全国高等农业院校教材

线性代数同步辅导

房　宏　崔军文◎主编

中国农业出版社

全国高等农业院校教材

线性代数同步辅导

房 宏 崔军文 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数同步辅导 / 房宏，崔军文主编．—北京：中国农业出版社，2014．1

全国高等农业院校教材

ISBN 978－7－109－18499－2

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①房…　②崔…　Ⅲ．①线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．①O151．2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 298957 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100125）
策划编辑　朱　雷　魏明龙
文字编辑　魏明龙

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行
2014 年 1 月第 1 版　　2014 年 1 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：14．5
字数：258 千字
定价：26．00 元

内 容 简 介

本书根据线性代数现行教学大纲和研究生入学考试大纲编写，采用以章节为序的方法，归纳了线性代数的基本概念、重要定理和涉及的大量题型，精心选编和分析了一些经典题型及历年考研真题，以供读者学习使用。

编写人员名单

主　编　房　宏　崔军文

参　编　张文辉

审　稿　王学会

前　言

线性代数是高等院校普遍开设的一门重要的数学基础课，它具有理论抽象、逻辑推理严密、计算过程繁杂和应用广泛的特性，在工程以及科学技术研究等领域有着广泛的应用。不少读者在学习时感觉内容似乎是懂了，但在分析、解决实际问题时，概念容易混淆，能力明显不足。为了解决这些矛盾，同时帮助读者进一步加深对线性代数中基本概念、基本定理的理解，引导读者掌握线性代数的解题方法和技巧，启发、培养读者学习线性代数的兴趣，提高逻辑思维能力、计算能力和演绎论证能力，特组织编写了本书。

本书根据现行教学大纲和研究生入学考试大纲编写，采用以章节为序的方法，归纳了大量题型，精心选编和分析了一些经典题型及考研题。本书在编写上有以下几个特点：

一、画龙点睛，给出了每一章的学习要求与内容提要，使读者学习时能做到心中有数、有的放矢。

二、答疑解惑，对重点、难点及容易混淆的概念进行诠释，使读者对学习中遇到的问题能迎刃而解，便于掌握线性代数的实质。

三、典型例题解析，尽可能全面地归纳所涉及的典型题型，其中有介绍基本概念和基本方法的计算题及证明题，有一题多解的开拓思路题，有灵活的综合题，也有历届的考研真题。不少例题在解答前有详细的分析，请读者务必仔细阅读、品味，做到明其精髓、举一反三。

四、将知识点的讲解、分析与综合习题解答合二为一，便于学习及使用。

五、每一章后安排了章节测试题，旨在进一步强化解题训练，帮助读者掌握本章的重点及难点，提高和巩固学习效果。当然解题能力的提高需要读者亲自动手，只有通过自身的实践，才能真正得到锻炼，从而不断提高学习能力。

本书不仅可作为广大学生的学习指导书、教师教学的参考书，也可作为硕士研究生入学考试的复习参考书，具有很强的实用性。

参加本书编写的教师有：房宏(第一章、第三章)，崔军文(第二章、第四章)，张文辉(第五章)，全书由王学会统稿和审稿。

本书在编写、出版过程中，得到了我院教材科户绍娟老师的热心支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

编写本书时，参阅了许多书籍，引用了一些经典的例子，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢。

编　者

2013年8月于天津农学院

目 录

第一章 行列式

一、学习要求与内容提要

(一)学习要求

1. 掌握二阶行列式和三阶行列式的对角线法则.
2. 掌握 n 阶行列式的定义.
3. 熟练掌握行列式的性质，会利用行列式的性质计算行列式.
4. 熟练掌握利用行列式按行(列)展开的方法计算行列式.
5. 会用克拉默法则求解线性方程组.

本章重点：n 阶行列式的计算.

(二)内容提要

1. 排列的逆序数

(1) n 元排列：自然数 1，2，…，n 按照一定次序排成一个无重复数字的数组称为一个 n 元排列，记为 i_1，i_2，…，i_n.

(2) 标准次序：一般规定自然数从小到大为标准次序.

(3) 逆序和逆序数：在一个 n 元排列中，若一个较大的数排在一个较小的数的前面，则称这两个数构成一个逆序.

(4) 一个排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记为 $\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)$.

(5) 一个常用的计算逆序数的方法：$\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)=\tau(i_2)$($i_2$ 前面比 i_2 大的数的个数)$+\tau(i_3)$(i_3 前面比 i_3 大的数的个数)$+\cdots+\tau(i_n)$(i_n 前面比 i_n 大的数的个数)，即从排列的第二个数开始依次累加.

(6) 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

2. 对换

(1) 定义：在排列 p_1，p_2，…，p_t，…，p_s，…，p_n 中将任意两个数 p_t，p_s 的位置互换，而其余的数不动，就得到一个新排列，这种作出新排列的过程叫作对换. 将相邻两个元素对换，称为相邻对换.

(2) 定理：一个排列中任意两个元素对换，排列改变其奇偶性.

（3）推论：奇排列变为标准次序排列的对换次数为奇数，偶排列变为标准次序排列的对换次数为偶数．

3. n 阶行列式的定义

（1）对角线法则只适用于计算二阶和三阶行列式，即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

（2）定义：n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n} (-1)^{\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

它是 $n!$ 项的代数和，$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 取自 D 的不同行不同列，每一项的正负由列标排列的奇偶性决定．

（3）由 n 阶行列式的定义可以得到一些特殊的行列式：

① 上、下三角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

化上三角行列式是计算行列式最常用的一种方法．

② 对角行列式：

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

③ 副对角行列式：

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

④ 关于副对角线的上、下三角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

4. 行列式的五大性质

(1) 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等．此性质说明行列式的行和列地位相同．

(2) 交换行列式的两行(或列)，行列式改变符号．

(3) 用一个数 k 乘行列式，等于行列式某一行(或列)的所有元素都乘以 k. 也可以说，如果行列式某一行(或列)元素有公因子 k，则可将公因子 k 提到行列式的外面．

(4) 如果行列式某一行(或列)元素可以表示为两项的和，则该行列式可以表示为两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(5) 行列式的第 i 行(或列)元素 k 倍后加到第 j 行(或列)对应的元素上，行列式的值不变．

由性质(2)和(3)可以得出三种值为零的行列式：

① 如果行列式有两行(或列)完全相同，则该行列式等于零．

② 如果行列式有一行(或列)元素全为零，则该行列式等于零．

③ 如果行列式有两行(或列)对应元素成比例，则该行列式等于零．

性质(2)、(3)、(5)在计算行列式中是最常用的，因此引入记号，以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列：

交换 i，j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；交换 i，j 两列，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

第 i 行提公因子 k，记作 $r_i \div k$；第 i 列提公因子 k，记作 $c_i \div k$.

第 i 行乘以数 k 后加到第 j 行上，记作 r_j+kr_i；第 i 列乘以数 k 后加到第 j 列上，记作 c_j+kc_i.(注意口诀：前变，后不变，因为值不变，所以等号连接)

利用行列式的性质，化上三角行列式的一般步骤为：从第一列开始，将主对角线位置上元素化为 1，然后把第一行分别乘以适当的数加到其余各行，使得主对角线下方的元素全部化为 0.

再用类似方法处理其余各列(将主对角线位置上元素尽可能化简单，不一定化为 1)，直至使它成为上三角行列式，此时主对角线上元素的乘积就是所求行列式的值.

5. 行列式按行(列)展开

(1) 余子式和代数余子式：在 n 阶行列式 D 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素后，剩下的元素按原位置构成的 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}，称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

(2) 按特殊行(或列)展开定理：如果行列式 D 有特殊行(或列)，即其第 i 行(或第 j 列)元素除 a_{ij} 外都为零，则行列式 D 等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

注意：将行列式按特殊行(或列)降阶展开也是计算行列式的常用方法，一般选择零元素多并且元素简单的列为准特殊列，通过行之间的运算 r_j+kr_i 将其化成特殊列.

(3) 按任一行(或列)展开定理：行列式 D 等于它的任一行(或列)的所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和，即 $D=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$ 或 $D=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$.

(4) 定理：行列式 D 的某一行(或列)元素与另外一行(或列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

6. 克拉默(Cramer)法则

考虑下面含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

(1) 如果其系数行列式 $D\neq0$，那么方程组有唯一解：$x_i=\dfrac{D_i}{D}$，其中 D_i 是 D 中的第 i 列元素换成方程组右端的常数项得到的 n 阶行列式.

(2) 如果方程组无解或有两个不同的解，则系数行列式 $D=0$.

当上述方程组的常数项 b_1，b_2，…，b_n 不全为零时，称为非齐次线性方程组．当常数项 b_1，b_2，…，b_n 全为零时，方程组成为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0, \end{cases}$$

称为齐次线性方程组，是非齐次线性方程组的特例．

齐次线性方程组一定有解，因为 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 永远是它的解，这个解叫作**零解**．如果一组不全为零的数是解，则叫作**非零解**．齐次线性方程组一定有零解，但不一定有非零解．

（3）如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$，则齐次线性方程组只有零解．

（4）如果齐次线性方程组有非零解，则系数行列式 $D=0$.

二、答疑解惑

问 1. n 阶行列式定义的实质是什么？

答 对 n 阶行列式的定义应把握以下 4 点：

（1）元素为数字时，行列式的值是一个具体的数；元素为字母时，行列式的值是一个表达式．

（2）n 元排列的总数是 $n!$，故 n 阶行列式共有 $n!$ 项．

（3）每一项都是 n 个元素的乘积，这 n 个元素要求取自行列式的不同行不同列．

（4）每一项的“正负”符号是由行标排列和列标排列的逆序数之和的奇偶决定的，一般情况下让行标为标准次序的自然排列，其逆序数为零，此时只需计算列标排列的逆序数．

例如，考虑四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda \end{vmatrix},$$

由行列式的定义可知：D 是关于 λ 的 4 次多项式．因为 D 中有正项 $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)(a_{44}-\lambda)$，而其他各项 λ 的次数均低于 4. D 中 λ^3 的系数是 $-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$.

问 2. 能否由行列式定义得到下列两个关于 x 的多项式的最高次项？

(1) $D_1=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 8 \\ 2 & 2x^2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3x^3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4x^4+3 \end{vmatrix}$；(2) $D_2=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & x^4 \\ 2 & 2x^2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3x^3 & 0 \\ x & -1 & 2 & 4x^4 \end{vmatrix}$.

答 可以得出．考察 D 中所有取自不同行、不同列的 4 个元素之积中含 x 的幂次最高的那些项．

(1) 在 D_1 中，含 x 的最高幂次的项为 $x\cdot 2x^2\cdot 3x^3\cdot(4x^4+3)$，从而 D_1 中 x 的最高幂次项为 $24x^{10}$，且含 x^6 项为 $18x^6$，x^9，x^8，x^7 项系数均为零．

(2) 在 D_2 中，含 x 的最高幂次的项有两个，是 $x\cdot 2x^2\cdot 3x^3\cdot 4x^4$ 和 $-x\cdot 2x^2\cdot 3x^3\cdot x^4$，从而 D_2 中 x 的最高幂次项为 $(24-6)x^{10}=18x^{10}$．

问 3. (1) 余子式与代数余子式有什么特点？

(2) 它们之间有什么联系？

答 (1)对于给定的 n 阶行列式 D，元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij} 仅与元素 a_{ij} 的位置有关，而与元素 a_{ij} 所在行和列元素的大小和正负无关．

(2) 二者的关系是：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，则当 $i+j$ 为奇数时，$A_{ij}=-M_{ij}$；当 $i+j$ 为偶数时，$A_{ij}=M_{ij}$.

问 4. 范德蒙行列式有什么特点？

答 n 阶范德蒙行列式 $D_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$记为

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

D_n 有以下 3 个特点：

(1) 从行的角度看，第 i 行元素从左向右依次是各变元的 $i-1$ 次幂，$i=1, 2, \cdots, n$.

(2) 从列的角度看，第 j 列元素从上到下依次是变元 x_j 的零次幂，1 次幂，…，$n-1$ 次幂，$j=1, 2, \cdots, n$.

(3) 从结果看，D_n 是 n 个变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数，是 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个一次因式之积，每一个因式形如 x_i-x_j，其中 $1\leqslant j<i\leqslant n$，即下标大的变元与下标小的变元之差．于是 n 阶范德蒙行列式是所有下标大的变元与下标小的变元差的乘积．

问 5. 克拉默法则的意义是什么？

答　一方面，克拉默法则给出了求解 n 个未知数 n 个方程的线性方程组的一般结论，又是 n 个未知数 m 个方程的线性方程组理论的基础．

另一方面，由克拉默法则可以得出以下三个结论：

(1) 如果非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解或有两个不同的解，则系数行列式 $D=0$；

(2) 如果齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则系数行列式 $D=0$；

(3) 如果齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的系数行列式 $D\neq 0$，则只有零解．

问 6. 如果线性方程组的系数行列式 $D=0$，能不能说非齐次线性方程组有无穷多个解？

答　对于 n 个未知数 n 个方程的线性方程组来说，系数行列式 $D\neq 0$ 是方程组有唯一解的充要条件．因此，如果系数行列式 $D=0$，可以说方程组不是有唯一解，可能是无解或有无穷多解两种情况．

三、典型例题解析

题型一　计算排列的逆序数

例 1　求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性．

(1) 1 3 4 7 2 6 5；

(2) $n(n-1)\cdots 2\ 1$；

(3) $1\ 3\ 5\ \cdots(2n-1)2\ 4\ 6\ \cdots\ 2n$.

解　(1) $\tau=0+0+0+3+1+2=6$，偶排列．

(2) $\tau=1+2+\cdots+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$，则当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，为奇排列．

(3) $\tau=1+2+\cdots+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$，奇偶性与排列(2)相同．

例 2　选择 i 和 k，使

(1) $1\ i\ 2\ 5\ k\ 4\ 8\ 9\ 7$ 为奇排列；

(2) $1\ 2\ 7\ 4\ i\ 5\ 6\ k\ 9$ 为偶排列．

解　(1) 由题意，i，k 只能取 3 和 6，两种可能：$i=3$，$k=6$ 或 $i=6$，$k=3$，逆序数分别为 $\tau_1=5$，$\tau_2=8$. 所以 $i=3$，$k=6$ 为所求．

(2) 由题意，i，k 只能取 3 和 8，两种可能：$i=3$，$k=8$ 或 $i=8$，$k=3$，逆序数分别为 $\tau_1=5$，$\tau_2=10$. 所以 $i=8$，$k=3$ 为所求．

题型二　有关行列式的定义

例 3　已知 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 是四阶行列式中带负号的一项，求 j 和 k.

解 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}=a_{12}a_{2k}a_{3j}a_{41}$，则排列 $2kj1$ 只有两种可能：2 3 4 1或 2 4 3 1，而 $\tau(2\ 3\ 4\ 1)=0+0+3=3$，$\tau(2\ 4\ 3\ 1)=0+1+3=4$.

因为 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 带负号，故 $k=3$，$j=4$.

例 4 若 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的根有多少个?

解 由题意可知，$f(x)$是关于 x 的 4 次多项式.

化简行列式：将第 1 行元素分别乘以(-2)，(-3)，(-4)后加到第 2，3，4 行的对应元素上，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 8 & 1 & x+1 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

由行列式的定义可知，$f(x)$是一个关于 x 的二次多项式，故 $f(x)=0$ 至多有两个实根.

例 5 证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

证明 行列式 D 中的一般项是 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，列标互不相同取 1～5，故 j_3，j_4，j_5 中至少有一个要大于或等于 3，那么 a_{3j_3}，a_{4j_4}，a_{5j_5} 中至少有一个为 0，所以 D 的每一项都为 0，故 $D=0$.

题型三 利用性质计算行列式

将行列式化成上三角行列式(或下三角行列式).

例 6 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$