限不为零，分子、分母的极限都存在.

例 1.6　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5}{2x^3-3x+2}$.

解　注意到分母极限不为零，所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-5}{2x^3-3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-5)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x^3-3x+2)}=\frac{-3}{1}=-3.$$

例 1.7　求$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$.

解　注意到分母的极限为零，而分子的极限不为零，因此

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)}=\frac{0}{5}=0.$$

所以$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+1}{x^2-4}=\infty$（即极限不存在）.

例 1.8　求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$.

解　注意到分子、分母的极限都为零，不能使用法则 1.3，所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x+2}=\frac{6}{5}.$$

注：综合以上的例题，当 $x\to x_0$ 时，多项式和分式的极限主要看分母的极限是否为零，若不为零，则只要将 $x=x_0$ 代入求函数值即可；若分母极限为零，则根据分子极限是否为零的情况分别处理.

例 1.9　求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}\\&=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

我们把分子、分母都趋于 0 的极限形式记为"$\dfrac{0}{0}$"型，对于"$\dfrac{0}{0}$"型极限的一般方法是通过提取公因式、因式分解、分式有理化等方法先约简再求极限.

例 1.10　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x-5}{3x^2-8x+1}$.

解　注意到$\lim\limits_{x\to\infty}x$ 不存在，而$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x-5}{3x^2-8x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}}{3-\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0-0}{3-0+0}=\frac{2}{3}.$$

我们把分子、分母都趋于∞的极限形式记为"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型. 求"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型的一般方法是分子、分母同时除以分子、分母的最高次幂或除以某个以∞为极限的函数式.

例 1.11　求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+3)^{16}}{(2x-7)^9(x+1)^7}$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+3)^{16}}{(2x-7)^9(x+1)^7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{16}}{\left(2-\frac{7}{x}\right)^9\left(1+\frac{1}{x}\right)^7}=\frac{1}{2^9}.$$

例 1.12　求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x-5^x}{3^{x+1}+5^{x+1}}$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-5^x}{3^{x+1}+5^{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^x-\frac{1}{5}}{\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+1}=-\frac{1}{5}.$$

此例用到结论：若$|q|<1$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}q^x=0$.

例 1.13　求$\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$.

解　因为$\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}=\dfrac{x^2-2x+4-12}{x^3+8}=\dfrac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\dfrac{x-4}{x^2-2x+4}$，

所以$\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-4}{x^2-2x+4}=\dfrac{-6}{12}=-\dfrac{1}{2}$.

例 1.14　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0.$

例 1.15　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}=\frac{2}{2}=1.$$

除了“$\dfrac{0}{0}$”和“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型以外，还有“$\infty-\infty$”型等形式的极限，一般可以通过通分或分式有理化等方法把形式转化为“$\dfrac{0}{0}$”或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的极限来求解.

例 1.16　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

解　由于法则 1.1 只适合于有限项，所以该题不能使用法则 1.1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n(1+n)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}.$$

习题 1.3

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2+2x-5}{2x^3-5x+7}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+9}{x^3-2x+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^3+2x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{x^2-5}{x^4-2x^2+1}$.

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-7x+5}{3x^3+8x^2-2x+9}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^4+5x^3-7}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+4})$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^4+3}{2x^4-5}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^5}{1+3x^5}-3^{\frac{1}{x}}\right)$;　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2-3n}$;　　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$.

1.4　两个重要极限

1.4.1　极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

列表 1.2 考察当$|x|\to 0$时，函数$\dfrac{\sin x}{x}$的变化趋势.

表 1.2

x	…	±1	±0.5	±0.1	±0.01	…
$\dfrac{\sin x}{x}$	…	0.841 47	0.958 85	0.998 33	0.999 98	…

由表 1.2 可知，当$|x|\to 0$时，$\dfrac{\sin x}{x}\to 1$.

可以证明$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

例 1.17　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{3}{2}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}\cdot\dfrac{3}{2}=1\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$（令$t=3x$）.

例 1.18　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1\times 1=1.$$

例 1.19　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 3x}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\tan 3x}\cdot\frac{5}{3}\right)=1\times 1\times\frac{5}{3}=\frac{5}{3}.$$

例 1.20　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

例 1.21　求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$.

解　因为$\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$，令$t=\dfrac{\pi}{2}-x$，则当$x\to\dfrac{\pi}{2}$时，$t\to 0$，所以
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

例 1.22　求$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x^2}$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com