数学物理方法
习题解答

东北师范大学函授教育处

东北师范大学物理函授教材

数学物理方法
习题解答

李佐锋 编

东北师范大学函授教育处

1983．5．长春

编 者 的 话

这本《习题解答》是为配合陈任昭、黄德民二位同志编的东北师范大学函授教材《数学物理方法》一书编写的。目的在于帮助函授生学习这门课程中做习题时克服一些困难。

需要指出的是，这本小册子并非所谓“标准解答”。也就是说，和“标准解答”比较，有两个不同的特点：一是在解题的思路、方法上，有些地方多说了几句；二是只单纯涉及数学分析等基础课方面的比较繁的基本运算，并且学员费些气力就能做出的，一般都予以省略。这样，既能突出解题关键和技巧，使步骤清楚，适合函授特点，又能尽量减少篇幅。

另外，在每一章的开头都简略地列出了常用的定理，公式以及解法，供学员在解题时参考。为了满足部份有余力的学员学习上的进一步需要，选解了部份较难的题目，并且都打了“*”号。

本解答编出后，曾在本校物理系函授试用了两次，根据函授生提出的有益意见，这次印刷前又作了不少修订。修改稿曾由陈任昭、黄德民二位同志分别审阅了前五章和后四章，并提出过宝贵意见。对此谨表示衷心感谢。

由于编者水平所限，问题和错误在所难免，希望读者指正，以便有机会重印时作进一步修改。

编 者

1983年4月

目　录

第一章 （复变函数）习题解答

§1 常用定理和公式

1．复数的三种表示法：

a)代数式 $z=x+iy$． (1.1)[*]

b)三角式 $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$． (1.10)

c)指数式 $z=\rho e^{i\varphi}$． (1.14)

2．两个复数 $z=x+iy$ 和 $z'=x'+iy'$ 相等的充分必要条件是 $x=x'$，$y=y'$．

3．几个初等函数的定义式：

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}). \tag{2.13}$$

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}). \tag{2.14}$$

$$\mathrm{sh}z=\frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}). \tag{2.16}$$

$$\mathrm{ch}z=\frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}). \tag{2.17}$$

$$\ln z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}z. \tag{2.21}$$

4．柯西——黎曼条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3.5}$$

它的极座标形式为：

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial \rho}. \tag{3.6}$$

---

* 公式的编码与讲义一致，下同。

§2 习题解答

1．求下列复数的实部，虚部，模与主辐角：

（1）$3i$和3；（2）$1+i$和$1-i$；

（3）$\dfrac{1-i}{1+i}$；（4）$\sqrt{1+i}$．

解（1）中所给的两个复数可以写成

$$3i=0+i\cdot 3, \qquad 3=3+i\cdot 0,$$

由定义，则有

$Re(3i)=0$，$\qquad I_m(3i)=3$，从而有

$$|3i|=\sqrt{0^2+3^2}=3, \ \arg(3i)=\operatorname{arctg}\frac{3}{0}=\frac{\pi}{2}.$$

同理有

$Re(3)=3$，$I_m(3)=0$，$|3|=\sqrt{3^2+0^2}=3$，

$\arg(3)=\operatorname{arctg}\dfrac{0}{3}=0$．

（2）由（1）题的做法，有

$Re(1+i)=1$，$\qquad Re(1-i)=1$，

$I_m(1+i)=1$，$\qquad I_m(1-i)=-1$，

于是得

$$|1+i|=\sqrt{2}, \qquad |1-i|=\sqrt{2},$$

$\arg(1+i)=\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{4}$，

$\arg(1-i)=\operatorname{arctg}(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$．

（3）首先化成代数式．

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i-1}{2}=-i.$$

显然，$Re(-i)=0$，$I_m(-i)=-1$，故

$$|-i|=1, \quad \arg(-i)=\operatorname{arctg}\frac{-1}{0}=-\frac{\pi}{2}.$$

（4）由（2）题知$Re(1+i)=I_m(1+i)=1$，$|1+i|=\sqrt{2}$，$\varphi=\arg(1+i)=\pi/4$，由公式(1.22)，

$$\sqrt{1+i}=\sqrt{|1+i|}e^{i\frac{\arg(1+i)+2k\pi}{2}}$$

$$=\sqrt[4]{2}e^{i\frac{8}{8k+1}\pi} \quad (k=0, 1).$$

故知为双值，其模为$\sqrt[4]{2}$，主辐角为$(8k+1)\pi/8$($k=0$，1)。把指数式化为三角式即知实部和虚部分别为

$$\sqrt[4]{2}\cos\frac{8k+1}{8}\pi\text{和}\sqrt[4]{2}\sin\frac{8k+1}{8}\pi \quad (k=0, 1).$$

2．把下列复数表示为三角式和指数式：

（1）-1；　　　　　（2）i；

（3）z^3；　　　　　（4）$1+i\sqrt{3}$。

解　由三角式和指数式的定义，只须求出所求复数的模和辐角。

（1）由于$Re(-1)=-1$，$I_m(-1)=0$，故有

$$|-1|=1, \quad \arg(-1)=\operatorname{arctg}\frac{0}{-1}=\pi.$$

于是得三角式和指数式分别为

$$\cos\pi+i\sin\pi \quad \text{和} \quad e^{i\pi}.$$

（2）　$R_e(i)=0$，$I_m(i)=1$，故有

$$|i|=1, \quad \arg(i)=\operatorname{arctg}\frac{1}{0}=\frac{\pi}{2}.$$

于是得到三角式和指数式分别为

$$\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \quad 和 \quad e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

（3） 由于z可表为指数式，所以不妨设$z=\rho e^{i\varphi}$，其中$\rho=|z|$，$\varphi=\arg z$。于是由z的乘方定义直接得到指数式为

$$z^3=\rho^3 e^{i3\varphi}.$$

从而有三角式$z^3=\rho^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)$。

（4） $Re(1+i\sqrt{3})=1$，$I_m(1+i\sqrt{3})=\sqrt{3}$，故 $|1+i\sqrt{3}|=2$，$\arg(1+i\sqrt{3})=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$，

于是得到三角式和指数式分别为

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad 和 \quad 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

3．下列各式确定复平面上的何种图形？

（1） $|z|\leqslant 2$；（2） $|z-\alpha|=|z-\beta|$（α，β为复常数）；（3） $R_1<|z-i|<R_2$。

解 这类问题通常是用$z=x+iy$代替式中的z，而后求解。 （1）以$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$，代入式中，则有

$$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 2.$$

对不等式乘方，便有 $x^2+y^2\leqslant 4$。

可见，这是一个以原点为心，2为半径的圆周及其内部。

（2） 设$z=x+iy$，$\alpha=a_1+ia_2$，$\beta=b_1+ib_2$，则由于

$$|z-\alpha|=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2},$$
$$|z-\beta|=\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2},$$

推得　　$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}=\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2}$，

平方并整理，得

$$y=-\frac{a_1-b_1}{a_2-b_2}\left(x-\frac{a_1+b_1}{2}\right)+\frac{a_2+b_2}{2}.$$

这是一条过点$P\left(\frac{a_1+b_1}{2},\ \frac{a_2+b_2}{2}\right)$，斜率为$-\frac{a_1-b_1}{a_2-b_2}$的直线。

注意到点α，β的座标分别为$(a_1,\ a_2)$，$(b_1,\ b_2)$，可知α和β的连线方程的斜率恰好是$(a_2-b_2)/(a_1-b_1)$．于是两条直线的斜率互为负倒数，并且点α和β连线中点恰为P点，从而得知原式表示连接点α和β的线段的垂直平分线。

（3）　设$z=x+iy$，则$z-i=x+i(y-1)$，故

$$|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}.$$

于是有　　$R_1<\sqrt{x^2+(y-1)^2}<R_2$，

即　　$R_1^2<x^2+(y-1)^2<R_2^2$.

可见，这是一个同心圆环域，中心在(0，1)，内半径为R_1，外半径为R_2，但不含内外边界。

4．试问当x和y等于什么数值（实数值）时，等式

$$\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$$

成立？

解　原式为$x+1+i(y-3)=(1+i)(5+3i)$，

即得　　$(x+1)+i(y-3)=2+8i$.

由复数相等的定义，便有　　$x+1=2$，　$y-3=8$，

推得$x=1$，$y=11$.

5．试证明：

(1) $\ln(-1)=i(2n+1)\pi$； (2) $\cos(ix)=\operatorname{ch}x$；

(3) $\operatorname{ch}(ix)=\cos x$。

证 (1) 由$\ln z$的定义，有

$$\ln(-1)=\ln|-1|+i\operatorname{Arg}(-1)$$
$$=i\operatorname{Arg}(-1)=i(\varphi+2n\pi),$$

又由其中 $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{0}{-1}=\pi$，代入上式，得

$$\ln(-1)=i(2n+1)\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

(2) 由$\cos z$及$\operatorname{ch}z$的定义式得

$$\cos(ix)=\frac{1}{2}(e^{i(ix)}+e^{-i(ix)})$$
$$=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^{x})=\operatorname{ch}x.$$

(3) 同(2)，有

$$\operatorname{ch}(ix)=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$$
$$=\frac{1}{2}(\cos x+i\sin x+\cos x-i\sin x)$$
$$=\cos x.$$

6．试解方程：

(1) $z^4+a^4=0$ （实数$a>0$）；(2) $\sin z=2$。

解 (1) 注意到复数的指数表达式，即

$-a^4=a^4(-1)=a^4e^{i(2k+1)\pi}$ $(a>0)$，代入方程，得

$$z^4=a^4e^{i(2k+1)\pi}.$$

由根式定义，有

$$z_k=a^4e^{i\frac{2k+1}{4}\pi} \qquad (k=0, 1, 2, 3).$$

按 k 取值，又有

$$z_0 = ae^{i\frac{\pi}{4}} = a\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_1 = ae^{i\frac{3}{4}\pi} = a\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right),$$

$$z_2 = ae^{i\frac{5}{4}\pi} = a\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right),$$

$$z_3 = ae^{i\frac{7}{4}\pi} = a\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right).$$

利用三角函数的诱导公式，便得到原方程的四 个 解 如下：

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}a(1+i), \qquad z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a(i-1),$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}a(1+i), \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}a(1-i).$$

（2） 注意到 $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$，可将原方程化为

$$e^{i2z} - 4ie^{iz} - 1 = 0,$$

即 $(e^{iz})^2 - 4i(e^{iz}) - 1 = 0$.

这是一个关于e^{iz}的二次方程，解之即得

$$e^{iz} = \frac{1}{2}(4i \pm \sqrt{-16+4}) = i(2 \pm \sqrt{3}). \qquad (1)$$

但是 $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y}\cos x + ie^{-y}\sin x,$ （2）

结合（1），（2）式，又有

$$e^{-y}\cos x + ie^{-y}\sin x = i(2 \pm \sqrt{3}).$$

令实、虚部分别相等，得到

$$\begin{cases} e^{-y}\cos x = 0, & (3) \\ e^{-y}\sin x = 2\pm\sqrt{3}. & (4) \end{cases}$$

由（3）知

$$\cos x = 0，则\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi，代入（4）式得到$$

$$e^{-y} = 2\pm\sqrt{3},$$

取对数，有 $y = -\ln(2\pm\sqrt{3})$.

把 x 和 y 的表达式代入 $z = x + iy$，得

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2\pm\sqrt{3}),$$

即为原方程的解.

7．设 $my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$

为解析函数．试确定 l，m 和 n 的值.

解 由 $my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$ 为解析函数，故其实、虚部满足 CR 方程.

设 $u(x, y) = my^3 + nx^2y$，$v(x, y) = x^3 + lxy^2$，

则应有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2nxy = 2lxy = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + ly^2 = -nx^2 - 3my^2 = -\dfrac{\partial u}{\partial y}, \end{cases}$$

推得 $n = l$ 及 $(n+3)x^2 + (l+3m)y^2 = 0$.

另外利用解析函数的实、虚部都满足调和方程，又有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (2n + 6m)y = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = (2l + 6)x = 0,$$

即
$$\begin{cases} (2n + 6m)y = 0, \\ (2l + 6)x = 0. \end{cases}$$

由于x，y不能为零，故有

$$\begin{cases} 3m+n=0, \\ l+3=0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} l=n=-3, \\ m=1. \end{cases}$$

*8．试证明：某区域上的解析函数$f(z)$如为实函数，则$f(z)$必为常数。　　（提示：利用CR条件）

证　设该解析函数为

$$f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y).$$

由于$f(z)$为解析函数，故其实、虚部满足CR条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

但$f(z)$为实函数，故其虚部 $v(x,\ y)\equiv 0$，从而

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0. \qquad (1)$$

而由CR条件，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \text{因而}\quad \frac{\partial u}{\partial x}=0;$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x},\ \text{因而}\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

又有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0. \qquad (2)$$

因此 u，v 均为常数。

设 $u=C_1$，　$v=C_2$，则得

$$f(z)=C_1+iC_2=C\ （复常数）.$$

结论获证。

9．已知解析函数 $f(z)$的实部 $u(x,y)$或虚部 $v(x,y)$。

试求出解析函数$f(z)$：

（1）$u=e^x\sin y$；　（2）$v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，　$f(2)=0$；

（3）$u=x^3-3xy^2$；（4）$u=\ln\rho$，　$f(1)=0$.

解　我们利用CR条件来求解。

（1）　由 $u=e^x\sin y$ 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\sin y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=e^x\cos y.$$

由于题设$f(z)$为解析函数，故由CR条件可知

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\cos y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\sin y.$$

故有

$$\begin{aligned} dv&=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\\ &=-e^x\cos y\,dx+e^x\sin y\,dy\\ &=d(-e^x\cos y), \end{aligned}$$

此即 $v=-e^x\cos y+C_1$（C_1为任意常数），从而

$$\begin{aligned} f(z)&=u+iv\\ &=e^x\sin y-i(e^x\cos y+C_1)\\ &=-ie^x(\cos y+i\sin y)+C\\ &=-ie^{x+iy}+C=-ie^z+C. \end{aligned}$$

其中 $C=-iC_1$为任意复常数。

（2）　为计算方便，采用极座标形式。

由 $x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$，代入v的表达式，则

$$v=\frac{\rho\sin\varphi}{\rho^2}=\frac{\sin\varphi}{\rho}.$$

注意CR条件的极坐标表达式，则有

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho^2}\sin\varphi, \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho}\cos\varphi,$$

由CR条件可得

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho^2}\cos\varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho}\sin\varphi, \qquad (*)$$

由常微分方程知识，由（*）中第一式，关于ρ积分，得

$$u(\rho, \varphi) = \int \frac{\cos\varphi}{\rho^2}d\rho + \tilde{f}(\varphi)$$

$$= -\frac{1}{\rho}\cos\varphi + \tilde{f}(\varphi), \qquad \tilde{f}(\varphi) \text{ 为待定函数.}$$

因而得

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho}\sin\varphi + \tilde{f}'(\varphi).$$

而由（*）式中第二式知

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho}\sin\varphi = \frac{1}{\rho}\sin\varphi + \tilde{f}'(\varphi).$$

故推得 $\tilde{f}'(\varphi) = 0$，从而$\tilde{f}(\varphi) = C$，代入u，则

$$u(\rho, \varphi) = -\frac{1}{\rho}\cos\varphi + C.$$

从而 $$f(z) = -\frac{1}{\rho}\cos\varphi + C + i\frac{1}{\rho}\sin\varphi$$

$$= -\frac{1}{\rho^2}\rho\cos\varphi + i\frac{1}{\rho^2}\rho\sin\varphi + C$$

$$= \frac{-1}{x^2+y^2}(x - iy) + C$$

$$= -\frac{1}{z} + C.$$

代 $f(2)=0$ 条件知 $C=\frac{1}{2}$。

故最后得

$$f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}.$$

（3） 由 $u=x^3-3xy^2$ 求偏导数，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy.$$

由CR条件可知

$$\frac{\partial v}{\partial x}=6xy, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2. \tag{1}$$

对第一式关于 x 积分，得

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int 6xy\,dx+\varphi(y) \\ &= 3x^2y+\varphi(y) \quad (\varphi(y)\text{待定}). \end{aligned} \tag{2}$$

于是 $$\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2+\varphi'(y).$$

结合（1）的后一式，可知 $\varphi'(y)=-3y^2$，因而积分得 $\varphi(y)=-y^3+C$，代入（2）式，得

$$v(x,y)=3x^2y-y^3+C.$$

进而得到 $$\begin{aligned} f(z) &= x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3+C) \\ &= (x+iy)^3+iC=z^3+iC. \end{aligned}$$

（4）显然应利用极座标形式的CR条件.

由$u=\ln\rho$，有

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=0,$$

由CR条件得

$$\frac{\partial v}{\partial \rho}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi}=1. \qquad (*)$$

对后一式关于φ积分，得

$$v(\rho,\ \varphi)=\varphi+\tilde{f}(\rho) \qquad (\tilde{f}(\rho)\text{为待定函数}).$$

求导得 $\frac{\partial v}{\partial \rho}=\tilde{f}'(\rho)$. 而由(*)中第一式知$\frac{\partial v}{\partial \rho}=0$，故 $\tilde{f}'(\rho)=0$，从而$\tilde{f}(\rho)=C$，代入v表达式得

$$v(\rho,\ \varphi)=\varphi+C.$$

于是得到

$$f(z)=\ln\rho+i(\varphi+C)=\ln z+iC.$$

代入 $f(1)=0$ 知$C=0$，因而最后求得

$$f(z)=\ln z.$$

第二章 （复变函数的积分）习题解答

§1．常用定理和公式

1．柯西积分定理：

（Ⅰ）．$\oint_l f(z)dz=0$． (2.1)

其中$f(z)$为l所围单连通域上的解析函数。

（Ⅱ）．$\oint_l f(z)dz=\oint_{l_1}f(z)dz+\cdots+\oint_{l_n}f(z)dz$.

其中l为复连通域的外境界线，l_i（$i=1,\ 2,\ \cdots n$）为所有内境界线。

2．柯西积分公式Ⅰ和Ⅱ（$n=0$和$n\neq0$）可合写为

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \qquad (3.9)$$