普通高等教育"十二五"规划教材

现代控制理论基础

Fundamentals for Modern Control Theory

孙炳达　梁慧冰○编著

第3版

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

现代控制理论基础

第3版

孙炳达　梁慧冰　编著
陈　玮　主审

机 械 工 业 出 版 社

本书是专门为应用型自动化、电气工程、测控技术类专业本科生和非控制理论学科的硕士，如机电、信息、传感器与检测、计算机应用等研究方向的研究生学习和了解现代控制技术和方法而撰写的《现代控制理论基础》教材，也可供其他相关专业本科生或研究生及从事控制工程的技术人员使用。

本书重点介绍和讨论了线性系统理论中最基础又最重要的概念、原理和分析系统的综合方法，主要内容包括：现代控制理论中建立被控系统数学模型的主要方法；系统的运动状态分析、能控性及能观测性和系统稳定性的分析；系统的综合（设计）方法和工程应用的实例。

本书重点突出、概念清晰、内容精练、简明易懂和具有工程应用的特色，既方便教师教学也方便学生学习。

图书在版编目（CIP）数据

现代控制理论基础/孙炳达，梁慧冰编著．—3 版．—北京：机械工业出版社，2014.7

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-111-46324-5

Ⅰ.①现…　Ⅱ.①孙…　②梁…　Ⅲ.①现代控制理论－高等学校－教材　Ⅳ.①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 064682 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：贡克勤　责任编辑：贡克勤　徐　凡
版式设计：赵颖喆　责任校对：贾立萍
封面设计：陈　沛　责任印制：刘　岚
涿州市京南印刷厂印刷
2014 年 7 月第 3 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 12.75 印张 · 306 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-46324-5
定价：26.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

第3版前言

本书是专门为应用型自动化、电气工程、测控技术类专业本科生和非控制理论学科的硕士，如机电、信息、传感器与检测、计算机应用等研究方向的研究生学习和了解现代控制技术和方法而撰写的《现代控制理论基础》教材，也可供其他相关专业本科生或研究生及从事控制工程的技术人员使用。本书重点突出、概念清晰、内容精练、简明易懂和具有工程应用的特色，既方便教师教学也方便学生学习。

线性系统理论是现代控制理论的基础，也是目前理论上最完善、技术上最成熟、工程应用最广泛的一个分支。本书重点介绍和讨论了线性系统理论中最基础又最重要的概念、原理和分析系统的综合方法。

本书共分6章。第一章介绍现代控制理论中建立系统数学模型的主要方法；第二~四章涉及系统的性能分析，包括系统的运动状态、能控性及能观测性和系统稳定性的分析；第五章讨论了系统的综合（设计）方法问题；第六章为应用实例，有利于学生对全书内容进一步理解和掌握。

本次主要对第2版中的第一~三章内容进行修订，其中第一、二章，第三章的第一、二节由孙炳达重新撰写，第三章的第三~九节由梁慧冰修订。本书的出版，曾得到广东工业大学、广东技术师范学院天河学院、广东省重点学科及机械工业出版社等单位的支持；广东工业大学自动化学院陈玮教授、广东技术师范学院自动化学院张绪红博士后、王中生教授、岑健教授和华南理工大学机电研究所李迪教授都曾提出了许多宝贵的建议或意见，特别是编写及修订过程中参阅和引用了同类教材的一些内容，编者对上述单位和个人表示深深谢意！

由于编者水平有限，书中难免仍会有不妥和错误之处，衷心希望读者批评指正。

编　者

第2版前言

随着科学技术的迅速发展，现代控制理论在经典理论的基础上得以建立和发展，在工业控制领域以及其他领域，如航空航天、核技术、生物工程等新兴领域中发挥着越来越重要的作用。因此，自20世纪60年代以来，国内外的许多大学都把现代控制理论（基础）列为自动化及相关专业的专业理论的基础课程。

本书是1998版《现代控制理论基础》一书的修订本。《现代控制理论基础》自出版以来，由于体系新颖、物理概念清晰、可读性强，深受广大读者欢迎，曾为国内特别是地方院校近百所大学广泛采用作为本科生教材，已连续7次重印。《现代控制理论基础》第2版，在保持第1版的体系结构和基本特色的前提下，依据21世纪教学改革精神和借鉴近年来使用该教材的课程教学成果和经验，并吸纳教材使用中的反馈意见和有关建议，对书中某些章节的内容安排和论述方式作了改动和补充。第2版主要在如下4个方面作了有价值的发展和改善：

一是增加离散时间系统的示例和建立状态空间描述的具体方法，使所阐述的内容更系统和实用；二是对线性定常系统的特征结构从概念和算法角度作较为系统的论述，以帮助读者对系统分析和综合的理解和计算；三是增加了组合系统的状态空间描述；四是添加了状态空间分析法在工程中的应用实例，以倒立摆和桥式起重机为示例讲述对实际系统建模、分析和综合等原理和算法的具体应用，引导读者正确运用所学理论去解决工程中的实际问题。

本书可作为高校、大专和继续教育的自动化、电子与信息及相近专业的“现代控制理论（基础）”课程的教材，也可供工程技术人员和青年读者自学使用。第一章的第六节线性系统的特征结构可不必一次全部讲述和学习，可在其他章节需要该类知识时插入。学时较少或要求相对偏低的院校可略去第一章的第九节、第三章的第七节和第八节以及第六章的第二节。

本书一～三章由广东工业大学梁慧冰教授编写，第四～六章由广东技术师范学院孙炳达教授编写。多媒体教学课件由广东工业大学屠宇老师制作。在本书编写过程中，得到了广东工业大学、广东技术师范学院和机械工业出版社等单位，以及广东工业大学自动化学院的老师的支持，特别是符曦教授对全书进行了审阅和批改，在此，编者对上述单位和个人以及本书所列参考文献的作者，一并表示衷心的感谢。

最后，需要指出，尽管进行了修订，但由于编者水平有限，书中难免仍会有不妥和错误之处，衷心希望读者不吝批评指正。

编　者

目　　录

第一章 控制系统的状态空间描述

系统的“数学模型”，能反映系统固有的“稳态、动态特性”。

经典控制理论中，系统的“数学模型”是用微分方程、传递函数、动态结构图等来描述的，这种描述又常称为系统的“外部描述”；控制对象主要是单输入－单输出的线性定常系统；采用的分析和综合方法，主要是基于复数域的间接方法，即频率特性法和根轨迹法。这两种方法，对性能要求不必太精准的系统来说，已被全世界控制界和工程应用界证明是完全合适而且是很有成效的。

由于控制系统是朝着复杂的大系统发展，控制任务更加复杂，其对控制的程度、范围及适应能力的要求越来越高、性能要求越来越精准。经典控制理论已难予信任和满足这类系统的分析及设计要求，因此便产生了现代控制理论并得到了迅速的发展。

现代控制理论中，系统的“数学模型”通常是用状态空间表达式或状态变量图来描述的，这种描述又常称为系统的“内部描述”；控制对象可以是单输入－单输出，可以是多输入－多输出，可以是线性的也可以是非线性的，可以是定常的也可以是时变的；现代控制理论采用的是时域的直接分析方法，能对给定的性能或综合指标设计出最优控制系统。

目前，现代控制理论主要包含5大方面内容或者说5个分支，分别是线性系统理论、系统建模与参数辨识、最优滤波、最优控制和自适应控制。其中，线性系统理论是现代控制理论的基础，也是目前理论上最完善、技术上最成熟、工程应用最广泛的一个分支，它是以微分方程、线性代数（矩阵运算）为主要的数学工具，以状态空间为基础的分析、综合系统的方法。

本章只重点介绍和讨论建立单输入－单输出线性定常系统状态空间描述的一些主要方法及相关问题，一是因为所讨论的方法具有代表性，二是这类系统在工业中目前仍占有很大比例。

第一节 状态空间描述的基本定义及一般形式

一、基本定义与概念

1. 状态

控制系统状态的定义是，能完全地描述或确定系统动态（时域）行为的个数最少的一组变量。

定义中的“完全描述或确定”的含义是指，如果给出了这组变量的各初值和 $t\geqslant 0$ 时的系统输入量，那么，系统在 $t\geqslant 0$ 时的任何瞬间的行为都能被完全确定。

定义中“个数最少”的含义是指，对于所选定的一组变量，若减少了其中的一个，则无法确定系统的行为；若再增加一个又没有必要，因此，要选择线性无关的变量作为状态。

2. 状态变量

构成系统状态中的每一个变量。常用$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$，…表示。

状态变量通常是物理量，或是一些物理量的组合；可以是能测量的，也可以是不能测量的。但是，从工程角度，状态变量应选择容易测量的物理量为好，这对系统的分析和实施控制都会比较方便。

特别要**注意**的是，对于给定的系统，状态变量的个数等于系统的阶数，即系统中独立储能元件的数目。所以，n阶系统仅可选n个状态变量，但选取具有非唯一性。例如，三相异步电动机在两相同步旋转坐标系中的数学模型是5阶微分方程，但系统中的独立变量有9个，所以，状态变量通常在这9个变量中，任选5个作为状态变量。

3. 状态矢量

状态矢量又称状态向量，把状态变量x_1，x_2，…，x_n，视为向量$\boldsymbol{x}(t)$的分量，则称$\boldsymbol{x}(t)$为状态矢量。常简写为$\boldsymbol{x}$，即

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad 或 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=(x_1,\ x_2\cdots,\ x_n)$$

4. 状态空间

以状态变量x_1，x_2，…，x_n为坐标轴所构成的n维空间。

n维空间是一个抽象的概念，但可以从几何学上的二维空间是一个平面、三维空间是一个立方体推广和联想。

5. 状态方程

状态变量的导数与状态变量和输入量之间关系的一阶微分方程组（连续系统）或一阶差分方程组（离散系统）。

6. 输出方程

系统输出量与状态变量和输入量之间关系的代数方程。输出量常用英文的大小写字母“Y”“y”表示。

7. 状态空间表达式

状态方程和输出方程，总称为系统的状态空间表达式，或称为动态方程式，它构成了对系统动态行为的完整描述。

8. 状态变量图

反映系统输出量与输入量及各状态变量之间传递关系的图形。

系统的**状态空间描述**，是通过“**状态空间表达式**”或（和）“**状态变量图**”来表示的。

二、状态空间表达式的一般形式

由定义可知，系统的状态空间表达式，应包含两个方程：一个是状态方程；另一个是输出方程。

1. 单输入-单输出线性系统

（1）定常连续系统

一单输入-单输出线性定常连续系统，设u为输入量，y为输出量。若系统有n个状态变量x_1，x_2，…，x_n，则根据**状态方程**的定义，它是由n个一阶微分方程式组成的一方程组，一般形式为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_nu\end{cases} \tag{1-1}$$

式中的系数 a_{ij}（$i=1, 2, \cdots, n$；$j=1, 2, \cdots, n$），$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 与系统参数有关。

输出方程表达式的一般形式为

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + du \tag{1-2}$$

式中的系数 c_i（$i=1, 2, \cdots, n$）和 d 与系统参数有关。

式（1-1）和式（1-2）构成了描述系统的**状态空间表达式**。写成**向量－矩阵式**为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}\boldsymbol{u} & \textbf{状态方程} \\ \boldsymbol{y} = (c_1c_2\cdots\cdots c_n)\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} + \boldsymbol{du} & \textbf{输出方程}\end{cases} \tag{1-3}$$

或简写成

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{bu} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{cx} + \boldsymbol{du}\end{cases} \tag{1-4}$$

式中　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{c} = (c_1c_2\cdots\cdots c_n)$

$\boldsymbol{x}$ 是 $n\times1$ 维的**状态向量**；$\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 维矩阵，称为**系统矩阵**；$\boldsymbol{b}$ 是 $n\times1$ 维向量，称为**输入向量或控制向量**；$\boldsymbol{c}$ 是 $1\times n$ 维向量，称为**输出向量**；d 为标量，称为**直接传输系数**。

状态空间表达式用向量矩阵方程表示，能方便用计算机进行计算，有利于对系统的分析和综合。

（2）定常离散系统

线性定常离散系统的状态空间表达式与线性定常连续系统的雷同，只是定常离散系统的状态方程由向量差分方程组成、输出方程用离散信号表达而已，简写形式如下：

$$\begin{cases}x(k+1) = \boldsymbol{A}x(k) + \boldsymbol{b}u(k) & \textbf{状态方程} \\ y(k) = \boldsymbol{c}x(k) + \boldsymbol{d}u(k) & \textbf{输出方程}\end{cases} \tag{1-5}$$

式中，相关矩阵的维数及名称与定常系统相同。

（3）时变系统

对于一单输入－单输出线性时变系统，设输入量为 u，输出量为 y。若有 n 个状态变量

x_1，x_2，…，x_n，则其状态方程和输出方程的形式，只要将定常系统的状态空间表达式（1-3）中的系数，或式（1-4）中的$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$和d中的某些元素或全部元素改为时间t的函数，就是时变系统的状态空间表达式的一般形式。简写为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(t)u & \text{状态方程}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}(t)u & \text{输出方程}\end{cases} \tag{1-6}$$

式中，相关矩阵的维数和名称与定常系统相同。

2. 多输入－多输出线性系统

（1）线性定常系统

一多输入－多输出线性定常系统，设有r个输入量u_1，u_2，…u_r，m个输出量y_1，…，y_m。若有n个状态变量x_1，x_2，…，x_n则其**状态方程**的一般表达式为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+b_{11}u_1+b_{12}u_2+\cdots+b_{1r}u_r\\ \dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+b_{21}u_1+b_{22}u_2+\cdots+b_{2r}u_r\\ \vdots\\ \dot{x}_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+b_{n1}u_1+b_{n2}u_2+\cdots+b_{nr}u_r\end{cases} \tag{1-7}$$

输出方程的一般表达式为

$$\begin{cases}y_1=c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n+d_{11}u_1+d_{12}u_2+\cdots+d_{1r}u_r\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n+d_{21}u_1+d_{22}u_2+\cdots+d_{2r}u_r\\ \vdots\\ y_m=c_{m1}x_1+c_{m2}x_2+\cdots+c_{mn}x_n+d_{m1}u_1+d_{m2}u_2+\cdots+d_{mr}u_r\end{cases} \tag{1-8}$$

式（1-7）和式（1-8），构成了多输入－多输出线性定常系统的状态空间描述。写成矩阵的形式为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BU} & \text{状态方程}\\ \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DU} & \text{输出方程}\end{cases} \tag{1-9}$$

式中　$\boldsymbol{X}=(x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_n)^{\mathrm{T}}$，$n\times1$维；$\boldsymbol{Y}=(y_1\ \ y_2\ \ \cdots\ \ y_m)^{\mathrm{T}}$，$m\times1$维

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}，n\times n\text{ 维}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r}\\ \vdots & & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr}\end{pmatrix}，n\times r\text{ 维}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}，m\times n\text{ 维}\qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r}\\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr}\end{pmatrix}，m\times r\text{ 维}$$

$$\boldsymbol{U}=(u_1\ \ u_2\ \ \cdots\ \ u_r)^{\mathrm{T}}，r\times1\text{ 维}$$

(2) 线性时变系统

一多输入－多输出线性时变系统，设有 r 个输入量 u_1，u_2，…，u_r，m 个输出量 y_1，…，y_m。若有 n 个状态变量，则其状态空间的一般表达式，只要将式（1-7）和式（1-8）中的参数或式（1-9）中矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 中的某些元素或全部元素改为时间 t 的函数，就是时变系统的状态空间描述的一般式，简写形式为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{U} & \text{状态方程}\\ \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{U} & \text{输出方程}\end{cases}\tag{1-10}$$

3. 非线性系统

非线性系统的状态空间描述，也是由状态方程和输出方程组成。不同的是，它们是由一组非线性方程组成的。例如，有 r 个输入量，m 个输出量的 n 阶非线性系统（定常或时变）的**状态方程**，是用 n 个一阶非线性微分方程式来表示：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=f_1\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r)\\ \dot{x}_2=f_2\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r)\\ \vdots\\ \dot{x}_n=f_n\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r)\end{cases}\quad \text{状态方程}\tag{1-11}$$

输出方程的一般表达式为

$$\begin{cases}y_1=g_1\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r)\\ y_2=g_2\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_r)\\ \vdots\\ y_m=g_m\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ u_1,\ u_2\ \cdots,\ u_r)\end{cases}\quad \text{输出方程}\tag{1-12}$$

式（1-11）和式（1-12）也可写成矩阵方程形式：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(x,\ u,\ t)\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(x,\ u,\ t)\end{cases}$$

三、状态变量图的一般形式

线性系统状态空间描述也可用状态变量图表示。状态变量图由积分器、比例器、加（减）法器和信号线组成。其中，积分器是用一个方框，方框内画一个积分符号“$\int$”或写入积分的拉普拉斯变换“$\frac{1}{s}$”；比例器也用一个方框，方框内写入其比例系数值；加（减）法器用小圆圈（圈内可带×），如图 1-1 所示。

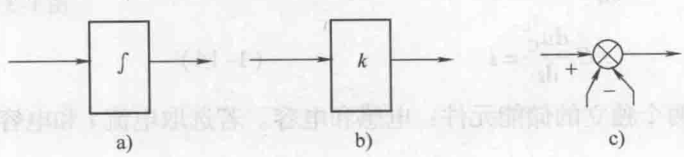

图 1-1　构成变量图的基本单元

a）积分器　b）比例器　c）加减法器

根据系统的状态方程和输出方程容易绘制出其图形。例如，系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\dot{X}=AX+BU & \text{状态方程}\\ Y=CX+DU & \text{输出方程}\end{cases}$$

其状态变量图如图1-2所示。依据状态方程容易画出 $U\to\dot{X}\to X$ **正向传输通道和反馈通道**；依据输出方程可画出**直接传输通道** $U\to D\to Y$。

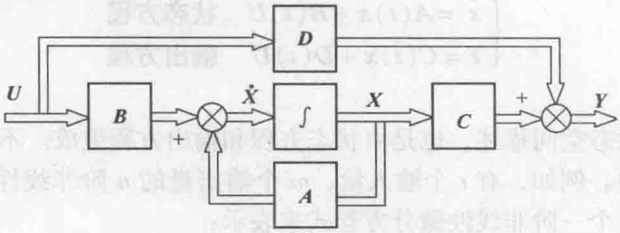

图1-2　系统的状态变量图

图中，双线箭头表示信号传递的是向量信号，但为了绘图方便，今后都简化为单线箭头表示。具体的绘制方法和步骤，将在后面的章节中结合实际系统详细介绍。

第二节　根据系统机理建立状态空间表达式

一般的控制系统可根据系统内部信号所遵循的物理或化学定理或规律，去建立其状态空间表达式，具体步骤如下：

1）确定系统的输入量和输出量。

2）根据系统内部信号所遵循的机理或物理、化学定律，列写出描述系统动态特性的微分方程。

3）选择状态变量，把微分方程化为含状态变量的一阶微分方程组。

4）表示成向量－矩阵方程形式。

下面通过例子，说明用机理方法建立环节（或系统）状态空间表达式的方法和过程。

例1-1　*RLC* 电路如图1-3所示，试求其状态空间表达式并绘制其状态变量图。

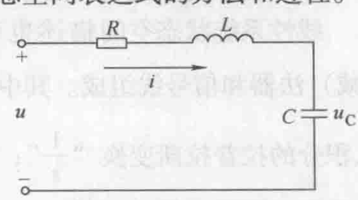

图1-3　*RLC* 电路

解　1）输入量为 u，设输出量为电容电压 u_C。

2）根据电路理论中的相关定律有

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+u_C=u \tag{1-13}$$

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=i \tag{1-14}$$

3）电路中有两个独立的储能元件：电感和电容。若选取电流 i 和电容电压 u_C 为状态变量，即

$$x_1=i,\qquad x_2=u_C$$

将式（1-13）改写成为状态变量 i 的一阶微分方程式

$$\dot{x}_1=-\frac{R}{L}x_1-\frac{1}{L}x_2+\frac{1}{L}u \tag{1-15}$$

将式（1-14）改写为状态变量 u_C 的一阶微分方程式

$$\dot{x}_2=\frac{1}{C}x_1 \tag{1-16}$$

式（1-15）和式（1-16）便构成了图 1-3 所示的 *RLC* 电路的**状态分程**

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-\dfrac{R}{L}x_1-\dfrac{1}{L}x_2+\dfrac{1}{L}u\\[2ex] \dot{x}_2=\dfrac{1}{C}x_1\end{cases} \tag{1-17}$$

输出量用 y 表示，由状态变量可知，**输出方程**为

$$y=u_C=x_2 \tag{1-18}$$

式（1-17）和式（1-18），构成了图 1-3*RLC* 电路的**状态空间表达式**。

4）用向量－矩阵方程式表示

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L}\\ \dfrac{1}{C} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{pmatrix}u & \textbf{状态方程}\\[3ex] y=(0\quad 1)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} & \textbf{输出方程}\end{cases} \tag{1-19}$$

或简写成

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u\\ y=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}\end{cases} \tag{1-20}$$

式中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L}\\ \dfrac{1}{C} & 0\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{c}=(0\quad 1)$$

状态变量图的绘制方法和步骤是，首先画出两个积分器（积分器的个数等于状态变量的个数），并把它们画在适当的位置上；把每个积分器的输出表示为某个状态变量；然后，根据状态方程式（1-17）和输出方程式（1-18），画出相应的比例器和加法器；最后用带箭头的信号线按信号的流通方向将这些元件连接起来。其**状态变量图**如图 1-4 所示。

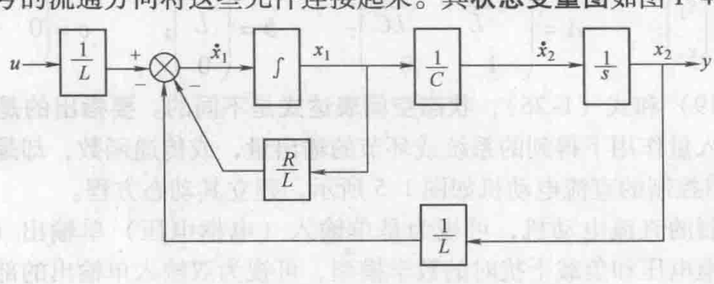

图 1-4　例 1-1 电路的状态变量图

在第一节中指出，对于给定的系统，状态变量的选取具有非唯一性。由于选取的状态变量不同，因此，状态空间表达式也就不同。

对于例1-1的*RLC*电路，若选取电流和电流的积分为状态变量，即

$$x_1=i,\ x_2=\int i\mathrm{d}t,$$

由式（1-14），有

$$u_{\mathrm{C}}=\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t, \tag{1-21}$$

将式（1-21）代入式（1-13），消去中间变量u_{C}后，式（1-13）可改写为

$$\dot{x}_1=-\frac{R}{L}x_1-\frac{1}{LC}x_2+\frac{1}{L}u \tag{1-22}$$

考虑两个状态变量有如下关系：

$$\dot{x}_2=x_1 \tag{1-23}$$

则由式（1-22）和式（1-23），组成了**又一组状态方程**

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-\dfrac{R}{L}x_1-\dfrac{1}{LC}x_2+\dfrac{1}{L}u\\ \dot{x}_2=x_1\end{cases} \tag{1-24}$$

输出量用y表示，由式（1-21）可得输出方程

$$y=u_{\mathrm{C}}=\frac{1}{C}x_2 \tag{1-25}$$

式（1-24）和式（1-25）构成**另一状态空间表达式**。用矩阵式表示

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{LC}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{pmatrix}u & \textbf{状态方程}\\ y=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} & \textbf{输出方程}\end{cases} \tag{1-26}$$

简写成

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u\\ y=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}\end{cases} \tag{1-27}$$

式中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{LC}\\ 1 & 0\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{C}\end{pmatrix}$$

比较式（1-19）和式（1-26），**状态空间表达式是不同的**。**要指出的是**，本章第六节将证明，在同一输入量作用下得到的系统或环节的输出量，或传递函数，却是**完全相同的**。

例1-2　电枢控制的直流电动机如图1-5所示，建立其动态方程。

解　电枢控制的直流电动机，可视为是单输入（电枢电压）单输出（速度）的部件，但要同时考虑电枢电压和负载干扰时的数学模型，可视为双输入单输出的部件。

1）输入量为电枢电压U_{a}和负载转矩M_{Z}，输出量为电动机轴上的角速度ω。

2）列写微分方程。由“电机学”和“电机拖动”内容，可列写出如下方程：

$$U_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + E_b \tag{1-28}$$

$$E_b = C_e \omega \tag{1-29}$$

$$M_d = M_Z + J\frac{d\omega}{dt} + f\omega \tag{1-30}$$

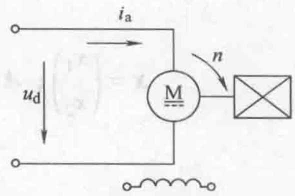

图 1-5　电枢控制的直流电动机

$$M_d = C_m i_a \tag{1-31}$$

式中，E_b 为电动机反电动势；M_d 为电动机的驱动转矩；f 为电动机轴上粘性摩擦系数。

3）选择状态变量。有两个独立的储能元件：一个是电枢电感 L_a，另一个是电动机轴上的转动惯量 J。选储能元件上的物理量，电枢电流 i_a 和电动机轴上的角速度 ω 为状态变量：

$$x_1 = i_a；\ x_2 = \omega$$

式（1-28）中，E_b 是中间变量。将式（1-29）代入式（1-28），消去式（1-28）中的中间变量 E_b 后，并改写成电枢电流 i_a 为状态变量的一阶微分方程式，有

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_a}{L_a}x_1 - \frac{C_e}{L_a}x_2 + \frac{1}{L_a}U_a \tag{1-32}$$

将式（1-31）代入式（1-30），消去式（1-30）的中间变量 M_d 后，并改写为角速度 ω 为状态变量的一阶微分方程式，有

$$\dot{x}_2 = \frac{C_m}{J}x_1 - \frac{f}{J}x_2 - \frac{1}{J}M_Z \tag{1-33}$$

式（1-32）和式（1-33）构成了电枢控制的直流电动机的**状态方程**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R_a}{L_a}x_1 - \dfrac{C_e}{L_a}x_2 + \dfrac{1}{L_a}U_a \\ \dot{x}_2 = \dfrac{C_m}{J}x_1 - \dfrac{f}{J}x_2 - \dfrac{1}{J}M_Z \end{cases} \tag{1-34}$$

输出量为 ω，用 y 表示，**输出方程**为

$$y = \omega = x_2 \tag{1-35}$$

式（1-34）和式（1-35）构成了电枢控制的直流电动机的**状态空间表达式**。

4）用**向量矩阵形式**表示，状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R_a}{L_a} & -\dfrac{C_e}{L_a} \\ \dfrac{C_m}{J} & -\dfrac{f}{J} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{J} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_a \\ M_Z \end{pmatrix} \\ y = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{1-36}$$

简写成

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{bu} & \text{状态方程} \quad (1\text{-}37) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{cx} & \text{输出方程} \quad (1\text{-}38) \end{cases}$$

式中

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix}-\dfrac{R_a}{L_a} & -\dfrac{C_e}{L_a}\\ \dfrac{C_m}{J} & -\dfrac{f}{J}\end{pmatrix};\ b=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{L_a} & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{J}\end{pmatrix};\ c=(0\quad 1)$$

第三节　由系统微分方程式转换为状态空间表达式

在经典控制理论中，线性定常系统或环节的数学模型可采用微分方程来描述。下面介绍和讨论根据微分方程来建立状态空间表达式的方法及相关问题。

设描述系统的 n 阶微分方程式为

$$y^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_nu^n+b_{n-1}u^{n-1}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u \tag{1-39}$$

式中，y 为输出量；u 为输入量；$a_i(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$；$b_j(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 均为系统的参数。

由第一节可知，系统的状态空间表达式用矢量－矩阵方程表示时为

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx+du\end{cases} \tag{1-40}$$

式中，x 为 $n\times1$ 维状态向量；A 为 $n\times n$ 维的系统矩阵；b 为 $n\times1$ 维的输入向量；c 为 $1\times n$ 维的输出向量；d 是直接传输向量，在单输入单输出系统中它是一个标量，并称为直接传输系数。

可见，要将微分方程式转变为状态空间表达式的关键问题，一是如何选择系统的状态变量，二是怎样由微分方程系数确定出矩阵 A、向量 b、c 及 d 中的元素值。下面分两种情况讨论。

一、输入信号不含有导数项的情况

系统的微分方程为

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_0u \tag{1-41}$$

（1）状态变量

第一节指出，n 阶系统，应选 n 个状态变量。由“高等数学”可知，当给定了输出 y 及其各阶导数的初始值 $y(0)$，$\dot{y}(0)$，$\cdots$，$y^{(n-1)}(0)$ 和 $t\geqslant0$ 时的输入 u，则系统在 $t\geqslant0$ 时的运动状态就可完全确定。所以，可选取输出及其各阶导数为状态变量，即

$$\begin{cases}x_1=y\\ x_2=\dot{y}\\ x_3=\ddot{y}\\ \quad\vdots\\ x_n=y^{(n-1)}\end{cases} \tag{1-42}$$

（2）状态方程

对式（1-42）的状态变量求导数，并考虑式（1-41），可得

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\dot{y}=x_2\\ \dot{x}_2=\ddot{y}=x_3\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}=y^{(n-1)}=x_n\\ \dot{x}_n=-a_0y-a_1\dot{y}-\cdots-a_{n-1}y^{n-1}+b_0u\\ \quad=-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n+b_0u\end{cases}\tag{1-43}$$

式（1-43）就是描述系统微分方程式（1-41）的状态方程。

根据“线性代数”，式（1-43）的状态方程组可用向量－矩阵方程式表示：

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&1\\ -a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ b_0\end{pmatrix}\boldsymbol{u}\tag{1-44}$$

（3）输出方程

由状态变量式（1-42）可知，系统的输出方程为

$$y=x_1\tag{1-45}$$

用矢量－矩阵方程表示

$$\boldsymbol{y}=(1\quad 0\quad \cdots\quad 0)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\tag{1-46}$$

（4）状态空间表达式

式（1-43）和式（1-45）构成了描述系统微分方程式（1-41）的状态空间表达式。式（1-44）和式（1-46）构成了其矢量－矩阵方程表达式。状态空间表达式简写成

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{bu}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{cx}\end{cases}\tag{1-47}$$

式中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{pmatrix};\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&1\\ -a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{pmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ b_0\end{pmatrix};\ \boldsymbol{c}=(1\quad 0\quad \cdots\quad 0)$$

从状态空间表达式可看出，**系统矩阵 $\boldsymbol{A}$** 为 $n\times n$ 维，最后一行的元素值，由微分方程式左边的系数值 a_i（$i=0,1,2,\cdots,n-1$）取负号后，从左（第一列）至右（第 n 列）按顺序排列；主对角线的上方元素值全为1；其余元素（除最后1行外）全为0。**输入矩阵 $\boldsymbol{b}$** 为 n 维列向量，最后的元素值为 b_0（输入信号的系数即幅值），其余元素为0。**输出矩阵 $\boldsymbol{c}$** 为 n 维行向量，其第1行元素值为1，其余的元素值为零。直接传输系数 d 值为零。