普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编　安学庆　黄玉勤　杨松华

下册

郑州大学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编　安学庆　黄玉勤　杨松华

下册

郑州大学出版社
郑　州

内容提要

本书是根据教育部高等学校数学基础课程教学指导委员会制定的《本科数学基础课程教学基本要求》,编者多年的高等数学教学经验而编写的“高等院校规划教材”.

全书共十一章,分为上、下两册,本书为下册,主要内容有向量与空间解析几何,多元函数微分学,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数.书末还附有各章节的习题答案与提示.

本书可以作为高等院校非数学类专业本科生的高等数学课程教材,也可作为教师及工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/安学庆,黄玉勤,杨松华主编.—郑州:郑州大学出版社,2013.2
ISBN 978-7-5645-0918-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①安…②黄…③杨… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.①

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 123031 号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052
出版人:王　锋　　发行部电话:0371-66966070
全国新华书店经销
郑州市诚丰印刷有限公司印制
开本:787 mm×1 092 mm　1/16
印张:17.5
字数:417 千字
版次:2013 年 2 月第 1 版　　印次:2013 年 2 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-5645-0918-7　　定价:29.00 元

作者名单

主　编　安学庆　黄玉勤　杨松华

副主编　齐祥来　尹　红　李　镇

编　委　(以姓氏笔画为序)

尹　红　齐祥来　安学庆

李　镇　张国强　杨松华

黄玉勤

前 言

微积分是近代数学最伟大的成就.由于它在各个领域的广泛应用,以微积分为主要内容的高等数学成为高等教育阶段最重要的基础课程之一.它不仅为后续课程和科技工作提供了必备的数学工具,而且对学生科学素质的形成和分析、解决问题能力的培养产生了重要而深远的影响.但是多年来,在高等数学的教学中,存在着偏重向学生传授微积分的概念、理论、运算规则和技巧,而忽略微积分的数学思想、方法及其与实际紧密联系的现象,不够注重该课程在学生素质的提高与能力的培养方面的积极作用.

为满足21世纪我国高等教育大力发展的需要,我们根据教育部高等学校数学基础课程教学指导委员会制定的《本科数学基础课程教学基本要求》,在高等院校数学教师多年教学改革实践的基础上,研究、剖析、对比国内外一批教材和资料,组织具有高等数学教学经验的老师,经过反复研讨,集体编写了这本教材.本教材是参编者集思广益和通力合作的成果,以"联系实际,注重应用,淡化理论,提高素质"为特色,充分体现了"厚基础,强应用"的编写原则.在内容编排上,紧密衔接初等数学,从特殊到一般,从具体到抽象,注重概念、定理的几何意义、物理意义和实际背景的诠释,深入浅出,论证简明,易于教,便于学.归纳起来,本教材有以下特点:

1. 从实际问题出发,引入数学概念和理论,让学生体会到微积分来源于实际,又能指导实际.在教材中,我们尽量从不同角度给出实际例子,并加入简单的数学模型,让学生初步体会到微积分与现实世界中的客观现象是有着密切联系的.

2. 合理调整和安排教材中的概念与理论、方法与技巧和应用与实践这三部分内容,加强从几何和数值方面对数学概念的分析,从多方面培养学生的理性思维;增加用表格和图形表示的函数及其运算的介绍,注意克服偏重分析运算和运算技巧的倾向;加强实践环节,重视应用能力的培养.

3. 重视微积分的各部分内容的应用,从导数到积分,再到微分方程,均给出了较多的应用实例,并尝试将数学建模的思想融入其中.

4. 在习题中,适当加大应用问题的比例,以便学生能尝试利用所学微积分知识来分析和解决一些简单的实际问题,提高学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力.

5. 注重运用基本理论和基本方法去分析解决实际问题的数学思想方法的讲

解，拓宽了应用的领域，增强了应用的趣味性.

6. 注意“简易性”，尽量做到通俗易懂，由浅入深，富于启发，便于自学.

总之，本教材力求恰当地处理归纳与演绎、数学发现与知识传授、理论分析与实际应用能力培养之间的关系，以提高学生的综合分析能力和创新能力. 本教材在整体框架上保持了传统微积分的基本内容和结构，在具体内容中融入了编者在高等数学课程改革方面的一些思考与探索，同时也反映了高等数学课程的特色和定位.

本教材内容覆盖面比较广，教师可根据不同专业特点进行取舍. 参考教学时数为 160 ~ 180 学时，带有“ * ”的小节或内容在教学中可视实际情况选用.

本教材分为上、下两册. 上册内容为一元函数微积分和微分方程，下册内容为空间解析几何、多元函数微积分和无穷级数. 各册书末均附有习题答案与提示.

本教材上册由杨松华、黄玉勤、安学庆任主编，陆宜清、李俊强、刘其佳任副主编. 下册由安学庆、黄玉勤、杨松华任主编，齐祥来、尹红、李镇任副主编.

本教材在组织编写和出版过程中，得到了有关高校的领导和相关专家的大力支持和帮助，尤其是国家级名师郑州大学数学系李梦如教授，在百忙之中对本教材作了认真细致的审稿，并提出了宝贵的意见和建议. 他们为本教材的出版付出了辛勤的劳动，在此我们表示诚挚的谢意！

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，因而教材中一定存在不妥之处，敬请专家、同行和广大读者提出宝贵意见并批评指正.

编者

2012 年 9 月

参考文献

[1]同济大学数学系. 高等数学. 第六版. 北京:高等教育出版社,2007.

[2]清华大学数学系《微积分》编写组. 微积分. 北京:清华大学出版社,2004.

[3]上海市教育委员会组编. 高等数学. 上海:科学出版社,1999.

[4]THNTH EDITION,FINNEY WEIR GIORDANO,叶其孝等译. 托马斯微积分. 北京:高等教育出版社,2003.

[5]闫站立. 微积分. 北京:高等教育出版社,2007.

[6]盛祥耀. 高等数学. 北京:高等教育出版社,2008.

[7]谢季坚,李启文. 大学数学. 北京:高等教育出版社,2004.

[8]颜文勇,柯善军. 高等应用数学. 北京:高等教育出版社,2004.

[9]侯风波. 应用数学. 北京:高等教育出版社,2007.

[10]李心灿. 高等数学应用205例. 北京:高等教育出版社,1997.

[11]上海交通大学数学系微积分课程组. 大学数学微积分(上、下册). 北京:高等教育出版社,2008.

[12]马知恩,王绵森. 高等数学简明教程(上、下册). 北京:高等教育出版社,2009.

[13]陈传璋等. 数学分析. 第二版. 北京:高等教育出版社,1983.

目　录

第 7 章　向量与空间解析几何

空间解析几何的产生是为了将数学中抽象的概念和几何直观有机地统一起来,使我们能用代数方法研究几何问题,或用几何方法解决代数问题.本章我们将借助空间直角坐标系,以向量运算为工具来研究空间平面与直线方程,并给出空间曲线和空间二次曲面方程的讨论.

7.1　空间直角坐标系

7.1.1　空间直角坐标系

过空间中一个定点 O 作三条互相垂直的实数轴,它们具有相同的单位长度.这三条数轴分别称为 x 轴(横轴),y 轴(纵轴),z 轴(竖轴),统称为坐标轴.它们的方向按右手规则确定,所谓的右手规则指的是:伸平右手,使拇指与其他四指垂直,当右手的四个手指从 x 轴正向转动 $\frac{\pi}{2}$ 的角度后指到 y 轴的正向时,拇指的指向就是 z 轴的正向.按右手规则确定的这三条实数轴就组成了一个空间直角坐标系,也称为笛卡儿坐标系,点 O 称为坐标原点.

由 x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 面.类似地,有 yOz 面和 zOx 面.这三个互相垂直的面称为坐标面,它们将三维空间分成八个部分,每个部分称为一个卦限,在 xOy 面上方分别为第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限,在 xOy 面下方分别为第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限,如图 7.1 所示.

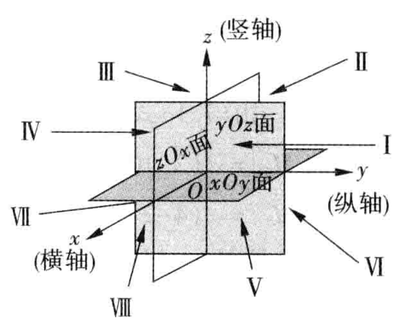

图 7.1

建立空间直角坐标系后,就可以建立空间中的点与三元有序实数组的对应关系了.设 M 为空间一点,过点 M 分别作三个与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面,三个平面与三个坐标轴的交点依次为 P、Q 和 R 点,如图 7.2

所示. 这三个点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别为实数 x、y 和 z,于是空间一点 M 就唯一地确定了一个有序实数组(x,y,z);反过来,若给定了有序实数组(x,y,z),我们可以分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上取坐标分别为 x、y 和 z 的点 P、Q 和 R,并过这三个点作三个依次垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面,这三个平面的交点 M 便是由有序实数组(x,y,z)所确定的点. 这样,空间的点 M 就与三元有序实数组(x,y,z)之间建立了一一对应关系. 三元有序实数组(x,y,z)称为空间点 M 的空间直角坐标,记为$M(x,y,z)$.

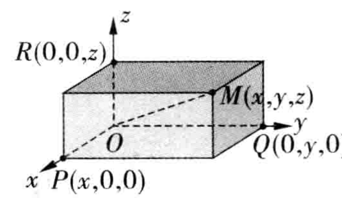

图 7.2

显然,x 轴上的点的坐标为$(x,0,0)$,yOz 坐标平面上的点的坐标为$(0,y,z)$,原点 O 的坐标为$(0,0,0)$.

7.1.2 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点,过点 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三个坐标轴的平面,如图 7.3 所示. 在以 M_1M_2 为体对角线的长方体中,有

$$|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2.$$

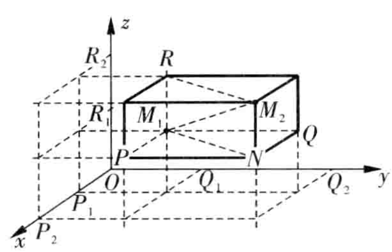

图 7.3

因为 $|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|$, $|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|$, $|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|$, 所以

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{7.1}$$

(7.1)式就是空间两点间的距离公式.

例 求证:以 $M_1(4,1,9)$, $M_2(10,-1,6)$, $M_3(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证明 由(7.1)式知, $|M_1M_2|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$,

$|M_2M_3|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=7\sqrt{2}$,

$|M_3M_1|=\sqrt{(4-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2}=7$.

因为 $|M_1M_2|=|M_3M_1|$,且 $|M_1M_2|^2+|M_3M_1|^2=|M_2M_3|^2$,

所以$\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰直角三角形. 证毕

习题 7.1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点位置的特点.

$A(0,-5,0)$;$B(3,-3,0)$;$C(6,0,-3)$;$D(4,0,0)$;$E(0,5,-7)$;$F(0,0,9)$.

2. 指出下列各点所在的卦限.

$A(2,-3,1)$,$B(7,-1,-2)$,$C(-2,-3,-1)$,$D(-1,2,-3)$.

3. 自点 $M(-1,3,-2)$ 分别作 xOy、yOz、zOx 坐标面和 x、y、z 坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标,并求出点 M 到上述坐标面和坐标轴的距离.

4. 已知点 $M(3,-1,-2)$. 求:(1)点 M 关于各坐标面对称的对称点的坐标;(2)点 M 关于各坐标轴对称的对称点的坐标;(3)点 M 关于坐标原点的对称点的坐标.

5. 求点 $A(4,-3,5)$ 到坐标原点及到各坐标轴的距离.

6. 在 y 轴上求与点 $A(-3,2,7)$ 和 $B(3,1,-7)$ 等距离的点.

7. 已知三角形 ABC 的顶点坐标分别为 $A(1,2,3)$,$B(7,10,3)$ 和 $C(-1,3,1)$,试证明 $\angle BAC$ 为钝角.

8. 试在 xOy 平面上求一点,使它到 $A(1,-1,5)$,$B(3,4,4)$ 和 $C(4,6,1)$ 各点的距离相等.

7.2　向量的概念及其坐标

7.2.1　向量的概念

在实际问题中常会遇到既有大小又有方向的量,例如物理学中的力、位移、速度和加速度等等,这一类量称为向量(或矢量). 如图 7.4 所示,可记该向量为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 或 $\boldsymbol{a}$.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等,方向相同,称它们是相等的向量,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

向量的大小又称向量的模. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记作 $|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量称为单位向量,模等于零的向量称为零向量,记为 $\boldsymbol{0}$. 零向量的方向可看做是任意的.

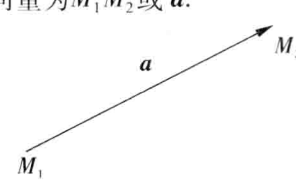

图 7.4

7.2.1.1　向量的加法

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点,作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,连接 AC,如图 7.5 所示,则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和向量,记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

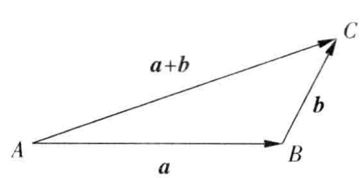

图 7.5

上面所述的作已知两向量的和向量的法则称为向量加法运算的三角形法则.

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$,由此规定两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

特别地,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由向量加法的定义可以证明以下定理:

定理 1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意向量,向量的加法满足下列运算性质:

(1)交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2)结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(4)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

定理 1 中(4)的几何意义为:三角形的任意一个边长不超过其他两个边长之和.

7.2.1.2 向量的数乘

任意向量 $\boldsymbol{a}$ 乘任意实数 λ 得一个新向量 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定它的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向为当 $\lambda>0$ 时,与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同;当 $\lambda<0$ 时,与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,其方向任意. 称向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘法,简称数乘.

显然,向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是平行的. 根据向量数乘运算的定义可以证明以下定理:

定理 2 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为任意向量,λ,μ 为任意实数,则有:

(1)$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;(结合律)

(2)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;(分配律)

(3)$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$;

(4)若向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的充要条件是存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$;

(5)设 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,则 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,因此任一非零向量 $\boldsymbol{a}$ 都可表示为 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$.

7.2.2 向量的坐标

设向量 $\overrightarrow{OM}$ 的起点为坐标原点 O,终点为 $M(x,y,z)$. 三元有序实数组 (x,y,z) 与点 $M(x,y,z)$ 有一一对应关系,也与向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 之间有一一对应关系,即

$$M\leftrightarrow(x,y,z)\leftrightarrow\overrightarrow{OM}.$$

因此我们称三元有序实数组 (x,y,z) 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标,记为 $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$,也称 $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示式.

在空间直角坐标系中,与 x 轴、y 轴、z 轴的正向同向的单位向量分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,称它们为基本单位向量.

过 $\overrightarrow{OM}$ 的终点 $M(x,y,z)$ 作三个平面分别垂直于三条坐标轴,设垂足依次为 P、Q 和

R,如图 7.6 所示,则点 P 的坐标为$(x,0,0)$,根据向量与数的乘法运算,得向量$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$,同理$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$. 于是,由向量加法的三角形法则,得

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM_1}+\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

称$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 为向量$\overrightarrow{OM}$的分解式表示式,分别称 $x\boldsymbol{i}$,$y\boldsymbol{j}$,$z\boldsymbol{k}$ 为向量$\overrightarrow{OM}$在 x 轴,y 轴,z 轴上的分向量.

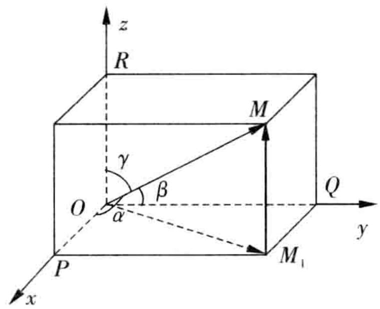

图 7.6

向量$\overrightarrow{OM}$的模为:$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

向量$\overrightarrow{OM}$与三条坐标轴正向的夹角 α,β,γ 称为向量$\overrightarrow{OM}$的方向角,如图 7.6 所示.

向量$\overrightarrow{OM}$的方向角的余弦称为向量$\overrightarrow{OM}$的方向余弦,分别为

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\cos\beta=\frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\cos\gamma=\frac{|\overrightarrow{OR}|}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{7.2}$$

方向余弦满足:$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

与非零向量$\overrightarrow{OM}$同方向的单位向量可表示为

$$\overrightarrow{OM}^0=\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

对起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$而终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$的向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的分解式表示式为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

所以,向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式为$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

基本单位向量的坐标表示式为 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$,$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$,$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$.

我们用向量坐标表示向量后可以证明以下定理:

定理 3 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,$\lambda$ 为任意实数,则有

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k};$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}.$$

即

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z);$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

由此可见,对向量进行加法和数乘运算,只需对向量的各个坐标进行相应的运算即可.

定理 2 中(4)可改写为:设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充要条件是存在唯一的实数 λ,使 $(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$ 成立. 也相当于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的对应坐标成比例,即

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda. \tag{7.3}$$

注意 在(7.3)式中,若 a_x,a_y,a_z 中有一个为零,比如 $a_x=0,a_y,a_z\neq0$,上式应理解为:$\begin{cases}b_x=0,\\ \dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z};\end{cases}$ 若 a_x,a_y,a_z 有两个为零,比如 $a_x=a_y=0,a_z\neq0$,上式应理解为:$\begin{cases}b_x=0,\\ b_y=0.\end{cases}$

例 1 已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$,求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和与向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量.

解 $\overrightarrow{AB}=(7-4,1-0,3-5)=(3,1,-2)$,故 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$,

由(7.2)式得向量 $\overrightarrow{AB}$ 方向余弦分别为

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{3}{\sqrt{14}},\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}},\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

于是,与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}&=\pm\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)\\&=\left(\pm\frac{3}{\sqrt{14}},\pm\frac{1}{\sqrt{14}},\mp\frac{2}{\sqrt{14}}\right).\end{aligned}$$

例 2 如图 7.7,求线段 M_1M_2 的中点 M 的坐标.

解 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\overrightarrow{OM_1}=(x_1,y_1,z_1)$,$\overrightarrow{OM_2}=(x_2,y_2,z_2)$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OM_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2}\\&=\overrightarrow{OM_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1})\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2})\end{aligned}$$

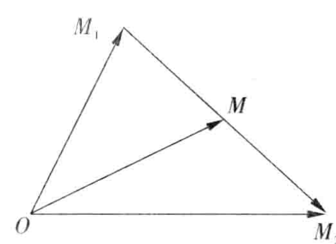

图 7.7