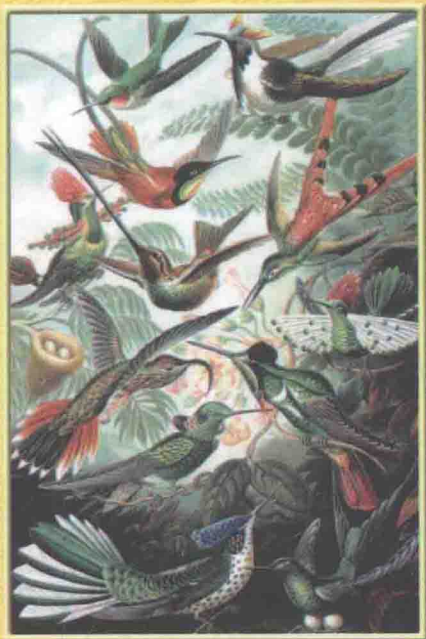


《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

代数多项式

宫浩 刘凤艳 高丽娟 编译



◎ 关于 x 和 y 的对称多项式

◎ 初等代数的应用

◎ 含有 3 个变量的反对称多项式

◎ 基础代数的应用

◎ 关于含任意个变量的对称多项式



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

代数多项式

宫浩 刘凤艳 高丽娟 编译



- ◎ 关于 x 和 y 的对称多项式
- ◎ 初等代数的应用
- ◎ 含有 3 个变量的反对称多项式
- ◎ 基础代数的应用
- ◎ 关于含任意个变量的对称多项式



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

如果使用题中给的对称条件,许多初等数学问题解起来都很简单.本书介绍了怎样应用对称条件解方程组及不等式,所有这些问题的解答都使用基于对称多项式定理的公式.

本书适合于准备参加竞赛的中学生、师范学院的学生和数学教师及数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

代数多项式/宫浩,刘凤艳,高丽娟编译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.6

ISBN 978-7-5603-4566-6

I. ①代… II. ①宫… ②刘… ③高… III. ①对称多项式 IV. ①O174.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 010539 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 齐新宇

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 19.5 字数 230 千字

版 次 2014 年 6 月第 1 版 2014 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-4566-6

定 价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

第 0 章	引言 //	1
第 1 章	关于 x 和 y 的对称多项式 //	5
1.1	对称多项式的例子 //	5
1.2	含两个变量的对称多项式的基本定理 //	7
1.3	用 σ_1 和 σ_2 表示的等次之和的表达式 //	8
1.4	基本定理的证明 //	10
1.5	定理的唯一性 //	11
1.6	华林公式(I) //	14
第 2 章	初等代数的应用(I) //	18
2.1	解方程组 //	18
2.2	引用辅助未知量 //	26
2.3	关于二次方程的问题 //	31
2.4	不等式 //	34
2.5	递推方程 //	38
2.6	对称多项式因式分解 //	44
2.7	不同的题型 //	48
第 3 章	关于 3 个变量的对称多项式 //	51
3.1	定义和例题 //	51
3.2	关于含 3 个变量的初等对称多项式的基本定理 //	53
3.3	单项式轨道 //	56
3.4	基本定理的证明 //	61
3.5	华林公式(II) //	62
第 4 章	初等代数的应用(II) //	64
4.1	解三元方程组 //	64
4.2	因式分解 //	73
4.3	恒等式的证明 //	77

4.4	不等式 //	85
4.5	分母有理化 //	88
第 5 章 含有 3 个变量的反对称多项式 //		96
5.1	定义和例题 //	96
5.2	关于反对称多项式的基本定理 //	97
5.3	判别式及讨论方程根的应用 //	100
5.4	应用判别式证明不等式 //	106
5.5	偶置换和奇置换 //	109
5.6	偶对称多项式 //	111
第 6 章 基础代数的应用 //		114
6.1	因式分解 //	114
6.2	证明恒等式和化简代数式 //	118
6.3	含 3 个变量的对称多项式的因式分解 //	121
第 7 章 关于含任意个变量的对称多项式 //		126
7.1	关于含任意个变量的基本对称多项式 //	126
7.2	关于含任意个变量的对称多项式的基本定理 //	130
7.3	用基本对称多项式表示的等次之和的表达式 //	132
7.4	含 n 个变量的初等对称多项式和 n 次代数方程的韦达定理 //	135
7.5	待定系数法 //	139
附录 关于高次代数方程的一些资料 //		144
1. 余数定理 //		144
2. 寻找整系数多项式的整根 //		145
3. 寻找复整根 //		149
4. 代数基本定理和分解多项式成一次因式乘积定理 //		151
5. 答案 //		155
编辑手记 //		292



引言

第

0

章

中学数学教材中解高次方程组是最复杂的问题之一.

对于一元二次方程

$$x^2 + px + q = 0$$

得到公式

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

最后得到标准解. 对于一次方程组也有解的标准例子(消去等系数的未知量). 但是对于高次方程组的情况是更复杂的.

更多的解上述方程组的一般方法是未知量消元法. 我们以下面的方程组为例讲解.

例 解关于 y 的二次方程组 $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x^2+y^2=19 \end{cases}$, 我们得到

$$y=4-x$$

将得到的关于 y 的表达式代入第二个方程, 得到新的方程只存在一个未知量 x

$$2x^2+(4-x)^2=19$$

化简方程后显然有

$$3x^2-8x-3=0$$

解上面的方程, 我们得到两个解

$$x_1=3, x_2=-\frac{1}{3}$$

这些解中的每一个都符合定义值 y (我们借助于方程 $y=4-x$ 求出它)

$$y_1=1, y_2=\frac{13}{3}$$

经过检验, 求出两组解

$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=1 \end{cases}, \begin{cases} x_2=-\frac{1}{3} \\ y_2=\frac{13}{3} \end{cases}$$

满足原方程组.

未知量消元法是非常普遍的. 理论上由任意两个含两个未知量的代数方程构成, 消去一个未知量, 即为未知量消元法. 但是消元过程不总是如此简单, 如拆分高次的例子. 若代入方程得到非常高的次幂是不适合使用消元方法的. 在高等数学中, 如果一个方程组 (含有两个未知量) 有一个最高次数是 n , 第二个最高次数是 m , 则消元后得到的是次数为 mn 的方程.

以下面的方程组为例

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases}$$

由第一个方程我们得到： $x^2 = 5 - y^2$ ，然后

$$x^6 = (5 - y^2)^3 = 125 - 75y^2 + 15y^4 - y^6$$

也就是说由第二个方程我们得到： $x^3 = 9 - y^3$ ，然后

$$x^6 = 81 - 18y^3 + y^6$$

求出关于 x^6 的等式，我们得到只含有一个未知量 y 的方程

$$2y^6 - 15y^4 - 18y^3 + 75y^2 - 44 = 0$$

但是这个方程是六次方程 ($2 \times 3 = 6$ ，这完全符合我们提到的高数定理)，不能用初中的公式解六次幂方程，这样一来，消元法把我们带入绝境。

用这些不充分的方法消元（在解高次方程组的情况下）很少能满足中学的内容。通常解方程组都是借助于某一构造方法，但通常找不到这样常规的方法。每一个方程组都有自己的解法，所得的经验也只能解一个方程组，很少能帮助解其他的。结果中学数学的“这一章”变成了难题章，只能单独用原始的方法来解它们。

本书的目的——介绍一种令读者满意的解高次方程组的一般方法。它不像消元法一样普遍，因此不适用于所有方程组。但是这种方法适用于大多数中小学生学习方程组，它主要区别消元法的是，代入后不提高方程的幂，而是降幂。

这里所指的方法的原理是利用对称多项式定理。读者将看到，定理本身非常简单，它不只能解许多数学方程组，还可以解许多其他的数学问题（解无理方程、证明恒等式和不等式、因式分解，等等）。这些类型的一系列问题将在本书中分别进行研究，在每一章的最后，

代数多项式

读者都可以找到适合自己的方法. 这些题中有的是非常难的, 建议把它们中的某些题放到奥数中去. 借助于对称多项式定理理解这些题, 步骤很简单.



关于 x 和 y 的对称多项式

第

1

章

1.1 对称多项式的例子

打开 В. Б. Лидского, Л. В. Овсянникова, А. Н. Тулайкова и М. И. Шабунина 所著的教材《初等数学问题》(1960 年著), 最难的题便是解高次方程组, 下面我们举一些例子:

$$1) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x + y = a + b \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x^3 + y^3 = 5a^3 \\ x^2y + xy^2 = a^3 \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} 2(x+y) = 5xy \\ 8(x^3 + y^3) = 65 \end{cases};$$

$$6) \begin{cases} x+y=1 \\ x^4 + y^4 = 7 \end{cases};$$

$$7) \begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases};$$

$$8) \begin{cases} x^2 + y^2 = axy \\ x^4 + y^4 = bx^2 y^2 \end{cases}.$$

所有的这些方程组都有一个共同的特性——方程左边是关于 x, y 的多项式, 多项式有共同的表达方式.

x, y 列出相同的表达方式的多项式被称为是对称的, 其精确叙述为:

关于 x, y 的多项式被称为是对称的, 如果把 x 换成 y, y 换成 x , 多项式不变. 例如多项式 $x^2 y + xy^2$ 是对称的, 多项式 $x^3 - 3y^2$ 不是对称的; 如果把 x 换成 y, y 换成 x , 它变成多项式 $y^3 - 3x^2$, 与首要的条件不相符.

下面引入重要的对称多项式的例子. 由算术可知, 对于任意数 x 和 y , 两个数的和交换被加数的位置不改变, 即

$$x+y=y+x$$

这个等式显示出 $x+y$ 是对称的.

正是这样, 由乘法交换律

$$xy=yx$$

得出, 乘积 xy 是对称多项式.

对称多项式 $x+y$ 和 xy 是最简单的形式, 它们被称为基础对称多项式. 对它们应用特殊符号



$$\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$$

除了 σ_1 和 σ_2 , 我们常遇到被称为等次之和, 即多项式 $x^2 + y^2, x^3 + y^3, \dots, x^n + y^n, \dots$, 用 s_n 表示 $x^n + y^n$, 这样说来

$$\begin{aligned} s_1 &= x + y \\ s_2 &= x^2 + y^2 \\ s_3 &= x^3 + y^3 \\ s_4 &= x^4 + y^4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

1.2 含两个变量的对称多项式的基本定理

存在得到对称多项式的简单方法: 取任意(通常情况下是不对称的)含有 σ_1 和 σ_2 的多项式, 用含 x 和 y 的表达式代入其替换 σ_1 和 σ_2 . 很显然, 在这种情况下, 我们得到含 x 和 y 的对称多项式(要知道, 无论 $\sigma_1 = x + y$ 还是 $\sigma_2 = xy$, 在交换 x 和 y 的位置时不发生改变, 不发生改变的所有多项式变成由 $x + y$ 和 xy 表示). 例如由多项式 $\sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_2$ 得到对称多项式

$$(x + y)^3 - (x + y)xy = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$$

于是, 如果取任意含 σ_1 和 σ_2 的多项式, 用表达式 $\sigma_1 = x + y$ 和 $\sigma_2 = xy$ 代换 σ_1 和 σ_2 , 则得到关于 x 和 y 的表达式. 这就产生一个问题: 用这个方法构造对称多项式的一般形式是否可以借助它得到任意的对称多项式?

通过对例子的观察得出命题的可能性. 例如, 等次之和 s_1, s_2, s_3, s_4 很容易用 σ_1 和 σ_2 表示

$$\begin{aligned} s_1 &= x + y = \sigma_1 \\ s_2 &= x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \end{aligned}$$

代数多项式

$$s_3 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) =$$

$$(x+y)[(x+y)^2 - 3xy] = \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2)$$

$$s_4 = x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2\sigma_2^2$$

关于对称多项式 $x^3y + xy^3$, 我们有

$$x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2) = \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)$$

进一步分析得到结论: 无论什么样的对称多项式经过复杂的计算以后都可以用初等对称多项式 σ_1 和 σ_2 表示. 这样说来, 此例子引出下面的定理:

定理 1 任意关于 x 和 y 对称的多项式都可以表示成关于 $\sigma_1 = x+y$ 和 $\sigma_2 = xy$ 的多项式.

当然, 例题中多项式的代换不能作为定理的证明. 值得注意的是得到的第一个对称多项式不能用 σ_1 和 σ_2 同时表示.

1.3 用 σ_1 和 σ_2 表示的等次之和的表达式

最初我们证明的定理不是关于任意的对称多项式, 而只有等次之和. 总而言之, 我们建立每一个等次之和 $s_n = x^n + y^n$, 都可以表示成关于 σ_1 和 σ_2 的多项式.

为了这个目标, 我们将等式 $s_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1}$ 的两边乘以 $\sigma_1 = x+y$, 得到

$$\begin{aligned}\sigma_1 s_{k-1} &= (x+y)(x^{k-1} + y^{k-1}) = \\ &= x^k + xy^{k-1} + x^{k-1}y + y^k = \\ &= x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) = s_k + \sigma_2 s_{k-2}\end{aligned}$$

这样

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} \quad (1)$$

由这个公式我们可以推断出结论的正确性. 事实

上,很早我们就引入用多项式 σ_1 和 σ_2 表示的等次之和 s_1 和 s_2 . 但是如果我们已经知道等次之和 $s_1, s_2, \dots, s_{k-2}, s_{k-1}$ 可以表示成公式(1)的形式,那么我们可以得到等次之和 s_k 用 σ_1 和 σ_2 表示的表达式. 换言之,我们可以顺次得到用 σ_1 和 σ_2 表示的等次之和的表达式:知道 s_1, s_2 , 由公式(1)得到 $s_3, \dots$. 很显然,或早或晚我们都能得到用 σ_1 和 σ_2 表示的等次之和 s_n . 这样一来,我们的结论得证.^①

公式(1)构成了叙述证明的基础,不只是用来断定用 σ_1 和 σ_2 表示的等次之和 s_n , 还能依次计算出 σ_1 和 σ_2 表示的等次之和 s_n . 于是我们借助于公式(1)依次得到

$$\begin{aligned} s_3 &= \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 = \sigma_1 (\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2 \sigma_1 = \\ &\quad \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2 \\ s_4 &= \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 = \sigma_1 (\sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2) - \sigma_2 (\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \\ &\quad \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \sigma_2 + 2\sigma_2^2 \\ s_5 &= \sigma_1 s_4 - \sigma_2 s_3 = \sigma_1 (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \sigma_2 + 2\sigma_2^2) - \\ &\quad \sigma_2 (\sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2) = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3 \sigma_2 + 5\sigma_1 \sigma_2^2 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

以下式子引用 σ_1 和 σ_2 表示等次之和 $s_1, s_2, \dots, s_{10}$; 这些表达式为我们解题带来方便. 我们给读者介绍借助于公式(1)建立的以下式子.

用 $\sigma_1 = x + y$ 和 $\sigma_2 = xy$ 表示等次之和 $s_n = x^n + y^n$

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 \\ s_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ s_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2 \end{aligned}$$

① И. С. Соминского «Метод математической индукции», физматгиз, 1961.

$$\begin{aligned}
s_4 &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 \\
s_5 &= \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 \\
s_6 &= \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 \\
s_7 &= \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3 \\
s_8 &= \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4 \\
s_9 &= \sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4 \\
s_{10} &= \sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2}$$

1.4 基本定理的证明

现在不难完成 1.2 中定理 1 的证明. 任意关于 x 和 y 的对称多项式包含 (化简同类项以后) 两个被加项.

第一种情况是 x 和 y 次数相同的单项式, 即单项式 ax^ky^k . 显然

$$ax^ky^k = a(xy)^k = a\sigma_2^k$$

即这个单项式可以直接用 σ_2 表示.

第二种情况是 x 和 y 次数不相同的单项式, 即单项式 bx^ky^l , 这里 $k \neq l$. 显然, 和单项式 bx^ky^l 一起的对称多项式包含单项式 bx^ly^k , 将 bx^ky^l 中的字母 x 和 y 交换所得. 换言之, 二项式 $b(x^ky^l + x^ly^k)$ 可代入对称多项式. 假设明确 $k < l$, 可以把这个二项式重新写成下面的形式

$$b(x^ky^l + x^ly^k) = bx^ky^k(y^{l-k} + x^{l-k}) = b\sigma_2^k s_{l-k}$$

因为根据证明, 等次之和 s_{l-k} 可以表示成 σ_1 和 σ_2 , 则所研究的二项式也可以通过 σ_1 和 σ_2 表示.

于是, 每一个对称多项式都可以表示成单项式

ax^ky^k 和二项式 $b(x^ky^l+x^ly^k)$ 的和, 它们中的每一个又可以表示成 σ_1 和 σ_2 . 因而, 任意一个对称多项式可以表示成含 σ_1 和 σ_2 的多项式的形式.

定理得证.

例 给出对称多项式

$$f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 - x^3y^3 + 2xy^4 - 7x^2y^2 + y^5 + 3x^2y^3 - 5xy^3 - 5x^3y + 2x^4y$$

在证明中将它划分为单项式和二项式, 我们得到

$$\begin{aligned} f(x, y) = & -x^3y^3 - 7x^2y^2 + (x^5 + y^5) + \\ & 3(x^3y^2 + x^2y^3) + 2(xy^4 + x^4y) - \\ & 5(xy^3 + x^3y) \end{aligned}$$

或者是另一种形式

$$\begin{aligned} f(x, y) = & -x^3y^3 - 7x^2y^2 + (x^5 + y^5) + \\ & 3x^2y^2(x + y) + 2xy(x^3 + y^3) - \\ & 5xy(x^2 + y^2) = \\ & -\sigma_2^3 - 7\sigma_2^2 + s_5 + 3\sigma_2^2\sigma_1 + 2\sigma_2s_3 - 5\sigma_2s_2 \end{aligned}$$

通过代换, 最后把等次之和用 σ_1 和 σ_2 表示, 我们得到最后结果

$$\begin{aligned} f(x, y) = & -\sigma_2^3 - 7\sigma_2^2 + (\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) + \\ & 3\sigma_1\sigma_2^2 + 2\sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - \\ & 5\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \\ & \sigma_1^5 - 3\sigma_1^3\sigma_2 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_2^3 + 3\sigma_2^2 \end{aligned}$$

1.5 定理的唯一性

我们看到, 如果给出关于 x 和 y 的对称多项式 (不超过最高次幂), 则很容易表示成 σ_1 和 σ_2 . 基本定理证明的叙述恰好含有令对称多项式分解为含 σ_1 和

σ_2 的初等对称多项式. 当然出现一个问题: 是否能再找到一种方法用 σ_1 和 σ_2 表示多项式 $f(x)$? 看来这是不可能的. 我们无论通过什么样的方法用 σ_1 和 σ_2 表示对称多项式 $f(x)$, 总是得到一个结论. 换句话说, 下面的定理是正确的.

定理 2(唯一性) 如果把 $\sigma_1 = x + y$ 和 $\sigma_2 = xy$ 代入多项式 $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ 和 $\psi(\sigma_1, \sigma_2)$ 中, 化成对称多项式 $f(x)$, 则它们是相等的: $\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = \psi(\sigma_1, \sigma_2)$.

证明 证明定理唯一性的充分条件常常只有一种情况, 当 $f(x) = 0$ 时. 换言之, 需要证明下面的结论:

(1) 如果多项式 $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ 在代入 $\sigma_1 = x + y$ 和 $\sigma_2 = xy$ 时化为零, 则它恒等于零.

我们表明, 由定理的唯一性能推导出结论(1). 假设多项式 $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ 和 $\psi(\sigma_1, \sigma_2)$ 在代入 $\sigma_1 = x + y$ 和 $\sigma_2 = xy$ 时, 给出同样的结果 $\varphi(x + y, xy) = \psi(x + y, xy)$. 当多项式 $\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2) - \psi(\sigma_1, \sigma_2)$ 时, 在以上的代换下变为零

$$\Phi(x + y, xy) = \varphi(x + y, xy) - \psi(x + y, xy)$$

因此, 如果结论(1)正确, 则 $\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = 0$, 因而 $\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = \psi(\sigma_1, \sigma_2)$.

为了证明结论(1), 我们需要了解由两个变量构成的多项式的首项. 设 $Ax^k y^l$ 和 $Bx^m y^n$ 是两个关于 x 和 y 的单项式, 确定 x 的指数是高次幂, 如果当它们相等时, y 的指数也是. 换言之, 认为单项式 $Ax^k y^l$ 的次数高于 $Bx^m y^n$, 如果 $k > m$ 或 $k = m$ 或 $l > n$. 例如, 单项式 $x^4 y^2$ 的次数高于 $x^2 y^7$, 而单项式 $x^4 y^6$ 的次数高于 $x^4 y^5$. 显然, 如果 $Ax^k y^l$ 的次数高于 $Bx^m y^n$, $Bx^m y^n$ 的次数高于 $Cx^p y^q$, 则 $Ax^k y^l$ 的次数高于 $Cx^p y^q$.

