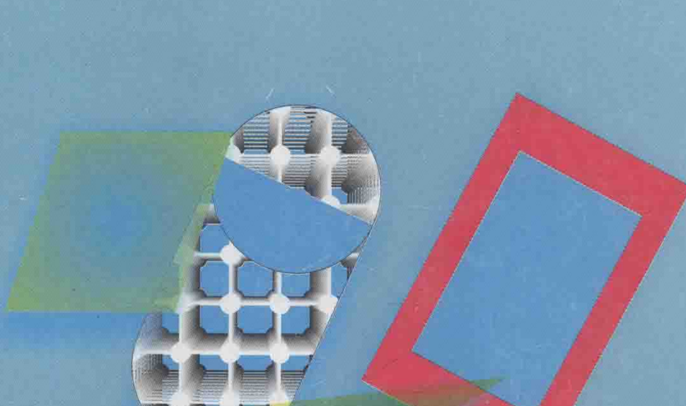
李鸿禄 编著

高维欧氏几何学



能出版

高维欧氏几何学

李鸿禄　编著

原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

高维欧氏几何学/李洪錄编著．—北京：原子能出版社，1996

ISBN 7-5022-1593-X

Ⅰ．高… Ⅱ．李… Ⅲ．多维空间几何-概论 Ⅳ．O184

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 13940 号

内 容 简 介

本书由斜轴变换、斜轴画法和高维空间解析几何三部分组成，共九章：奇异线性变换所确定的关系及其性质；"关系"法与特定 n 维坐标系；特定 n 维系中图形与数字间的关系；特定 n 维系中图形的形状；特定 n 维系中图形的制作；两线性图形间的交错与距离；两线性图形间夹角问题及其线性解法；两线性图形间夹角问题的简氏解法；高维欧氏几何学的应用。本书是一部基于(但又有别于)线性代数中关于欧氏空间理论的真正意义上的高维欧氏空间解析几何学的专著。

本书对高校有关专业师生以及从事运筹学和图学理论的研究人员均有参考价值。

原子能出版社出版发行

社址：北京市海淀区阜成路 43 号　邮政编码：100037

原子能出版社印刷厂印刷　新华书店经销

北京海淀图书城九章数学书店代理

开本：787×1092 mm 1/32　印张 7.75　字数 180 千字

1996 年 9 月北京第 1 版　2003 年 4 月北京第 3 次印刷

印数：3501—3650

定价：13.50 元

序

《高维欧氏几何学》是作者 17 年努力的成果。在这段时间里,他一边自学、一边研究,所取得的结果反映在本书中。

本书由“斜轴变换”、“斜轴画法”和高维空间解析几何三部分内容所组成。

“斜轴变换”(作者还把它称为“关系”法)是全书的理论基础。它是在奇异线性变换所确定的象与象源之间关系的基础上,所形成的另一种线性变换。本书对奇异线性变换下象与象源间关系的有关概念、性质及运算规律进行了较为深入的研究,克服了应用“关系”法时所遇到的障碍。

“斜轴画法”是全书的基本方法。在利用斜轴变换建立特定 n 维坐标系(n 维空间直角坐标系的一种模拟图形)的基础上,本书提出了研究这种坐标系下图形与相应代数方程之间关系的方法。其中包括三种图示法(直接图示法、间接图示法、一般图示法)这一核心内容,它概括了特定 n 维坐标系的全部图示规则:对任意一个图形的图示原理、图示方法及对被图示对象的识别方法等。此外,还包括点共泛理论、维数定理以及截痕法、引轴法、综合图示法。所有这些为初步形成一套较为系统的,结构合理、方便实用的新颖图学理论体系作了有益的探讨。这种图示法好学易记,具有工科大学线性代数基础的读者很容易掌握。

高维空间解析几何是高维欧氏几何学的主体。斜轴画法将三维空间有关的概念很自然地推广到高维空间,便于初学者理解掌握。而斜轴变换又以点的重合问题作为突破口,使高维空间的大量几何问题迎刃而解。

阅读过本书的读者会发现，尽管线性代数中已有诸如欧氏空间、向量、坐标等几何概念，但是要用线性代数的方法处理高维几何的问题，还要引入另一些几何概念。在本书中，作者在讨论非齐次线性方程组所表示的图形，与对应齐次线性方程组所表示图形之间的关系时，引入了所谓顺空间、法空间以及顺向量、法向量、公矢和非公矢等概念，上述术语有的是作者本人定义的，有的与通行的不尽一致，请读者阅读时注意。

为解决线性图形间的距离问题，作者还引进了"外和"的概念，并讨论了它的性质及方程，把线性代数中有关子空间的一些概念与性质推广到一般的线性图形。在解决线性图形之间夹角问题时，作者提出并解决了夹角数量及解的非唯一性这两个问题。还用线性代数理论介绍了简氏解法，并将其进一步推广应用于解决任意两个线性图形间夹角的问题。同时还把三维空间中向量"外积"(又称叉积或矢积)的概念推广到多维空间，提出了向量正交化以及解线性方程组的另一种方法。

本书作者用线性代数方法对图学理论所进行的有益探讨，想来会引起有关人士的兴趣和注意。

沈以淡　北京理工大学
侯秉涛　北京装甲兵工程学院
潘建中　中科院数学所

一九九六年七月

目　　录

第一章　奇异线性变换[1]所确定的关系及其性质

画法几何和高维空间解析几何的研究，通常采用线性变换的方法。本书介绍一种“关系”法，即直接运用线性变换下像与像源之间的关系来处理有关问题。由于在一定条件下，“关系”中的元素可以直接参加运算，所以“关系”法具有方便、直观等优点，这样，我们就可以解决过去使用普通线性变换方法所不能直接处理的许多问题，使这一方法成为本书的重要理论基础。

在北京装甲兵工程学院侯秉涛教授的耐心指导和亲自参与下，作者对奇异线性变换下像与像源之间的关系的有关性质及运算规律进行了深入探讨。除定理3、6、10、11外，本章其余7个定理及两个推论均经过侯教授亲自严密科学的证明，其中定理4、5、8及两个推论由侯教授重新提出。

§1 奇异线性变换下像与像源间的关系和性质

1.1　“关系”的概念

很多人习惯于在相等的关系下进行运算，而对于那些不相等的关系，不少人也只是习惯那些“大于”或“小于”的关系。更有甚者，人们常常将一些不等关系设法化为相等的关系(即如本书第2页中将要讨论的奇异线性变换下像与像源间的关系)，因而抹杀了不同事物之间那种生动活泼的差异，无形中给接下来的运算设置了可怕的障碍，使某些研究工作几乎陷入长期停顿的状态。事实上，各种事物之间的关系是十分复杂的、五花八门的。例如人们熟知的几何中的“平行”、“垂直”、“相似”等等。

下面介绍一种含义更为广泛的“关系”，这种广义的“关系”的“表示式”在一些特殊情况下可以直接进行加法和数乘运算。

在离散数学[2]中，$a_1\in A_1, a_2\in A_2, \cdots, a_n\in A_n$ 被看作是任意的集合，所有的 n 元有序组 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle$ 所组成的集合被称作 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的笛卡尔积，用 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 表示，即

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle \mid a_i\in A_i。 i=1,2,\cdots,n\}。$$

笛卡尔积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$

的任意一个子集称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 上的一个 n 元关系。

例如，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 可以分别是看作所有直线的集合，所有

$$\langle a_1 /\!/ a_2 /\!/ \cdots /\!/ a_n\rangle$$

(即 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 间两两平行，$a_i\in A_i$。$i=1,2,\cdots,n$)的集合是笛卡尔积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的一个子集，称作 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 上的 n 元平行关系；而所有 $\langle a_1\perp a_2\perp\cdots\perp a_n\rangle$

(即 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 间两两垂直，$a_i\in A_i$。$i=1,2,\cdots,n$)的集合也是 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的一个子集，称作 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 上的 n 元垂直关系。

一个重要的特殊情形是 $n=2$，当一个序偶集 σ 是

$$A_1\times A_2=\{\langle a_1, a_2\rangle \mid a_1\in A_1, a_2\in A_2\}$$

的一个子集时，σ 被称为由 A_1 到 A_2 的一个二元关系，本书中所谈及的“关系”即属于这种二元关系。

若σ是A_1到A_2的一个关系，且$\langle a_1, a_2\rangle\in\sigma(a_1\in A_1, a_2\in A_2)$，

则称 a_1 对 a_2 有关系 σ，记为 $a_1 \overset{\sigma}{—} a_2$。

这种用来表达 a_1 对 a_2 间的关系的公式，我们称其为“关系表达式”，简称为“关系式”。

1.2 奇异线性变换下像与像源间的关系

设 V_n 是实数域 R 上的线性空间，σ 为 V_n中的奇异线性变

换，对于任意的 $\alpha\in V_n$，称 $\sigma(\alpha)=\alpha'$ 为 α 的像，而称 α 为 α' 的一个像源。与此同时，称 $\sigma(V_n)=V_n'$ 为像集，而称 V_n 为像源集。

设 σ 为线性空间 V_n 中的奇异线性变换，$\alpha\in V_n$，$\alpha'\in V_n'$，若

$$\sigma(\alpha)=\alpha',$$

则 $\sigma\subset V_n\times V_n'$，即 σ 是 $V_n\times V_n'$ 的一个子集，因此说 σ 是 V_n 到 V_n' 的一个二元关系，且 $\langle\alpha,\alpha'\rangle\in\sigma$，称 α 对 α' 有关系 σ，记作

$$\alpha \overset{\sigma}{-} \alpha',$$

若

$$\sigma(\alpha)\neq\alpha',$$

则 $\langle\alpha,\alpha'\rangle\notin\sigma$，记作

$$\alpha \overset{\sigma}{\not-} \alpha'。$$

1.3　奇异线性变换下像与像源间的关系的性质

定理 1　奇异线性变换 σ 下，关系 σ 不是自反的。

证：若 $\forall\ \alpha\in V_n$，有 $\alpha \overset{\sigma}{-} \alpha$，则 σ 为恒等变换，这与 σ 的奇异性相矛盾，故关系 σ 不具有自反性。 ▌

（注：结尾符号“▌”表示证明完毕。以下同）。

定理 2　奇异线性变换 σ 下，关系 σ 不是对称的。

证：设 A 为 σ 对基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的矩阵，则 A^2 是 σ^2 的矩阵。

假若关系 σ 具有对称性，即 $\forall\ \alpha,\beta\in V_n$，因

$$\sigma(\alpha)=\beta, \text{且 } \sigma(\beta)=\alpha,$$

故有

$$\sigma[\sigma(\alpha)]=\alpha$$

即 σ^2 为一恒等变换，于是　$A^2=I$，

I 为 n 阶单位阵，这与 A 的秩 $r<n$ 相矛盾，故关系 σ 不具有对称性。 ▌

定理 3　奇异线性变换 σ 下，关系 σ 不是可传递的。

证：假若关系 σ 具有可传递性，即 $\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in V_n$，因

$$\sigma(\alpha)=\beta,\ \sigma(\beta)=\gamma,\ \sigma(\alpha)=\gamma,$$

故有 $$\sigma[\sigma(\alpha)]=\sigma(\alpha),$$
亦即 $$\sigma(\alpha)=\alpha \quad (\sigma\text{ 可以有广义逆}^{[3]}),$$
因此又有 $$\sigma[\sigma(\alpha)]=\alpha,$$
但由定理 1 和定理 2,σ 和 σ^2 均非恒等变换,因此,关系 σ 不具有可传递性。 ▮

§2 关系 σ 中元素的运算规律

2.1 线性运算规律

定理 4 若 $\alpha_1 \overset{\sigma}{—} \alpha_1'$,$\alpha_2 \overset{\sigma}{—} \alpha_2'$,则对于任意实数 k_1,k_2,有
$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2 \overset{\sigma}{—} k_1\alpha_1'+k_2\alpha_2'。$$

证:因为 $$\sigma(\alpha_1)=\alpha_1',\ \sigma(\alpha_2)=\alpha_2',$$
所以 $$\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)=k_1\alpha_1'+k_2\alpha_2',$$
故 $$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2 \overset{\sigma}{—} k_1\alpha_1'+k_2\alpha_2'。$$ ▮

2.2 移项规律

定义 1 若 $\alpha \overset{\sigma}{—} \alpha$,则称 α 为关系 σ 中的自反元。

设 λ 是一个文字,A 是 $n\times n$ 矩阵,则称 $\lambda I-A$(I 为 n 阶单位矩阵)为 A 的特征矩阵。特征矩阵的行列式为特征多项式,特征多项式的根称为A的特征根。但当A是秩为r的$n\times r$或$r\times n$矩阵时,则 I 为主对角线上的元为 1,其余所有元均为零的与 A 行列相同的矩阵,其特征矩阵经初等变换可化为对角矩阵,主对角线上的元包含了关于 λ 的一次方幂 $\lambda-\lambda_0$(或关于 λ 的多项式,它可分解为不同或相同的 $\lambda-\lambda_0$ 间的乘积),所有的 $\lambda=\lambda_0$(相同的按出现的次数计算)亦为所求的 A 的特征根。

设λ_0是A的一个特征根,$\alpha=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是一非零向

量，若
$$A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\lambda_0\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},$$
则 α 称作 A 的属于特征根 λ_0 的一个特征向量。

定理 5 设 A 为 V_n 中奇异线性变换 σ 对基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的矩阵，则 V_n 中任一元： $\alpha=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$ 为关系σ中非零自反元的充分必要条件是：A的转置矩阵A'具有特征根 $\lambda_0=1$，且 α 为 A' 对应于特征根 $\lambda_0=1$ 的一个特征向量。

证： 因为
$$\alpha=(x_1x_2\cdots x_n)\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{e}_2\\\vdots\\\boldsymbol{e}_n\end{bmatrix},$$
且
$$\sigma(\alpha)=\alpha,$$
故
$$\sigma(\alpha)=(x_1x_2\cdots x_n)\sigma\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{e}_2\\\vdots\\\boldsymbol{e}_n\end{bmatrix}=$$
$$=(x_1x_2\cdots x_n)A\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{e}_2\\\vdots\\\boldsymbol{e}_n\end{bmatrix}=(x_1x_2\cdots x_n)\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\\boldsymbol{e}_2\\\vdots\\\boldsymbol{e}_n\end{bmatrix},$$
即
$$(x_1x_2\cdots x_n)A=(x_1x_2\cdots x_n),$$
转置得
$$A'\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\text{（必要性）；}$$

反之，因 $$(x_1x_2\cdots x_n)A=(x_1x_2\cdots x_n),$$

且 $$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n,$$

故 $$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=(x_1x_2\cdots x_n)A\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n\end{bmatrix}=(x_1x_2\cdots x_n)\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n\end{bmatrix},$$

即 $$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}\quad(\text{充分性})。$$ ∎

由定理 4 可推知，自反元的一切线性组合仍为自反元。

定理 6 当奇异线性变换 σ 的矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n-r,1} & c_{n-r,2} & \cdots & c_{n-r,r}\end{bmatrix}$$

时，则在 M 的转置矩阵 M' 的属于 $\lambda_0=1$ 的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$$

中， $$x_{r+1}=x_{r+2}=\cdots=x_n=0,$$

亦即 $$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{e}_r。$$

证： 因 $(x_1x_2\cdots x_n)A=(x_1x_2\cdots x_n)M=(x_1x_2\cdots x_n)$，

转置得 $$M'\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & & & c_{11} & \cdots & c_{n-r,1}\\ & 1 & & & c_{12} & \cdots & c_{n-r,2}\\ & & \ddots & & \cdots & \cdots & \cdots\\ & & & 1 & c_{1r} & \cdots & c_{n-r,r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} x_1+c_{11}x_{r+1}+\cdots+c_{n-r,1}x_n \\ x_2+c_{12}x_{r+1}+\cdots+c_{n-r,2}x_n \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ x_r+c_{1r}x_{r+1}+\cdots+c_{n-r,r}x_n \\ 0\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad 0 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ 0\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

因此得 $$x_{r+1}=x_{r+2}=\cdots=x_n=0\,,$$

即 $$\alpha=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{e}_r$$ ▌

由定理六，当奇异线性变换 σ 的矩阵为 M 时，则 M 的任意行向量均为 σ 中的自反元。

由于矩阵 A 的转置矩阵中不一定有特征根 $\lambda_0=1$，即使有特征根 $\lambda_0=1$，也不是很方便地就能求出。所以在实际运用中一般均直接使用矩阵 M 而不使用 A 的形式，或者是虽使用了矩阵 A 的形式，但由于在一定条件下 $A=M\cdot N$，所以最终也要通过 $M=A\cdot N^{-1}$ 而将其化为 M 的形式(见本章后面 § 3 中例 2)。

定理 7 设 $$\alpha\overset{\sigma}{—}\alpha_1'+\alpha_2',$$

则 $$\alpha-\alpha_1'\overset{\sigma}{—}\alpha_2'$$

的充分必要条件是 α_1' 为自反元。

证：因为 $\sigma(\alpha-\alpha_1')=\sigma(\alpha)-\sigma(\alpha_1')=\alpha_1'+\alpha_2'-\sigma(\alpha_1')$，所以，$\sigma(\alpha-\alpha_1')=\alpha_2'$ 的充分必要条件是，$\sigma(\alpha_1')=\alpha_1'$，即 α_1' 为自反元。 ▌

推论 设 $\alpha_1+\alpha_2\overset{\sigma}{—}\beta$，则 $\alpha_2\overset{\sigma}{—}\beta-\alpha_1$ 的充分必要条件是

α_1 为自反元 。 ∎

2.3　元素对调规律

定义 2　如果　$\alpha \overset{\sigma}{—} \beta$,且 $\beta \overset{\sigma}{—} \alpha$,
则称 α 与 β 为关系 σ 中的对称元。

定理 8　设 A 为 V_n 中奇异线性变换 σ 对基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的矩阵,则 V_n 中任意 α 与 β 为对称元的充分必要条件是:A^2 的转置 $(A^2)'$ 具有特征根 $\lambda_0 = 1$,且 α 与 β 均为 $(A^2)'$ 的对应于特征根 $\lambda_0 = 1$ 的特征向量。

证:必要性

因为
$$\alpha = (x_1 x_2 \cdots x_n)\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix},$$

故
$$\sigma(\alpha) = (x_1 x_2 \cdots x_n) A \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix},$$

设
$$\beta = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \cdots + k_n e_n$$

则
$$\sigma(\beta) = (k_1 k_2 \cdots k_n) A \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix},$$

由 $\sigma(\alpha) = \beta$,　得 $(x_1 x_2 \cdots x_n) A = (k_1 k_2 \cdots k_n)$　　(1)

由 $\sigma(\beta) = \alpha$,　得 $(k_1 k_2 \cdots k_n) A = (x_1 x_2 \cdots x_n)$　　(2)