扩展可积方程族的代数方法

冯滨鲁 张玉峰 董焕河 著

科学出版社

扩展可积方程族的代数方法

冯滨鲁　张玉峰　董焕河　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书在简要介绍可积耦合系统国内外研究现状及相关概念的基础上，主要介绍几类李代数及其扩展李代数的构造方法，并利用扩展李代数生成几类方程族的可积耦合，随后利用二次型恒等式得到几类方程族的可积耦合的 Hamilton 结构. 内容共分五章. 第 1 章为绪论，简单介绍孤子理论与可积耦合系统国内外的研究现状；第 2 章介绍可积系统与耦合系统的相关概念；第 3 章介绍几类李代数与可积系统；第 4 章利用李代数的扩展生成几类方程族的可积耦合；第 5 章利用二次型恒等式与变分恒等式得到了几类方程族的可积耦合与 Hamilton 结构.

本书可供相关方向研究生和相同或相近领域研究人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

扩展可积方程族的代数方法/冯滨鲁，张玉峰，董焕河著. —北京：科学出版社，2014. 8

ISBN 978-7-03-041522-6

Ⅰ. 扩… Ⅱ. ① 冯… ② 张… ③ 董… Ⅲ. ① 李代数 Ⅳ. ①O152.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 173851 号

责任编辑：李 欣 胡志强／责任校对：胡小洁
责任印制：赵德静／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 8 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2014 年 8 月第一次印刷 印张：15
字数：290 000

定价：78.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

孤子和可积系统理论是近年来发展极快的一个研究领域, 它的研究涉及经典力学、流体力学、弹性力学、量子力学、规范场论、光学、生物学等众多应用领域, 它所运用的方法涵盖一系列数学领域, 诸如李群和李代数、函数论、代数几何、微分几何、线性和非线性偏微分及常微分方程、差分方程、计算数学、组合数学、正交多项式理论及至数论、代数编码、计算机科学等. 一个课题涉及如此众多的数学和物理领域实在是非常罕见的. 众所周知, 许多物理现象可以用线性和非线性微分方程来描述, 非线性方程自然比线性方程更难以驾驭. 可积系统理论可以说是横跨线性和非线性现象间的一座桥梁, 它既从古典线性方程研究中吸取了足够的营养 (如二阶线性薛定锷方程反散射变换、可交换线性常微分算子的代数几何理论), 又获得了非线性现象特有的丰富多彩的表现和技巧. 大家都能背诵的千古名句, 比如 “落霞与孤鹜齐飞, 秋水共长天一色” “问君能有几多愁, 恰似一江春水向东流! ” 从小学过汉语的我们才能享受其中的无比美妙的意境. 同样地, 只有在深入研究可积系统理论的过程中我们才能享受到这一领域的种种美妙之处.

孤子和可积系统理论始于 20 世纪 60 年代末和 70 年代初. 70 年代后期至 80 年代初在老一辈科学家冯康教授、谷超豪教授等倡导下, 我国学者开始了这一方向的研究. 当时南开大学在著名科学家陈省身、杨振宁指导下成立数学所, 有力地支持了非线性动力系统包括孤子和可积系统理论的研究. 在 80 年代, 谷超豪、胡和生教授极大地发展了可积系统的几何理论, 曹策问教授提出了独创的非线性化算法, 李翊神教授的团队在反散射变换和规范变换方面的出色研究等乃是我国在可积系统领域里具有国际领先水平的成果.

近年来, 在胡和生、曹策问两位教授卓越工作的引领和身体力行的带动下, 我国学者在可积系统研究方面不断取得很多出色成果. 在国内外数学物理界前沿学术期刊上, 我国学者和由他们带出来的研究生, 如今已成为分散在国内和欧美各大学、研究所的学者, 发表的优质论文越来越多. 近年来国内从事这一方向研究的队伍日益壮大, 涌现出许多优秀人物, 该书作者以及本书前言中提到的众多学者乃是当前国内可积系统研究队伍中的领军人物.

可积系统理论里的一个中心课题是寻求新的可积系统并探讨其哈密顿(Hamilton) 结构. 该书作者冯滨鲁、张玉峰、董焕河教授多年来致力于这一方向的研究, 取得了不少有价值的成果. 该书作者简化了德国 Fuchssteiner 教授和美国马文秀教授提出的推求耦合可积系统的算法. 马文秀教授、郭福奎教授和该书作者一起推广

了笔者早年提出的迹恒等式, 并给出了迹恒等式里待定系数的计算公式, 在此基础上求得了不少新的可积系统. 他们的想法和结果值得有志在这一领域里探索的年轻学子作进一步的探讨, 该书深入系统的介绍必定有利于年轻学子的后续研究.

笔者衷心祝愿该书作者今后在可积系统研究方面取得更大进展, 并深信在国家各项基金大力支持之下, 在国内普遍推崇学术研究的大环境里, 国内可积系统的研究在今后几年里必将取得令国际瞩目的傲人成绩, 让我们翘首以待!

屠规彰

2014 年 4 月于北京

前　言

非线性科学是一门研究非线性现象的基础学科, 它主要是研究自然科学的非线性现象的共性及其定量的方法. 人们已经发现非线性现象的三大普适类: 混沌 (chaos)、孤立子 (soliton)、分形 (fractal), 并且在此基础上建立非线性科学的三大理论. 谷超豪院士领导的 “非线性科学” 在 20 世纪 90 年代初被列为我国攀登项目. 孤立子理论是非线性科学的重要研究方向之一, 它不仅刻画了一类非常稳定的自然现象, 而且为非线性偏微分方程提供求显式解的方法, 越来越受到物理学界和数学界的重视.

寻求可积系统及其相关性质一直是孤立子理论中的一项重要研究课题, 而可积耦合系统是一类扩展的可积系统, 是德国著名数学物理专家 Fuchssteiner 在研究 Virasoro 对称代数时首次发现的, 在此基础上美国南佛罗里达大学的马文秀利用扰动方法研究了 KdV 方程的可积耦合系统及其相关性质. 基于屠规彰利用李代数研究可积系统的有关理论, 马文秀和郭福奎都提出了生成可积耦合的李代数方法, 特别是 2005 年, 郭福奎与本书作者之一合作提出了二次型恒等式, 不仅解决了寻求可积耦合的 Hamilton 结构问题, 而且推广了屠规彰早年提出的迹恒等式. 2006 年, 马文秀与其合作者提出了变分恒等式及有关理论, 扩展了可积耦合理论的应用范围, 取得了一系列的重要研究成果, 发表在国内外学术期刊上, 这为国内外有关学者研究可积系统理论提供了重要参考资料. 可积耦合理论不仅丰富了孤立子理论, 而且具有相应的应用背景. 例如, 楼森岳及其合作者从大气和海洋动力系统中抽象出了一个物理模型, 即为一个标准的可积耦合模型, 实为扩展的 KdV 可积耦合方程, 并简便地求出了其对称等有关性质, 由此成功地解释了相关的大气和海洋现象.

本书共分五章. 第 1 章为绪论, 简单介绍孤子理论与可积耦合系统国内外的研究现状; 第 2 章介绍可积系统与耦合系统的相关概念; 第 3 章介绍几类李代数与可积系统; 第 4 章利用李代数的扩展生成几类方程族的可积耦合; 第 5 章利用二次型恒等式与变分恒等式得到了几类方程族的可积耦合与 Hamilton 结构.

本书的主要内容是作者近年来在可积系统方面的部分研究成果, 其中书中部分内容已经刊登在国内外学术期刊上; 书中的部分结果曾在南佛罗里达大学主办的 2012 年国际数学物理会议上报告过; 也有部分结果曾与国内相关专家讨论过, 得到了他们的大力支持和帮助, 特别地要感谢曹策问教授、屠规彰教授、楼森岳教授、屈长征教授、马文秀教授、胡星标教授、刘青平教授、范恩贵教授、耿献国教授、朱佐农教授、周汝光教授、陈勇教授、郭福奎教授、张鸿庆教授、刘家琦教授、

韩波教授、夏铁成教授等专家的指导和帮助. 本书得到了国家自然科学基金 (编号: 11371361) 和山东省自然科学基金 (编号：ZR2013AL016) 的支持.

由于作者水平有限, 书中不当之处, 敬请读者批评指正.

作　者

2014 年 3 月

目　录

第1章　绪　　论

1.1　孤立子理论

孤立子又称孤立波. 1844 年英国科学家 Scott Russell 在英国科学促进会上做了题为《论波动》的报告[1], 他说:“我在观察一条船的运动, 这条船被马拉着沿狭窄的运河迅速前进着. 船突然停了下来, 然而被船推动的那一大片水并没有停止, 而是聚集在船头周围剧烈地扰动着, 随后水浪突然呈现出一个滚圆而平滑的轮廓分明的巨大孤立波峰, 它以巨大速度向前, 急速地离开了船头. 在行进中它的形状和速度没有明显的改变. 我骑在马上紧跟它, 发现它以 8~9 英里每小时的速度向前行进, 并保持长约 30 英尺、高 1~1.5 英尺的原始形状, 渐渐地其高度下降了. 当我跟到 1~2 英里后, 它消失在逶迤的河道中.”

Russell 在实验室的水箱中做了大量实验, 也观察到了同样的现象, 他称这种波为孤立波. 他认为这种孤立波应为流体力学方程的一个稳定解, 并请求当时的数学家在理论上能给予解释, 但限于当时的科学发展水平, 人们并没有给出一个圆满的解释.

在其后几年, 人们对孤立波的存在产生怀疑. 例如, Airy[2] 认为 Russell 所说的孤立波根本就不存在. 但有的科学家, 如 Boussinesq[3] 认为孤立波是存在的, 并从数学角度给出描述和证明, 他给出的描述方程就是 Boussinesq 方程. 即使如此, 有些科学家仍否认孤立波的存在性.

1894 年, Vries 在阿姆斯特丹大学 (University of Amsterdam) 发表了他在 Korteweg 指导下的博士论文. 他提出了一种流体中单向波传波流动的数学模型, 即著名的 KdV 方程, 用来解释 Russell 观察到的现象. 但是他的工作并没有引起人们的重视, 因为许多人认为这种行波仅是偏微分方程的特解, 用特殊的初值即可得到它, 这在初值研究中是微不足道的; 另外人们还认为由于 KdV 方程是非线性的, 两个孤立波相互碰撞后, 波形一定会受到破坏, 所以是不稳定的, 这对于描述物理现象不会有帮助. 于是, KdV 方程与孤立波的研究就搁置起来.

1960 年, Gardner 和 Morikawa[4] 在无碰撞的磁流波研究中, 重新得到了 KdV 方程; 后来 KdV 方程在不同的研究背景中不断出现, 这激起了人们对 KdV 方程的研究兴趣. KdV 方程是可积系统与孤立子理论中的一个基本方程, 通过对它的研究得到了一系列新的数学方法, 得到了许多新的结果, 如守恒律、Hamilton 结构、反散射方法等.

1962 年, Perring 和 Skyrme[5] 在研究基本粒子模型时, 对 Sine-Gordon 方程做了研究, 结果表明, 这个方程具有孤立波, 即使碰撞后两个孤立波也仍保持着原有的形状与速度.

1965 年, Zabusky 和 Kruskal[6] 把 KdV 方程用于等离子体的研究, 利用计算机考察了等离子体中孤立波的互相碰撞过程, 由此进一步证实了孤立波相互作用后不改变波形的结果. 由于这种孤立波是有类似于粒子碰撞后不变的性质, 所以他们将孤立波命名为孤立子. 孤立子一词被广泛应用. 数学中将孤立子理解为非线性演化方程局部化的行波解, 经过相互碰撞后, 波形与速度不改变. 从物理角度上看, 孤立子主要包含以下两点: 一是能量比较集中在一个狭小的区域; 二是两个孤立子相互碰撞后不改变波形和速度. 20 世纪 70 年代后, 孤立子的研究取得了迅速发展, 在数学上发现了大量具有孤立子解的非线性发展方程, 也建立了系统的研究方法, 国内外在这方面已出版很多专著[7−15]. 孤立子理论既包括数学理论, 也包括了物理理论. 正如 1984 年, 美国数学科学基金来源特别委员会给美国国家研究委员会的题为 "美国数学的现在与未来" 的报告中提出的: "目前正发生一件振奋人心的大事, 这就是数学与理论物理的重新统一" "看到我们还在进入一个新的时代, 在这个时代中数学和物理之间的界限实际上已经消失了."

1.2 可积系统

可积系统一般分为有限维可积系统与无限维可积系统. 20 世纪 70 年代末, 苏联数学家 Arnold 从辛几何角度叙述了有限维 Hamilton 系统理论中的著名 Liouville-Arnold 定理: 一个自由度为 n 的 Hamilton 系统, 若具有 n 个相互对合的首次积分就是可积的, 即解可用积分表示出来. 其实人们对完全可积的 Hamilton 系统的认识是反反复复的[16]. 早期的经典力学曾找到一些很好的完全可积的力学系统例子, 如 Jacobi 关于椭球面上测地线方程的积分等. 后来人们认识到多数 Hamilton 系统并不完全可积, 且在小扰动下可积性受到破坏, 于是研究就停了下来. 可后来人们发现, 在小扰动下虽然完全可积性被破坏, 但原问题的不变环面的一个大子集保留下来, 组成一个复杂的具有正测度的不变 Cantor 集, 这就是著名的 KAM 理论. 有人进一步证明, 在 Whitney 可微意义下, 扰动系统在 Cantor 集上仍是 Liouville 完全可积的.

寻找和扩充 Liouville 完全可积的有限维 Hamilton 系统很重要, 这不仅是孤立子理论的一个重要研究方向, 而且还是 Newton 力学和 Lagrange 力学等价的描述形式, 这样就使得运动规律性在 Hamilton 形式下表现得最明显. 一切耗散可忽略不计的真实物理过程, 包括经典性的、量子性的、相对论性的、有限和无限自由度等都能表达成 Hamilton 体系. 寻求有限维 Hamilton 系统的关键在于找到对合的守

恒积分. 1975 年 Moses[17] 提出了著名的 Calogero 模型和 Sutherland 模型的完全可积系统. 1989 年, 曹策问[18] 提出了在位势函数和特征函数的适当约束下, Lax 对非线性化产生有限维完全可积系统的重大思想, 其结果表现为 Lax 对的空间部分化为一个有限维完全可积的 Hamilton 系统, 而它的时间部分恰为 N 个对合守恒积分. 曾云波、李翊神发展了非线性化方法, 提出了在位势函数与特征函数高阶约束条件下, 将生成有限维可积 Hamilton 系统的一般方法, 在零曲率方程范围内统一处理了一族有限维 Hamilton 系统的分解[19,20].

无限维可积 Hamilton 系统理论在 20 世纪 60 年代后期取得长足发展[21,22], 由于无限维 Hamilton 系统的对合守恒积分不能完全地将其解表示出来, 因此我们还不完全了解无穷维 Hamilton 系统的完全可积性, 并且对于无限维可积系统的可积性问题也没有一个确切定义. 人们通常采用两种可积定义, 即 Lax 可积与 Liouville 可积. 1981 年, Drinfeld 和 Sokolov 用 Kac-Moody 代数为工具系统地构造了 KdV 方程的 Lax 表示. 1986 年, 谷超豪、胡和生基于曲面论中的基本方程提出了一类方程的可积性准则[23]. 1988 年, 屠规彰[24] 提出了用带约束变分计算孤立子方程族的 Hamilton 结构的方法, 即迹恒等式方法, 马文秀[25] 称其为屠格式. 利用屠格式, 人们得到了一些具有物理背景和丰富数学结构的无限维可积 Hamilton 系统, 如文献 [26],[27].

1.3 方程族的可积耦合

可积系统的 τ 对称代数可视为孤子理论中 Virasoro 代数的实现. 这样的 τ 对称代数及其相应的 Virasoro 代数都是 Lie 代数的半直和, 其中的强对称起着非理想半直和作用[28]. 在研究 Virasoro 代数与遗传算子的关系时, 人们提出了可积耦合问题. 可积耦合的定义可表述如下[29].

对于给定的一个可积系统, 我们构造一个非平凡的微分方程系统, 要求它也是可积的, 并且包含原来的可积系统作为一个子系统. 具体地说, 给定一个演化可积系统[29,30]

$$u_t = K(u). \tag{1-1}$$

我们构造一个新的大可积系统

$$\begin{cases} u_t = K(u), \\ v_t = S(u, v), \end{cases} \tag{1-2}$$

其中向量值函数 S 满足非平凡条件 $\dfrac{\partial S}{\partial [u]} \neq 0$, 而 $[u]$ 表示由 u 及其关于空间变量的导数组成的一个向量, 如 $[u] = (u, u_x, u_{xx}, \cdots)$, x 表示空间变量. 称系统 (1-2) 为

$u_t = K(u)$ 的一个可积耦合. 研究可积耦合不仅能推广对称问题, 而且为可积系统的分类提供了线索.

目前, 寻求可积系统的可积耦合的方法主要有两种: ① 原方程加上它的对称方程; ② 摄动方法. 事实上, 寻找求可积耦合的一个简单方法可在零曲率表示范围中进行. 马文秀和 Fuchssteiner[29] 利用扰动方法给出了寻求一个可积方程的可积耦合的方法, 但这种方法计算起来相当繁杂. 于是在 2002 年, 郭福奎和张玉峰利用方阵李代数提出了生成可积耦合的一类简便方法, 并得到了 AKNS 方程族的一类可积耦合[30], 但利用迹恒等式无法求出该可积耦合的 Hamilton 结构. 关于方程族的扩展可积模型的 Hamilton 结构, 郭福奎和张玉峰提出的二次型恒等式[31] 及广义的屠格式[32]、马文秀提出的变分恒等式[33] 都是迹恒等式的推广, 是寻求可积耦合的 Hamilton 结构的强有力工具, 并由此成功获得了一大批扩展可积模型的 Hamilton 结构. 最近楼森岳教授获得了一个具有广泛物理意义的可积耦合模型 (2013 年潍坊论坛 —— 留数对称及其局域化和群不变解), 为可积耦合这一方向的研究提供了应用背景.

第 2 章　可积系统与耦合系统的相关概念

2.1　相 关 定 义

定义 2.1　设 $p_i, q_i(i = 1, \cdots, n)$ 是力学系统的广义坐标和广义动量. 例如, 存在 Hamilton 函数 $H = H(p_i, q_i)$, 使 p_i, q_i 的演化满足以下方程

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{2-1}$$

引进泊松 (Poisson) 括号

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}\right), \tag{2-2}$$

则方程 (2-1) 可改写为

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad \dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{p}_i = \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}, \tag{2-3}$$

而且 p_i, q_i 满足以下基本关系式:

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \tag{2-4}$$

再引进泊松括号, 且 p_i, q_i 满足式 (2-4) 时, 方程 (2-1) 称为 Hamilton 系统. p_i, q_i 也称为动力学变量.

定义 2.2　如果存在 $I = I(p_i, q_i)$, 使得当 p_i, q_i 是方程 (2-1) 的解时, 有 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$, 则称 I 是系统 (2-1) 的一个守恒量.

如果两个互相独立的守恒量 I_1, I_2 满足 $\{I_1, I_2\} = 0$, 则称 I_1, I_2 是对合的.

定义 2.3　如果 Hamilton 系统 (2-1) 存在 n 个互相独立的守恒量 $I_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$, 它们两两对合, 则称系统 (2-1) 是在 Liouville 意义下的可积系统.

定义 2.4　设非线性演化方程

$$u_t = K(u), \tag{2-5}$$

这里 $K(u) = K(x, t, u, u_x, u_{xx}, \cdots)$. 如果 $u(x, t)$ 是方程 (2-5) 的解, 而函数 $\sigma = \sigma(u)$ 满足以下线性方程 (这里 $\sigma(u)$ 可能也包含变量 x, t):

$$\sigma_t = K'\sigma,$$

则称 $\sigma(u)$ 是方程 (2-5) 的对称. K' 是函数 K 在 u 点处沿 σ 方向的 Gâteaux 导数.

定义 2.5　如果一个算子 φ, 它将方程 $u_t = K(u)$ 的对称 σ 变为对称, 即若 $\sigma_t = K'\sigma$, 有 $(\phi\sigma)_t = K'(\phi\sigma)$, 则称算子 φ 是这个方程的强对称算子.

设 S 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的 Schwartz 空间, $S^p = S \otimes \cdots \otimes S$, 且

$$u(x,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_p(x,t))^{\mathrm{T}} \in S^p, \quad x, t \in \mathbf{R}.$$

定义 2.6　对 $\forall f, g \in S^p$, 定义它们的内积为

$$(f,g) = \int fg\mathrm{d}x = \int \sum_{i=1}^{p} f_i g_i \mathrm{d}x.$$

定义 2.7[34]　一个线性算子 J 称为 Hamilton 算子或辛算子, 如果 J 满足以下条件:

(1) $J* = -J$, 即 $(Jf, g) = -(f, Jg)$, 对 $\forall f, g \in S^p$;

(2) $(J'(u)[Jf]g, h) + (J'(u)[Jg]g, f) + (J'(u)[Jh]f, g) = 0$, 即 Jacobi 恒等式成立, 其中 $J'(u)[f] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} J(u + \varepsilon f)|_{\varepsilon=0}$ 为 Gâteaux 导数.

定义 2.8　如果线性算子 J 为 Hamilton 算子, 定义 Poisson 括号如下

$$\{f, g\} = \left(\frac{\delta f}{\delta u}, \frac{\delta g}{\delta u}\right), \tag{2-6}$$

若 $\{f, g\} = 0$, 则称 f, g 为对合的, 且

$$u_t = J\frac{\delta H}{\delta u} \tag{2-7}$$

为广义的 Hamilton 方程, H 为 Hamilton 函数, 变分导数 $\dfrac{\delta}{\delta u} = \left(\dfrac{\delta}{\delta u_1}, \cdots, \dfrac{\delta f}{\delta u_p}\right)^{\mathrm{T}}$, 其中

$$\frac{\delta}{\delta u_i} = \sum_{i=0,1,2,\cdots} (-\partial)^n \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}, \quad \partial = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \quad u_i^{(n)} = \partial^n u_i.$$

对于线性问题

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \psi_t = M\psi,$$

其中 L, M 为 $n \times n$ 矩阵, ψ 为 n 维向量. 由相容性条件可得 Lax 方程

$$L_t + [L, M] = 0. \tag{2-8}$$

而对于线性问题

$$\psi_x = U\psi, \quad \psi_t = V\psi,$$

其中 U, V 为 $n\times n$ 矩阵, ψ 为 n 维向量. 由其相容性条件可得零曲率方程

$$U_t - V_x + [U, V] = 0. \tag{2-9}$$

若方程 (2-5)

$$u_t = K(u)$$

可以表示为 Lax 方程 (2-8) 或零曲率方程 (2-9), 则称它为 Lax 可积的; 若方程 (2-5) 可以写成广义 Hamilton 方程 (2-7), 且存在可列个两两对合的守恒密度, 则称方程 (2-5) 为 Liouville 可积的.

定理 2.1[34] 设 J, L 为 S^p 上的两个算子, 并且满足

(1) $J^* = -J$, $JL = L^*J$;

(2) 对于 $f(u)\in S^p$, 存在一系列函数 $\{H_n\}$ 满足

$$\{H_m, H_n\} = \{H_n, H_m\}, \quad L^n f(u) = \frac{\delta H_n}{\delta u},$$

则 $\{H_n\}$ 为发展方程族 $u_t = L^n f(u) = \dfrac{\delta H_n}{\delta u}$ 的公共守恒密度且彼此对合.

定义 2.9 对于给定的可积族 $u_t = K(u)$, 如果

$$\begin{cases} u_t = K(u), \\ v_t = S(u, v), \end{cases} \tag{2-10}$$

仍然是一个可积系统, 则称系统 (2-10) 是 $u_t = K(u)$ 的一个可积耦合.

2.2 谱问题的代数化

定义 2.10 设 G 是一个非空集合, 满足

(1) G 是一个群;

(2) G 也是一个微分流形;

(3) 群的运算是可微的, 即由 $G\times G$ 到 G 的映射 $(g_1, g_2)\mapsto g_1g_2^{-1}$ 是可微映射, 则称 G 是一个李群 (Lie group).

定义 2.11 李群 G 和 G' 称为是同构的, 若存在映射 φ: $G_1\to G_2$ 使得

(1) φ 是群 G 到 G' 上的同构映射;

(2) φ 是流形 G 到 G' 上的微分同胚 (diffeomorphism),

映射 φ 称为 G 到 G' 上的 (李群的) 同构映射.

定义 2.12 设 $\hbar$ 是域 F 上的线性空间, 且 $\hbar$ 中有二元运算 $\hbar\otimes\hbar\to\hbar$, $(x, y)\to[x, y]$(通常称为换位运算或括积) 满足下列三个条件:

(1) $[ax+by, z] = a[x, z] + b[y, z]$;

(2) $[x,y]=-[y,x], \forall x,y\in \hbar$;

(3) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0, \forall x,y,z\in \hbar$,

则称 $\hbar$ 为域 F 上的李代数 (Lie algebra). 定义中条件 (3) 称为 Jacobi 恒等式.

定义 2.13　设 $\hbar$ 是域 F 上的 n 维李代数, $\hbar$ 上的二元函数

$$(x,y)=\mathrm{tr}(adx\ ady)$$

称为 $\hbar$ 的 Killing 型.

定义 2.14　设 G 为复数域 $\mathbf{C}$ 上的李代数, 若 $\forall x,y\in G$, 都有 $[x,y]=0$, 则称 G 为可交换的李代数.

定义 2.15　若 $\forall G_1\in G$, 有 $[G_1,G_1]\subset G_1$, 则称 G_1 为 G 的一个子代数, $[G_1,G]\subset G_1$, 则称 G_1 为 G 的理想.

定义 2.16　若 G 中不含非平凡不可交换的理想 G_1, 则称 G 为单李代数. 若 G 可分解成单李代数 G_i 的直和, 即 $G=G_1\oplus\cdots\oplus G_n$, 且每个 G_i 为 G 的理想, 则称 G 为半单李代数.

定义 2.17　若 G 为半单李代数矩阵, 则 Killing-Cartan 形 $\langle x,y\rangle$ 与迹 $\mathrm{tr}\langle x,y\rangle$ 之比为常数, 所以可记 $\langle x,y\rangle=\mathrm{tr}\langle x,y\rangle, \forall x,y\in G$.

设 G 为 C 上有限维的李代数, $\widetilde{G}$ 为其相应的 loop 代数, $\widetilde{G}=G\otimes C[\lambda,\lambda^{-1}]$, 其中 $C[\lambda,\lambda^{-1}]=\left\{\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}c_k\lambda^k\middle|c_k\in\mathbf{C}\right\}$ 为 $\mathbf{C}$ 上关于 λ 的 Laurent 多项式全体. 若 $\{e_1,\cdots,e_p\}$ 为 G 的一组基, 则 $\{e_1(n),\cdots,e_p(n)\,|n\in\mathbf{Z}\}$ 构成 $\widetilde{G}$ 的一组基, 其中 $e_i(n)=e_i\otimes\lambda^n=e_i\lambda^n$.

定义 2.18[34]　称 $R\in\widetilde{G}$ 为伪正则元, 如果对 $\mathrm{Ker}\ ad\ R=\{x|x\in\widetilde{G},[x,R]=0\}$, $\mathrm{Im}\ ad\ R=\{x\,|\exists y\in\widetilde{G}$, 使得 $x=[y,R]\}$, 满足

(1) $\widetilde{G}=\mathrm{Ker}\ ad\ R\oplus\mathrm{Im}\ ad\ R$,

(2) $\mathrm{Ker}\ ad\ R$ 为可交换的,

对于 $e\otimes\lambda^n\in\widetilde{G}$, 定义其阶数为 $\deg(e\otimes\lambda^n)=n$.

考虑等谱问题

$$\psi_x=U(u,\lambda)\psi, \tag{2-11}$$

设

$$U=e_0(\lambda)+u_1e_1(\lambda)+\cdots+u_pe_p(\lambda)\in\widetilde{G},$$

其中

$$u=(u_1,\cdots,u_p)\in S^p,\quad e_0(\lambda),\cdots,e_p(\lambda)\in\widetilde{G},$$

且满足