时间尺度上动态方程振动理论

韩振来　孙书荣　著

Shijian Chidu Shang Dongtai Fangcheng Zhendong Lilun

山东大学出版社

时间尺度上动态方程振动理论

韩振来　孙书荣　著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

时间尺度上动态方程振动理论/韩振来,孙书荣著.
—济南:山东大学出版社,2014.3
ISBN 978-7-5607-4999-0

Ⅰ.①时…
Ⅱ.①韩… ②孙…
Ⅲ.①时间尺度—动态方程—振动理论
Ⅳ.①O357.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 045534 号

安徽大学图书馆
藏书
www.lib.ahu.edu.cn

策划编辑 尹凤桐
责任编辑 李云霄
封面设计 牛 钧

出版发行 山东大学出版社
社 址 山东省济南市山大南路 20 号
邮 编 250100
电 话 市场部(0531)88364466
经 销 山东省新华书店
印 刷 山东泰安金彩印务有限公司
规 格 787 毫米×1092 毫米 1/16
15 印张 344 千字
版 次 2014 年 3 月第 1 版
印 次 2014 年 3 月第 1 次印刷
定 价 28.00 元

版权所有,盗印必究

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社营销部负责调换

前 言

随着科学技术的发展和进步，在物理学、控制理论、生物学、医学和经济学等自然科学和边缘学科研究领域提出了大量由时滞动态方程描述的具体数学模型，因而对时滞动态方程进行研究在理论和实际应用中都具有重要意义.

振动性理论是动态方程定性理论的一个重要分支，占有非常重要的地位. Sturm G 建立了二阶齐次线性微分方程零点分布的比较理论和分离理论，为微分方程振动性理论研究奠定了基础. 此后，动态方程的振动性理论研究取得了迅猛发展，其研究内容和研究方法不断得到丰富和发展，其研究方向也扩展到矩阵微分系统、差分系统、泛函微分方程、偏微分方程等研究领域.

1988 年，德国的 Stefan Hilger 在他的博士论文中首次提出了测度链(Measure chains)分析，即一个把连续分析与离散分析统一的数学方法. 此文发表后受到数学家的广泛关注. 一方面，近年来发展起来的时间尺度上的动态方程理论为我们提供了同时研究和处理微分方程和差分方程所需要的一种数学方法. 另一方面，由于时间尺度的复杂性，大大丰富了动态方程的研究内容，使我们能够更清楚地理解连续系统与离散系统以及其他复杂系统的本质问题.

我们从 1994 年开始研究微分方程与差分方程的振动性，2004 年开始研究时间尺度上动态方程振动理论. 到目前为止，研究方程的振动性理论已有 19 个年头. 本书的主要内容，是我们团队多年来科学研究的结晶. 由于水平有限，书中一定有不当和错误，敬请批评指正.

本书研究了时间尺度上几类时滞动态方程的振动性，统一并推广了连续时滞动态方程和离散时滞动态方程在振动性方面的一些结果. 本书共由五章组成，主要内容是：第 1 章，绪论；第 2 章，时间尺度上 Emden-Fowler 时滞动态方程振动理论；第 3 章，时间尺度上二阶非线性时滞动态方程振动理论；第 4 章，时间尺度上二阶非线性中立型时滞动态方程振动理论；第 5 章，时间尺度上高阶非线性时滞动态方程振动理论.

本书的出版得到济南大学出版基金(Publishing Foundation Project of University of Jinan)资助，得到济南大学学科处、济南大学数学科学学院和山东大学出版社的大力支持，在此表示感谢.

韩振来　孙书荣

2013 年 1 月于济南

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章 绪 论

1.1 问题的提出

我们知道，在现实世界中，许多物理学、力学、化学、生物学、医学、经济学和社会学的系统，往往要用动力方程（动力系统）来描述，而动力方程通常都是用常微分方程、差分方程或偏微分方程所确定的数学模型来表达的，当然这些数学模型实际上都是假定事物的变化规律只与当时的状态有关，而与过去的历史无关. 但是，事实告诉人们，许多事物的变化规律不仅依赖于当时的状态，还依赖于过去的状态. 也就是说，当把动力方程理论应用到某些实际问题中去时，必须考虑到一个重要的现象 —— 时滞反馈的影响. 例如，在物理学、力学、生物学、化工、通信工程、控制过程等应用领域中，就经常需要考虑带有时滞反馈的动力方程问题. 在这种情况下，不带有时滞的动力方程就不能很精确地描述客观事物，能客观地描述事物本质的是带有时滞的动力方程. 描述这类动力系统的数学模型通常称为时滞动力方程或时滞动力系统，在数学上一般称为泛函微分方程. 这种方程可以看作是带有导数的泛函方程，也可以看作是带有偏差变元的微分方程.

一般而言，动力系统总是不可避免地存在时滞现象，即使是质点间力的传递或者是以光速传递的信息也是如此. 在自动控制的装置中，从输入信号到接收到反馈信号，也必然相差一段时间. 因此用传统的微分方程或差分方程去描述系统的状态只是一种近似，是在理想的条件下进行的，必须符合精度要求才行. 由于泛函微分方程能充分考虑到事物的历史、现时对未来状态变化的影响，与传统的微分方程相比较，它能更深刻地、更精确地反映事物的变化规律，揭示事物的本质.

随着现代科学技术的快速发展，在自然科学与社会科学的许多研究领域中也都提出了大量的时滞动力方程的动力学问题，如人口、生态、经济、宇宙起源等宏观问题，如中子迁移、物质结构、化学反应等微观问题，又如神经网络、人工智能等生命现象问题. 在这些重大的实际问题中，人们不断地提出许多新的时滞动力方程的动力学问题和相关的数学理论，需要我们去研究和解决.

无论是从现代科学技术应用上的需要，还是从数学理论本身的发展来看，时滞动力方程的动力学问题都是一个新的、具有挑战性的数学分支. 时滞动力方程的动力学问题的研究可以追溯到18世纪的Euler或者更早些，但是系统的、形成一定规模的研究工作还是在20世纪40年代末. 在这一个时期，人们研究的工作重点是讨论线性常系数的情况，并且主要是设法具体求解这些方程. 所有的方法主要是 Laplace 变换、各种展开和近似方法. 对

于稳定性的讨论，限于判断其特征方程根的分布. 从 20 世纪 40 年代末到 50 年代末这 10 年间的工作，重点是初步建立了基本理论和系统地推广常微分方程的种种结果，特别是 Liapunov 第二方法. 历史上，在推广 Liapunov 第二方法的时候碰到了极大困难，于是在 20 世纪 50 年代末人们提出了时滞泛函微分方程的普遍概念.

对时滞泛函微分方程的系统研究是在 20 世纪 60 年代全面展开的[1,2,3]. 一方面由于在实际问题中提出了大量的时滞动力方程的动力学问题，推动着一批数学家去研究解决；另一方面也由于数学理论本身的发展和近代数学工具的不断引入，促进了时滞动力方程理论的快速发展. 到 20 世纪 70 年代末，国际上已初步形成了一支研究队伍，时滞动力方程理论已经成为一个相当活跃的数学分支. 20 世纪 80 年代末，在我国也形成了一支人数较多的研究队伍，被国际学术界称为"中国学派".

时滞动力方程的振动性理论是时滞动力方程理论的中心内容之一，也是定性理论的一个重要组成部分. 广泛的应用背景促使这一理论在近 30 年中有了迅速发展，从 20 世纪 80 年代至今，一直比较活跃. 国际文献中这一领域的论文已达数千篇，1977 年以来出版了有关时滞动力方程振动理论的一批专著，如文献[4 ～ 7].

众所周知，生物模型中出现大量时滞微分方程[8]，其中最著名的就是 Hutchinson 在 1948 年建立的描述单个种群增长的时滞 Logistic 方程

$$x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{k}\right), \tag{1.1.1}$$

其中，时滞 τ 包含对种群增长的各种影响，如孵化周期、怀孕时间、食物更新时间等. 用特征方程讨论可知，当 $0 < r\tau < \frac{\pi}{2}$ 时，方程(1.1.1) 的平衡点 $x = k$ 是渐近稳定的；当 $r\tau > \frac{\pi}{2}$ 时，$x = k$ 是不稳定的，即 $r\tau = \frac{\pi}{2}$ 为分叉点. 另外，当 $r\tau > \frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，方程(1.1.1) 的解在 $x = k$ 附近振动；当 $r\tau \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，方程的所有解不在 $x = k$ 附近振动[9]. 这个数学分析的结果给生态学家提供了引起振动现象的时滞 τ 的界限.

在工业技术方面也存在着大量的时滞动力方程问题. 如电磁开关触头的振动可归结为研究二阶时滞微分方程

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) + cx(t-\tau) = 0$$

解的振动性[9]. 在研究两个星球或者两个带电粒子问题时，它们之间的引力传递速度为光速，其运动规律[10] 为

$$\begin{cases} x''(t) = f_1(x(t) - y(t - r_{21}(t)), x'(t), y'(t - r_{21}(t))), \\ y''(t) = f_2(y(t) - x(t - r_{12}(t)), y'(t), x'(t - r_{12}(t))). \end{cases}$$

在研究核反应堆燃烧的循环理论中有数学模型[11]

$$x'(t) = -\int_{t-r}^{t} a(t-u)g(x(u))\mathrm{d}u,$$

其中，$x(t)$ 表示时刻 t 时的中子密度. 在研究无损传输线连接问题时得到数学模型[12]

$$x'(t) - kx'\left(t - \frac{2}{s}\right) = f\left(x(t), x\left(t - \frac{2}{s}\right)\right).$$

近年来,随着时滞动力方程理论研究的深入,其重要性引起人们更广泛的关注.人们习惯于将系统分为连续和离散两种类型,连续结果与离散结果有时是相通的,甚至有时是相似的,二者之间有许多共性和紧密的联系.差分方程理论中的许多结果在微分方程理论中都能找到与之相应的类似结果.但是,差分方程理论与微分方程理论相比,在内容上更为丰富.差分方程与微分方程之间也存在着许多差异,甚至是本质上的差异.有许多例子表明微分方程与其相应的差分方程会有一些完全不同的性质.

例如,1836 年,Verhulst 提出的著名单个种群增长的生态数学模型 Logistic 方程

$$x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right)$$

的所有解都是单调的.但是,人们发现相应的差分方程

$$x(n+1) = ax(n)(1 - x(n))$$

当 $a = 4$ 时有一个混沌解[13],这就有了本质性的区别.时滞微分方程的振动性与相应的时滞差分方程的振动性也具有完全不同的性质[14,15].另外,Cooke[16] 和 Hooker[17] 也都论述过微分方程的振动性与相应的差分方程的振动性之间的差异.这种可能的差异性,使得人们对许多微分方程和它们相应的差分方程进行重复的研究.对时滞差分方程定性理论研究的历史比较短,真正开始在 20 世纪 80 年代末.近 20 年的时间发展较为迅速,出现了一大批研究成果,如专著[18 ～ 21].

从模型的观点来看,用动力系统描述一种现象的更现实的方法是将变量定义在连续和离散的点的混合实数子集上,也就是在一个实数集的闭子集上.因此,一个自然的问题是能否寻找到一种新的理论体系,使人们可以同时处理连续和离散系统,以便更好地洞察这两类不同系统之间的本质差异,这一直是人们想要克服的难题.测度链上的微积分理论就在此背景下产生了.

测度链(Measure chains)上的微积分理论是德国 Wurzburg 大学的学者 Hilger 在 1988 年他的博士论文[22] 中提出来的,并随后发表在论文[23,24] 中.其主要思想就是把连续与离散统一起来,是为了统一连续分析和离散分析理论而引入的一种新的分析理论.按照 Hilger 的导师 Aulbach 教授的解释,提出这种新的分析理论,其主要目的有三:统一、推广和离散化.所谓统一,就是把微分方程理论和差分方程理论融合在一起去研究,分析他们之间的异同点,这样就避免了对很多问题的两次重复证明.同时,因为测度链还包含其他的一些集合,因此可以得到更广泛的结果.作为测度链的一种特殊情形,时间尺度(time scales) 是非常具有代表性的,因此备受关注.目前,时间尺度上的微积分理论基础已经建立[25～28].

虽然测度链上的微积分理论是在 1988 年创立的,但是由于当时缺乏应用背景,并没有引起学术界的重视,被搁置了几年.后来随着时间尺度上的微积分理论的进一步发展和完善,人们发现在不同季节有活动期和休眠期的昆虫种群的数学模型就可以用时间尺度上的动力方程来描述.

因此,近年来这一理论越来越引起数学家们的兴趣和关注.时间尺度上的动力方程理论能更精确地预测在一个层面平稳变化,而在另一个层面又间歇变化的规律.可以预言,在不久的将来,时间尺度上的动力方程理论不仅能成功地应用于生物学、经济学、物理学、

控制理论等领域,而且还能成为从事预测工作的科学家们不可或缺的工具.

1.2 研究背景及动态方程振动理论的发展

振动是一种带有普遍意义的物质运动形式,是系统运动的又一特征.无论在哪一种技术领域,还是在哪一个物理部门,都会碰到某种程度的振动过程.从自然界到工业领域,从日常生活到社会生活,振动现象屡见不鲜.无线电技术、交流电工学以及某些其他技术都是建立在利用振动过程的基础之上的.如钟摆的摆动和心脏的跳动、经济发展的高涨和萧条、声波和超声波、工程技术中的机器和结构物的机械振动、无线电和光学中的电磁振荡等,从最小的粒子到巨大的天体,从简单的摆到复杂的生物体,无处不存在振动现象[29].

同世界上一切事物无不具有两重性一样,在我们未认清、未掌握它时,振动会给人类带来严重的危害,一旦为我们所掌握,它就会化害为利,给人类带来益处.因此,人们有时力图防止或减少振动,有时又力图制造和利用振动.尽管振动现象的形式多种多样,但有着共同的客观规律和统一的数学表达形式,即动力方程的振动理论.动力方程的振动理论不仅在力学、光学、声学、无线电、电子学、自动控制理论等学科,以及机械、航空、土木、水利等工程学科有着十分重要的作用,而且还在经济学、生态学、生命科学等领域也有着十分重要的作用.

对各类产品而言,振动存在于各种运输过程和使用环境中.在运输过程中,振动激励主要来自运输工具与其载体的相互作用.在使用过程中,振动来自产品自身和安装区域的旋转机械或外界运动的激励.振动激励可以归为三大类:冲击激励、周期振动激励和随机振动激励.

振动会严重影响产品的工作状态,对其结构破坏也影响极大,主要表现为导线的摩擦、紧固件的松动、间断的接触点、带电元件间的接触和短路、密封失效、印刷电路引起的折断、光学上的失调、构件疲劳及断裂、产生强点噪声等.特别是激振频率和设备的固有频率接近时,影响尤为剧烈.因此,从产品设计的角度考虑,一是减弱振动对产品的作用强度;二是产品的固有频率应避开激励频率,使产品具有较高的可靠性.

振动是产品失效的主要原因之一.早在1940年,美国塔可马(Tacoma)吊桥因风载引起振动而坍塌就是典型的非线性振动而引起破坏的例子.另外,美国空军对沿海某基地使用的产品故障调查表明,振动引起的故障占27%;我国某部曾对机械产品失效情况进行分析,振动引起的故障占环境因素引起故障的21.6%.

由于振动的复杂性,人们往往通过等效综合手段和归一化方法,建立数学模型,把复杂的振动用相对简单的方法加以描述.动力方程的振动性理论是动力方程定性理论的一个重要分支,也是近年来定性理论研究中一个十分活跃的方向.因此,研究系统的振动性与其控制问题是十分有意义的.

1836年,Sturm在研究热传导问题时第一次提出并研究了二阶线性微分方程

$$y'' + q(t)y = 0$$

的振动性问题,建立了二阶线性微分方程解的零点分布的比较理论和零点分离理论,为微分方程振动性理论的研究奠定了基础.从此,微分方程振动理论一直是微分方程定性理论

中一个十分诱人的研究领域.

随着这一方向研究的深入和发展,其研究内容及研究方法不断得到丰富,无论是线性微分方程还是非线性微分方程的研究,近年来都取得了大量的研究成果,研究方向也被国内外学者扩展到差分方程、偏差分方程、泛函微分方程、偏泛函微分方程、矩阵微分方程及时间尺度上的动力方程等有关领域.

Swanson[30] 总结了线性常微分方程的比较定理与振动性的经典结果,也见文献[31].燕居让[32] 对常微分方程振动理论也作了系统的总结.

泛函微分方程的振动性理论区别于微分方程的振动性理论,它重点揭示微分方程中的偏差变元的出现引起的解的振动性或非振动性.一个简单的例子是一阶线性常微分方程

$$y'(t)+p(t)y(t)=0,\quad p\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$$

的一切解都是定号的,而一阶时滞微分方程

$$y'(t)+y\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

具有振动解 $y=\sin t$.这个振动性完全是由滞量$\frac{\pi}{2}$引起的.正是因为这样,一阶泛函微分方程解的振动性质的研究构成了泛函微分方程振动理论中最吸引人的篇章之一,见综述文章[9,33]和文献[4,34].

在泛函微分方程振动理论中第一篇有影响的论文是文献[35].在这篇论文中,Fite 研究了 n 阶泛函微分方程

$$y^{(n)}+p(t)y(\tau(t))=0,$$

其中,$n\geqslant 1,p\in C(-\infty,+\infty),\tau(t)=k-t,k>0$ 是常数.

他证明若对充分大的 $|t|$,有 $p(t)>h>0$,则当 n 是奇数时,该方程的每个解变号无穷多次;当 n 是偶数时,该方程的每个解或者变号奇数次或者变号无穷多次.例如,方程 $y''+y(\pi-t)=0$ 有解 $y_1=\sin t,y_2=e^t-e^{\pi-t}$.

Fite 指出,这个性质区别于相应的常微分方程.事实上,若 $\tau(t)\equiv t$,则当 n 是奇数时,该方程的解或者振动或者单调趋于零;当 n 是偶数时,该方程的每个解振动.解的性质的这种区别完全是由偏差变元引起的.

Shevelo[36] 系统地总结了 1978 年以前具有偏差变元的微分方程振动性理论,这是第一本系统地叙述泛函微分方程振动理论的专著.Hale[2] 给出了泛函微分方程基本理论,之后各国数学工作者开始研究这一领域.Ladde[4] 对 1987 年以前的具有偏差变元的微分方程振动理论作了系统总结.文献[4]的出版大大推动了这一领域研究工作的深入发展,它已成为这一领域的经典著作.

1980 年,Zahariev 和 Bainov[37] 发表了第一篇有影响的关于中立型时滞微分方程振动性的文章.文章发表之后,迅速引起国际众多数学工作者的注意,学术界相继发表了大量中立型时滞微分方程振动性与非振动性的文章.在 20 多年的时间里,中立型微分方程的振动性理论得到了很大的发展,出版了有影响的专著[5,6,7,38].

零点分布是时滞泛函微分方程的另外一个重要研究课题[39].1990 年,李秉团[40] 发表

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

了第一篇时滞微分方程零点分布的文章. 1994 年 Liang[41] 对文献[40] 的结果作了改进. 林诗仲[42] 将文献[40] 的结果推广到中立型微分方程. 周勇[43~45] 又将文献[42] 的结果进行了改进和推广. 目前,关于时滞微分方程的零点分布的研究较少,主要停留在对一阶时滞微分方程的零点分布的研究上,对这方面的工作还需要进一步研究.

时滞差分方程是从时滞微分方程的差分近似中提出来的[12],也可以从实际问题中直接得出[46]. 另外,时滞差分方程与中立型微分方程密切相关[2,47]. 1988 年,Zhang 在美国 Ohio 国际微分方程会议上的报告[14] 中第一次提出作为时滞微分方程的离散形式——时滞差分方程解的振动性与非振动性的研究. 在此之前,文献中主要研究二阶常微分方程的离散形式[48,49]

$$\Delta^2 y_n + p_n y_{n+1} = 0.$$

在文献[14] 中,Zhang 利用已经相当成熟的对一阶时滞微分方程

$$y'(t) + p(t)y(\tau(t)) = 0$$

的研究成果,讨论了它的差分形式

$$\Delta y_n + p_n y_{n-m} = 0$$

解的振动性与非振动性,得到相当满意而富有启发性的结果. 此文引起同行专家的浓厚兴趣,受此影响,1989 年后一大批数学家转向时滞差分方程定性理论的研究. 1990 年以来,连续出版了几本差分方程的著作,从 1994 年起每年都举办一次国际差分方程的系列会议,1995 年起出版了专门的差分方程刊物 J. Difference Equations Appl. 关于差分方程振动性研究的文献是大量的,如文献[50 ～ 76].

关于差分方程振动性理论的研究工作已经有了很大进展,特别是近二、三十年来数学在生态、环境、经济、社会、金融、管理等众多领域中的广泛应用,差分方程已不仅是微分方程的简单近似,而是作为独立的由大量实际问题提出的数学模型,成为一个重要的研究领域. 事实上,由于近年来医学、生物数学、现代物理等自然科学和边缘性学科的进一步发展,提出了许多由差分方程描述的具体的数学模型. 差分方程定性理论的研究,对金融、环境、社会等领域的发展状况及特性的分析、预测有重要意义.

近年来,时间尺度上动力方程的研究引起了广泛的兴趣,其研究内容涵盖了许多领域,如时间尺度上的微积分基本理论,时间尺度上动力方程的振动性、渐近性、特征值问题、边值问题、周期解、正解的存在性,时间尺度上偏微分方程,时间尺度上矩阵方程等,见文献[77 ～ 110].

时间尺度上动力方程理论有极其重要的理论意义和广泛的应用前景,如文献[111, 112]. 这一理论不仅能揭示连续与离散系统的共同点,为我们的研究提供新的强有力的理论工具,还能使我们能够更清楚地理解连续系统与离散系统以及其他复杂系统中的本质问题. 现实问题中,有些过程有时依赖于连续时间变量,有时依赖于离散时间变量,而有些过程的时间变量是分段连续的. 对这些问题,用时间尺度上的动力方程就可恰当地给出它们的数学模型.

例如虫口模型,一类昆虫的数量从 4 月到 9 月以一定的增长率连续地增长,到了 10 月突然全部死亡,但是它们的卵到来年 4 月又开始孵化. 这样,这种昆虫就又可以以一定的增长率增长. 整个过程的时间变量是分段连续的,可以用一个时间尺度上的动力系统来描

述，进而加以解决.

再比如，一个由电阻、电容及自感线圈所组成简单串联电路，当电容以固定频率作周期闭合时，电路中电流的改变率恰好可以用时间尺度上的导数来刻画[27].

另外，时间尺度上的动力系统在经济学领域也有着广泛的应用. 例如，关于动态均衡分析经济学理论的蛛网模型. 传统的蛛网模型，时间变量要么是离散的，要么是连续的，无法确切描述某一季节性产品的供求关系. 当我们引入时间尺度上的蛛网模型后，就能较好地解决这一问题.

在国际上，致力于研究时间尺度上动力方程振动理论的主要代表人物有 Agarwal、Anderson、Bohner、Erbe、Henderson、Lakshmikantham、Li、Peterson、O'Regan、Saker、Zhang 等，发表了大量的研究成果，如文献[113 ～ 146].

人们对时间尺度上几类典型的一阶和二阶线性动力方程的振动性和非振动性，给出一些非常好的结果，其中包括三个非常有用的基本结论：变分方法定理、Riccati 变换、Sturm 分离定理.

关于时间尺度上的二阶非线性动力方程的振动性和非振动性研究也有一些结果，但是非常有限. 与微分方程和差分方程一样，除了由方程的系数以及方程自身结构等一些因素引起解的振动外，滞量本身的改变也可引起时间尺度上动力方程解的振动性质的改变.

关于时间尺度上的时滞动力方程的振动性和非振动性研究到目前为止只有几十篇文章. Zhang[145] 在 2002 年利用微分方程振动性方法，研究了时间尺度上一阶线性时滞动力方程

$$x^{\Delta}(t)+p(t)x(\tau(t))=0$$

的振动性，这是第一篇研究时间尺度上时滞动力方程振动性的论文. 时间尺度上二阶非线性时滞动力方程的振动性研究成果并不丰富.

由于时间尺度上动力方程理论还不很成熟，比如时间尺度上微积分理论以及不动点理论中的紧性问题等等，使得这类方程处理起来比较困难.

目前，许多时滞泛函微分(差分) 方程的结论在时间尺度上动力方程中难以实现. 因此，时间尺度上时滞动力方程研究还有很多工作尚待解决. 如时间尺度上某些动力方程的振动性、振动解的零点分布以及高阶时滞动力方程正解的存在性等都是值得研究的问题.

本书主要是研究时间尺度上时滞动态方程的振动理论.

1.3 时间尺度上微积分基本理论

本节所引用的概念和结论主要来自文献[24 ～ 28,85,86,105].

实数集 $\mathbf{R}$ 的任何一非空闭子集$\mathbb{T}$称为一个时间尺度. 时间尺度$\mathbb{T}$具有由 $\mathbf{R}$ 诱导的拓扑及序关系. 常见的情况是$\mathbb{T}$和 $\mathbb{T}=\mathbf{N}$，其中 $\mathbf{N}$ 表示自然数集. 除此之外，还有许多其他形式的时间尺度. 例如，

$$\mathbb{T}=q^{\mathbf{Z}}=\{q^k \mid k\in\mathbf{Z}\}\cup\{0\},$$

其中，$q>1$，$\mathbf{Z}$ 表示整数集；

$$\mathbb{T}=h\mathbf{Z}=\{hk \mid k\in\mathbf{Z}\},$$

其中，$h>0$；

$$\mathbb{T}=P_{a,b}=\bigcup_{k=0}^{+\infty}[k(a+b),k(a+b)+a],$$

其中，$a>0,b>0$.

定义 1.3.1　设 $\mathbb{T}$ 是一时间尺度，对 $t\in\mathbb{T}$，定义前跳算子 σ 为

$$\sigma:\mathbb{T}\to\mathbb{T},\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}:s>t\},$$

后跳算子 ρ 为

$$\rho:\mathbb{T}\to\mathbb{T},\rho(t)=\sup\{s\in\mathbb{T}:s<t\},$$

补充定义 $\inf\varnothing=\sup\mathbb{T},\sup\varnothing=\inf\mathbb{T}$.

点 $t\in\mathbb{T}$ 称为右稠密的、右离散的、左稠密的和左离散的，如果 $\sigma(t)=t,\sigma(t)>t,\rho(t)=t$ 和 $\rho(t)<t$.

为了度量时间尺度上相邻点的位置关系，定义步差函数为

$$\mu:\mathbb{T}\to\mathbf{R},\mu(t)=\sigma(t)-t.$$

很明显 $\mu(t)\geqslant 0$.

特别地，当 $\mathbb{T}=\mathbf{R}$ 时，$\sigma(t)=\rho(t)=t,\mu(t)=0$；当 $\mathbb{T}=\mathbf{Z}$ 时，$\sigma(t)=t+1,\rho(t)=t-1,\mu(t)=1$.

定义 $\mathbb{T}^k=\mathbb{T}$，如果 T 无上界；否则，$\mathbb{T}^k=\mathbb{T}\backslash[\rho(\sup\mathbb{T}),\sup\mathbb{T}]$. 类似地，定义 $\mathbb{T}_k=\mathbb{T}$，如果 $\mathbb{T}$ 无下界；否则，$\mathbb{T}_k=\mathbb{T}\backslash[\inf\mathbb{T},\sigma(\inf\mathbb{T}))$.

设函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbf{R},t\in\mathbb{T}$. 定义 $f^\sigma:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$ 为 $f^\sigma(t)=f(\sigma(t)),\forall t\in\mathbb{T}$.

定义 1.3.2　设函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$. 如果函数 f 对 $\mathbb{T}$ 中的所有右稠密点存在有限的右极限，对 $\mathbb{T}$ 中的所有左稠密点存在有限的左极限，那么称函数 f 是正规的.

定义 1.3.3　设函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbf{R},t_0\in\mathbb{T}$. 如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 t_0 的一个小邻域 $U\subset\mathbb{T}$，当 $s\in U$ 时，都有 $|f(s)-f(t_0)|<\varepsilon$，则称函数 f 在点 t_0 是连续的.

定义 1.3.4　如果函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$ 在 $\mathbb{T}$ 中一切右稠密点连续，且在左稠密点处存在有限左极限，则称函数 f 为右稠连续的，或称函数 f 为 rd 连续的. 在 $\mathbb{T}$ 上一切右稠连续函数的集合记作 $C_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T},\mathbf{R})$.

下面我们给出时间尺度上 Δ 导数与 Δ 积分的定义及其性质.

定义 1.3.5　设函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbf{R},t\in\mathbb{T}^k$. 如果存在一个数 α，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 t 的一个小邻域 $U\subset\mathbb{T}$，当 $s\in U$ 时，都有 $|f(\sigma(t))-f(s)-\alpha(\sigma(t)-s)|<\varepsilon|\sigma(t)-s|$，则称函数 f 在点 t 处是 Δ 可微的，简称可微，并称数 α 是函数 f 在点 t 处的 Δ 导数，简称导数，记为 $f^\Delta(t)$.

此外，如果对所有的 $t\in\mathbb{T}^k$，$f^\Delta(t)$ 都存在，则称函数 f 在 $\mathbb{T}^k$ 上是 Δ 可微的，简称可微. 此时称函数 $f^\Delta:\mathbb{T}^k\to\mathbf{R}$ 为 f 在 $\mathbb{T}^k$ 上的 Δ 导函数，简称导数.

当 $\mathbb{T}=\mathbf{R}$ 时，$f^\Delta(t)=f'(t)$，就是通常的导数；当 $\mathbb{T}=\mathbf{Z}$ 时，$f^\Delta(t)=\Delta f(t)$，就是通常的向前差分算子.

引理 1.3.1　设函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbf{R},t\in\mathbb{T}^k$，则有

(1) 如果函数 f 在点 t Δ 可微，那么函数 f 在点 t 连续；

(2) 如果函数 f 在点 t 是连续的，点 t 是右离散的，那么函数 f 在点 t 是 Δ 可微的，且

$f^{\Delta}(t)=\dfrac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}$；

(3) 如果点 t 是右稠密的，那么函数 f 在点 t 是 Δ 可微的，当且仅当极限

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

存在，且此时有 $f^{\Delta}(t)=\lim\limits_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$；

(4) 如果函数 f 在点 t Δ 可微，那么 $f^{\sigma}(t)=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$；

(5) 如果函数 f 在 $\mathbb{T}^k$ 上分别满足 $f^{\Delta}(t)>0, f^{\Delta}(t)<0, f^{\Delta}(t)\geqslant 0, f^{\Delta}(t)\leqslant 0$，那么函数 f 在 $\mathbb{T}^k$ 上分别是递增的、递减的、非递减的、非递增的.

引理 1.3.2 设函数 $f,g:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$ 在点 $t\in\mathbb{T}^k$ 是 Δ 可微的，则有

(1) 和函数 $f+g:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$ 在点 t 是 Δ 可微的，且

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t);$$

(2) 对任意的常数 α，函数 $\alpha f:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$ 在点 t 是 Δ 可微的，且

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t);$$

(3) 积函数 $fg:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$ 在点 t 是 Δ 可微的，且

$$(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)=f(t)g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)g(\sigma(t));$$

(4) 如果 $f(t)f(\sigma(t))\neq 0$，那么函数 $\dfrac{1}{f}:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$ 在点 t 是 Δ 可微的，且

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t)=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))};$$

(5) 如果 $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$，那么函数 $\dfrac{f}{g}:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$ 在点 t 是 Δ 可微的，且

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

引理 1.3.3 设函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$.

(1) 若函数 f 是连续的，则函数 f 是 rd 连续的；

(2) 若函数 f 是 rd 连续的，则函数 f 是正规的；

(3) 前跳算子 σ 是 rd 连续的；

(4) 若函数 f 是正规的，或是 rd 连续的，则 f^{σ} 是正规的，或是 rd 连续的；

(5) 设函数 f 是连续的，若函数 $g:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$ 是正规的，或是 rd 连续的，则复合函数 $f\circ g$ 是正规的，或是 rd 连续的.

定义 1.3.6 定义在 $\mathbb{T}$ 上的 Δ 可微且其 Δ 导数右稠连续的函数集合记作 $C^1_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T},\mathbf{R})$. 同理，定义在 $\mathbb{T}$ 上的二阶 Δ 可微且其二阶 Δ 导数右稠连续的函数集合记作 $C^2_{\mathrm{rd}}(\mathbb{T},\mathbf{R})$.

定义 1.3.7 设 $\mathbb{T}$ 为时间尺度，$a<b$ 为 $\mathbb{T}$ 中的点，定义时间尺度 $\mathbb{T}$ 上的闭区间

$$[a,b]_{\mathbb{T}}:=\{t\in\mathbb{T}\mid a\leqslant t\leqslant b\}.$$

同样可以定义时间尺度 $\mathbb{T}$ 上的开区间、无穷区间等. 例如，如果时间尺度 $\mathbb{T}$ 是无上界的，那么，$[a,+\infty)_{\mathbb{T}}:=\{t\in\mathbb{T}\mid a\leqslant t<+\infty\}$.

定义 1.3.8 设函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbf{R}, a,b\in\mathbb{T}, a<b$. 如果存在一个函数 $F:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$，对所有 $t\in\mathbb{T}^k$，都有 $F^{\Delta}(t)=f(t)$，那么称函数 $F(t)$ 为函数 $f(t)$ 的一个原函数，称原函数族 $F(t)$

$+c$ 为函数 $f(t)$ 的不定积分,记为 $\int f(t)\Delta t = F(t)+c$,$c$ 是任意常数.

定义函数 $f(t)$ 从 a 到 b 的 Cauchy 积分或定积分为 $\int_a^b f(t)\Delta t = F(b)-F(a)$,此时称函数 $f(t)$ 在区间 $[a,b]_{\mathbb{T}}$ 上是可积的.

若 $\sup\mathbb{T}=+\infty$,那么函数 $f(t)$ 在 $\mathbb{T}$ 上的无穷积分定义为 $\int_a^{+\infty} f(t)\Delta t = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(t)\Delta t$.

为运算方便,规定 $\int_a^a f(t)\Delta t = 0$;当 $a>b$ 时,$\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$.

引理 1.3.4(原函数存在定理) 设函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$ 是 rd 连续的,则函数 f 一定存在原函数.特别地,如果 $t_0\in\mathbb{T}$,那么

$$F(t)=\int_0^t f(\tau)\Delta\tau,\quad t\in\mathbb{T}$$

是函数 f 的一个原函数.

引理 1.3.5 设 $a,b,c\in\mathbb{T}$,$\alpha\in\mathbf{R}$,函数 f,g 是 rd 连续的,则

(1) $\int_a^b [f(t)+g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$;

(2) $\int_a^b [\alpha f(t)]\Delta t = \alpha\int_a^b f(t)\Delta t$;

(3) $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$;

(4) $\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b)-(fg)(a)-\int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$;

(5) $\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b)-(fg)(a)-\int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t$;

(6) 如果 $f(t)\geqslant 0$,$a\leqslant t\leqslant b$,那么 $\int_a^b f(t)\Delta t\geqslant 0$;

(7) 如果 $|f(t)|\leqslant g(t)$,$a\leqslant t<b$,那么 $\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right|\leqslant\int_a^b g(t)\Delta t$.

引理 1.3.6 设函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$ 是 rd 连续的,$t\in\mathbb{T}^k$,则 $\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu(t)f(t)$.

引理 1.3.7(Keller 链锁法则) 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续可微的,$g:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$ 是 Δ 可微的,则复合函数 $f\circ g:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$ 是 Δ 可微的,且

$$(f\circ g)^{\Delta}(t)=\left\{\int_0^1 f'(g(t)+h\mu(t)g^{\Delta}(t))\mathrm{d}h\right\}g^{\Delta}(t).$$

由引理 1.3.7 可得,当 $x(t)$ 是 Δ 可微时,则有下列等式成立:

$$((x(t))^{\gamma})^{\Delta}=\gamma\int_0^1[hx^{\sigma}+(1-h)x]^{\gamma-1}x^{\Delta}(t)\mathrm{d}h.$$

引理 1.3.8 如果 $a,b\in\mathbb{T}$,函数 f 是 rd 连续的,那么

(1) 若 $\mathbb{T}=\mathbf{R}$,则 $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$;

(2) 若$[a,b]$是由孤立点组成的,则$\int_a^b f(t)\Delta t=\begin{cases}\sum\limits_{t\in[a,b)_{\mathbb{T}}}\mu(t)f(t), & a<b\\ 0, & a=b;\\ -\sum\limits_{t\in[b,a)_{\mathbb{T}}}f(t), & a>b\end{cases}$

(3) 若$\mathbb{T}=h\mathbf{Z}=\{hk\mid k\in\mathbf{Z}\},h>0$,则$\int_a^b f(t)\Delta t=\begin{cases}\sum\limits_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1}f(kh)h, & a<b\\ 0, & a=b;\\ -\sum\limits_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1}f(kh)h, & a>b\end{cases}$

(4) 若$\mathbb{T}=\mathbf{Z}$,则$\int_a^b f(t)\Delta t=\begin{cases}\sum\limits_{t=a}^{b-1}f(t), & a<b\\ 0, & a=b.\\ -\sum\limits_{t=b}^{a-1}f(t), & a>b\end{cases}$

时间尺度上动力方程的一般形式可以由下面的方程表达:

$$F(t,x,x^{\Delta},x^{\Delta\Delta},\cdots,x^{\Delta^n})=0,\quad t\in\mathbb{T},$$

其中,x^{Δ^n}称为n阶导数.当$\mathbb{T}=\mathbf{R}$时,上述方程就是通常的常微分方程;当$\mathbb{T}=\mathbf{Z}$时,就是通常的常差分方程.

定义 1.3.9　称函数$p:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$是回归的,如果

$$1+\mu(t)p(t)\neq 0,\quad \forall t\in\mathbb{T}^k.$$

所有 rd 连续的且是回归的函数$p:\mathbb{T}\to\mathbf{R}$的集合,记为$\mathcal{R}=\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathbf{R})$.

引理 1.3.9　如果$p(t)$是 rd 连续的,且是回归的,那么初值问题

$$x^{\Delta}(t)=p(t)x(t),x(t_0)=x_0$$

的解一定存在,且

$$x(t)=x_0e_p(t,t_0),$$

这里,$e_p(t,t_0)=\exp\left\{\int_{t_0}^t\zeta_{\mu(s)}(p(s))\Delta s\right\}$是时间尺度上的指数函数,它满足半群性质:

$$e_p(t,r)e_p(r,s)=e_p(t,s),\quad \forall r,s,t\in\mathbb{T},$$

其中

$$\zeta_{\mu}(z)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+\mu z)}{\mu}, & \mu\neq 0\\ z, & \mu=0\end{cases}.$$

1.4　本书内容安排

本书由五章组成,主要内容安排如下:

第 1 章,绪论.概述了时滞动态方程的研究背景和发展状况,并对时间尺度上的微积

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com