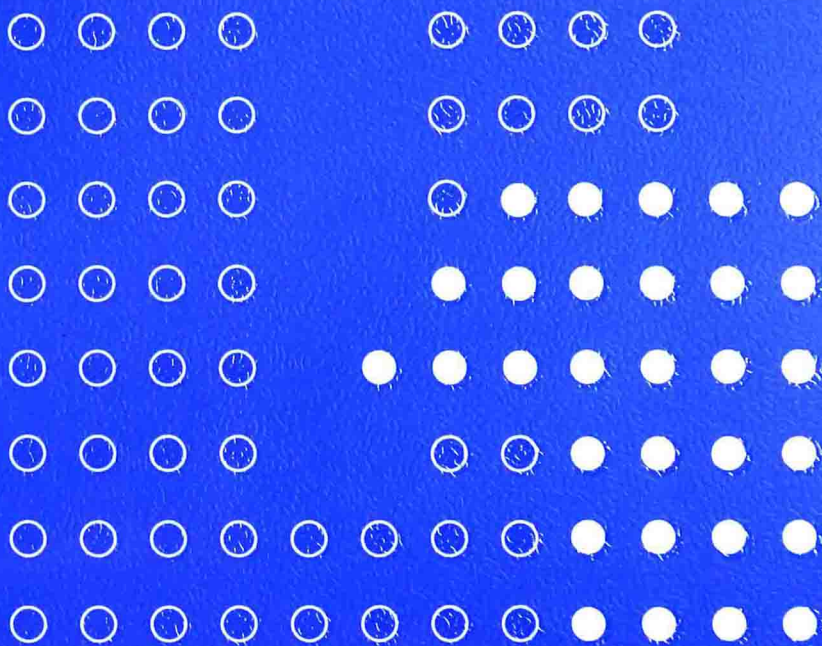




普通高等教育“十一五”国家级规划教材 计算机系列教材

信号检测与估计(第2版) 学习辅导与习题解答



立毅 孙云山 张晓琴 编著
雷 李艳琴 白 煜

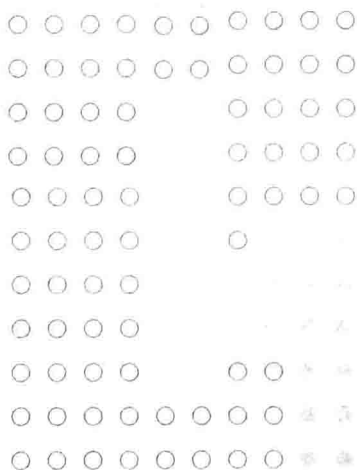
清华大学出版社



计算机系列教材

张立毅 孙云山 张晓琴 陈雷 李艳琴 白煜 编著

信号检测与估计(第2版) 学习辅导与习题解答



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是张立毅、张雄、李化编著的《信号检测与估计(第2版)》一书的配套教材,内容涉及随机信号及其统计描述、经典检测理论、确知信号检测、随机参量信号检测、多重信号检测、序贯检测、经典估计理论、信号参量估计、信号波形估计(维纳滤波、卡尔曼滤波和自适应滤波)以及功率谱估计等。

在编写过程中,按照知识点结构框架、学习要求、核心内容、重要公式、经典例题、名词中英文对照、习题解答等对各章内容进行总结提炼和补充完善,并在书末给出误差函数表等常用表格,利于学习参考。

本书可以为“信号检测与估计”课程的主讲教师和学生提供参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

信号检测与估计(第2版)学习辅导与习题解答/张立毅等编著. --北京:清华大学出版社,2014
计算机系列教材
ISBN 978-7-302-37064-2

I. ①信… II. ①张… III. ①信号检测—高等学校—教学参考资料 ②参数估计—高等学校—教材 IV. ①TN911.23

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第143062号

责任编辑:汪汉友

封面设计:常雪影

责任校对:焦丽丽

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座

邮 编:100084

社总机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课件下载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 装 者:北京国马印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:14.25

字 数:344千字

版 次:2014年10月第1版

印 次:2014年10月第1次印刷

印 数:1~1500

定 价:29.00元

产品编号:059333-01

前 言

信号检测与估计作为现代信息理论的一个重要分支,是以信息论为理论基础,以概率论、数理统计和随机过程为数学工具,以受噪信号处理为对象,以提取有用信息为目标,综合系统理论与通信工程的一门学科;是通信、雷达、声呐、自动控制等技术的理论基础,在通信信号处理、生物医学信号处理、地震信号处理等领域得到广泛应用。

“信号检测与估计”是电子信息类专业本科生和研究生的重要专业基础课程,主要讲授信号检测与波形和参数估计的基本理论及方法。由于涉及到的名词概念多、数字推导多,使得在学习过程中出现了“三难问题”,即知识难理解、准则难掌握、公式难应用。为此,我们以张立毅、张雄、李化等编写的《信号检测与估计》(第2版)(清华大学出版社出版)为主要研究对象,并参考其他相关资料,编写了《信号检测与估计学习辅导与习题解答》一书,力求对本门课程的学习有所帮助。

本书在编写过程中,按照知识点结构框架、学习要求、核心内容、重要公式、经典例题、名词中英文对照、练习与习题解答等对各章内容进行总结提炼和补充完善,并在书末给出常用三角函数公式、欧拉公式和误差函数表等常用表格,利于学习参考。

本书由张立毅拟订编写提纲,负责统稿和定稿。李艳琴编写了第1章、第10章和第12章,陈雷编写了第2章、第3章和第11章,孙云山编写了第4章、第5章和第9章,白煜编写了第6章,张晓琴编写了第7章和第8章。

在本书编写过程中,参阅了不少文献资料,作者在此致以诚挚的谢意。

由于作者水平有限和编写时间仓促,书中难免会出现一些疏漏和不妥之处,恳请读者批评指正。

作 者

2014年5月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 知识点结构框架	1
1.2 学习要求	1
1.3 核心内容	1
1.3.1 信号检测与估计的基本概念.....	1
1.3.2 信号检测与估计的发展历程.....	1
1.3.3 本教材的结构安排.....	2
1.4 名词中英文对照	2
1.5 练习与习题解答	3
1.6 知识扩展	3
1.6.1 信号检测与估计理论代表人物简介.....	3
1.6.2 信息的概念及几种主要解释.....	5
第 2 章 随机信号及其统计描述	7
2.1 知识点结构框架	7
2.2 学习要求	7
2.3 核心内容	7
2.3.1 随机过程的基本概念.....	7
2.3.2 平稳随机过程.....	9
2.3.3 随机过程的正交级数表示	12
2.3.4 希尔伯特变换	12
2.3.5 高斯过程与高斯白噪声	13
2.4 重要公式.....	15
2.5 经典例题.....	16
2.6 名词中英文对照.....	23
2.7 习题与思考题解答.....	24
2.7.1 习题解答	24
2.7.2 思考题解答	28
第 3 章 经典检测理论	30
3.1 知识点结构框架.....	30
3.2 学习要求.....	30
3.3 核心内容.....	30
3.3.1 信号检测的基本概念	30

3.3.2	二元检测准则	32
3.3.3	M 元检测准则	34
3.4	重要公式	35
3.5	经典例题	35
3.6	名词中英文对照	50
3.7	习题与思考题解答	51
3.7.1	习题解答	51
3.7.2	思考题解答	57
第 4 章	确知信号的检测	59
4.1	知识点结构框架	59
4.2	学习要求	59
4.3	核心内容	59
4.3.1	确知信号检测的基本概念	59
4.3.2	二元确知信号的检测	60
4.3.3	多元确知信号的检测	63
4.3.4	高斯色噪声中确知信号的检测	63
4.3.5	匹配滤波器	64
4.4	重要公式	66
4.5	经典例题	67
4.6	名词中英文对照	77
4.7	习题与思考题解答	78
4.7.1	习题解答	78
4.7.2	思考题解答	83
第 5 章	随机参量信号的检测	85
5.1	知识点结构框架	85
5.2	学习要求	85
5.3	核心内容	85
5.3.1	随机参量信号检测的基本概念及检验准则	85
5.3.2	随机相位信号的检测	87
5.3.3	随机振幅信号的检测	89
5.3.4	随机频率信号的检测	90
5.3.5	随机时延信号的检测	91
5.4	重要公式	93
5.5	经典例题	94
5.6	名词中英文对照	98
5.7	习题与思考题解答	98
5.7.1	习题解答	98

5.7.2	思考题解答	105
第 6 章	多重信号的检测	106
6.1	知识点结构框架	106
6.2	学习要求	106
6.3	核心内容	106
6.3.1	多重信号检测的基本概念	106
6.3.2	确知脉冲串信号的检测	107
6.3.3	随机相位脉冲串信号的检测	108
6.3.4	随机振幅和相位脉冲串信号的检测	109
6.4	重要公式	110
6.5	经典例题	111
6.6	名词中英文对照	112
6.7	习题与思考题解答	113
6.7.1	习题解答	113
6.7.2	思考题解答	114
第 7 章	序贯检测	116
7.1	知识点结构框架	116
7.2	学习要求	116
7.3	核心内容	116
7.3.1	序贯检测的基本概念	116
7.3.2	序贯检测的基本方法	117
7.4	重要公式	118
7.5	经典例题	118
7.6	名词中英文对照	123
7.7	习题与思考题解答	123
7.7.1	习题解答	123
7.7.2	思考题解答	126
第 8 章	经典估计理论	128
8.1	知识点结构框架	128
8.2	学习要求	128
8.3	核心内容	128
8.3.1	经典估计准则	128
8.3.2	估计量性质	131
8.3.3	Cramer-Rao 不等式	132
8.4	重要公式	132
8.5	经典例题	133

8.6	名词中英文对照	139
8.7	习题与思考题解答	139
8.7.1	习题解答	139
8.7.2	思考题解答	147
第9章	信号参量的估计	149
9.1	知识点结构框架	149
9.2	学习要求	149
9.3	核心内容	149
9.3.1	单参量估计的基本概念	149
9.3.2	单参量估计的通式	149
9.3.3	振幅估计	150
9.3.4	相位估计	151
9.3.5	时延估计	152
9.3.6	频率估计	153
9.4	重要公式	153
9.5	经典例题	154
9.6	名词中英文对照	158
9.7	习题与思考题解答	159
9.7.1	习题解答	159
9.7.2	思考题解答	165
第10章	维纳滤波和卡尔曼滤波	166
10.1	知识点结构框架	166
10.2	学习要求	166
10.3	核心内容	166
10.3.1	线性滤波	166
10.3.2	维纳滤波	167
10.3.3	卡尔曼滤波	169
10.4	重要公式	170
10.5	经典例题	171
10.6	名词中英文对照	176
10.7	习题与思考题解答	177
10.7.1	习题解答	177
10.7.2	思考题解答	180
第11章	自适应滤波	182
11.1	知识点结构框架	182
11.2	学习要求	182

11.3	核心内容	182
11.3.1	自适应滤波概述	182
11.3.2	最小均方自适应滤波算法	183
11.3.3	递归最小二乘自适应滤波算法	185
11.4	重要公式	186
11.5	经典例题	187
11.6	名词中英文对照	191
11.7	习题与思考题解答	192
11.7.1	习题解答	192
11.7.2	思考题解答	194
第 12 章	功率谱估计	195
12.1	知识点结构框架	195
12.2	学习要求	195
12.3	核心内容	195
12.3.1	经典谱估计法	195
12.3.2	现代谱估计法	197
12.3.3	AR 模型谱估计法	198
12.3.4	白噪声中正弦信号的谱估计	199
12.4	重要公式	200
12.5	经典例题	201
12.6	名词中英文对照	205
12.7	习题与思考题解答	205
12.7.1	习题解答	205
12.7.2	思考题解答	209
附录 A	常用三角函数公式	211
附录 B	欧拉公式	212
附录 C	常用不定积分	213
附录 D	误差函数表	214
参考文献		216

第 1 章 绪 论

1.1 知识点结构框架

信号检测与估计的知识点结构如图 1-1 所示。

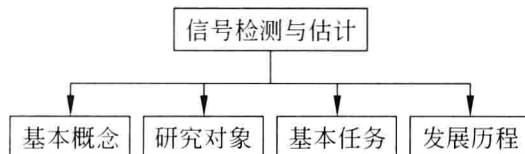


图 1-1 知识点结构框图

1.2 学习要求

- (1) 掌握信号检测与估计的研究对象,熟悉信息传输系统的香农模型;
- (2) 了解信号检测与估计理论的发展历程,以及本门课程的主要内容。

1.3 核心内容

1.3.1 信号检测与估计的基本概念

(1) 信号检测与估计:是现代信息理论的一个重要分支,是以信息论为理论基础,以概率论、数理统计和随机过程为数学工具,综合系统理论与通信工程的一门学科。

(2) 信号检测:在接收端,利用信号概率和噪声功率等信息按照一定准则判定信号的存在与否。

(3) 信号估计:利用接收到的受干扰的发送信号序列尽可能精确地估计该发送信号的某些参数值(如振幅、频率、相位、时延等)和波形,一般包括参量估计和波形估计两种。

(4) 研究对象:以信息传输系统中接收端收到噪声和干扰影响的信号作为研究对象。即在信号、噪声和干扰三者共存条件下,如何正确发现、辨别和估计信号参数。

(5) 基本任务:信号检测与估计的基本任务是研究如何在干扰和噪声存在的条件下,有效辨认出有用信号的存在与否,估计出未知信号的参量或波形,即利用信号与噪声的统计特性的不同,尽可能地抑制噪声,提取有用信号的信息。

1.3.2 信号检测与估计的发展历程

1. 初创和奠基阶段

时间段为 20 世纪 40 年代,代表人物为维纳(N. Wiener)、柯尔莫格洛夫(A. Н. Колмогоров)、诺思(D. O. North)、卡切尼科夫(B. А. Котелъников)、香农(C. E. Shannon)、

伍德沃德(P. M. Woodward)等,研究成果为将经典的统计判决理论和统计估计理论与通信工程紧密结合,为信号检测与估计理论奠定了基础。

2. 迅猛发展阶段

时间段为 20 世纪 50 年代,代表人物为密德尔顿(D. Middleton)、卡尔曼(R. E. Kalman)和布什(R. S. Bucy)等,研究成果为将统计假设检验和统计推断理论等数理统计方法用于信号检测,建立了统计检测理论。

3. 成熟阶段

时间段为 20 世纪 60 年代,代表人物为范特理斯(H. L. van Trees)等,研究成果为范特理斯的三大卷巨著^①。

1.3.3 本教材的结构安排

本教材的结构安排如图 1-2 所示。

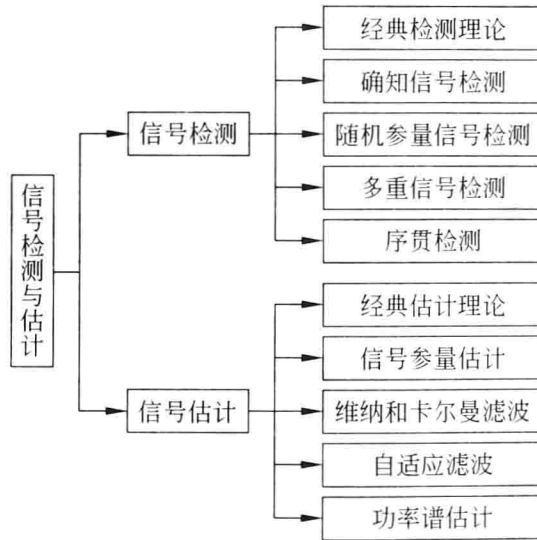


图 1-2 本教材的结构安排

1.4 名词中英文对照

信号检测	signal detection	传输媒介	transmission medium
信号估计	signal estimation	信宿	destination
信号处理	signal processing	干扰	interference
波形估计	waveform estimation	噪声	noise
参数估计	parameter estimation	振幅	amplitude
概率论	probability theory	频率	frequency
数理统计	mathematical statistics	相位	phase
通信	communication	时延	time delay

^① (VAN TREES H. L. Detection, Estimation, and Modulation Theory[M]. New York: Wiley, Part I 1968, Part II 1971, Part III 1971. 中译本《检测、估计和调制理论》于 1983 年由国防工业出版社出版)。

雷达 radar
声呐 sonar
香农模型 Shannon model
信源 information source
信道 channel

信噪比 signal-to-noise ratio
维纳滤波器 Wiener filter
匹配滤波器 match filter
卡尔曼滤波器 Kalman filter

1.5 练习与习题解答

1. 试述信息传输系统香农模型中各部分的作用及与信号检测和估计的关系。

答：信息传输系统香农模型如图 1-3 所示。

信源：消息或信息的产生地，其作用是把各种消息转换成原始电信号，称为消息信号或基带信号。一般分为模拟信源和数字信源。有时把信源也称为发送端，既要产生传送的消息和信息，又要将信源产生的消息信号变换成适合在信道中传输的信号。

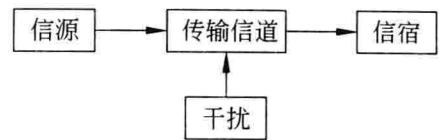


图 1-3 信息传输系统的香农模型

信道：又称为传输媒介，是传输信号的通道，即传输信号的物理媒质。一般分为无线信道和有线信道两类。

干扰：信道中自身存在的噪声和分散在通信系统各处噪声的集中表示，影响通信质量。

信宿：传输信息的归宿点，其作用是将复原后的原始信号转换成相应的消息或信息。有时也把信宿称为接收端，其主要任务是从带有干扰的接收信号中恢复出相应的原始基带信号。

信号检测与估计就是要对接收到的受到干扰的信号进行检测与估计，检测有用信号存在与否，估计信号的波形或参量。

2. 试述信息传输系统的性能指标。

答：信息传输系统的性能指标主要有有效性和可靠性两个，前者是指消息传输的速度问题，后者是指消息传输的质量问题。

对于模拟信息传输系统，有效性可用有效传输频带来度量，同样的消息用不同的调制方式，则需要不同的频带宽度。可靠性用接收端最终输出信噪比来度量，不同调制方式在同样信道信噪比下所得到的最终解调后的信噪比是不同的。

对于数字信息传输系统，有效性可用传输速率来衡量，包括码元传输速率、信息传输速率和频带利用率。可靠性可用差错率来衡量，包括误码率和误信率。

1.6 知识扩展

1.6.1 信号检测与估计理论代表人物简介

1. 诺伯特·维纳(Norbert Wiener, 1894—1964)

美国数学家，控制论的创始人，1894年11月26日生于美国密苏里州的哥伦比亚，1964年3月18日卒于斯德哥尔摩。维纳在其50年的科学生涯中，先后涉足哲学、数学、物理学

和工程学,最后转向生物学,在各个领域中都取得了丰硕成果,称得上是恩格斯颂扬过的,20世纪多才多艺和学识渊博的科学巨人;一生发表论文 240 多篇,著作 14 部,主要著作有《控制论》(1948)、《维纳选集》(1964)和《维纳数学论文集》(1980)以及两本自传(《昔日神童》和《我是一个数学家》)。

2. 安德烈·尼古拉耶维奇·柯尔莫格洛夫(Андрей Николаевич Колмогоров, 1903—1987)

前苏联最杰出的数学家,也是 20 世纪世界上为数极少的几个最有影响的数学家之一,1903 年 4 月 25 日出生于俄罗斯的坦博夫城,1987 年 10 月 20 日卒于莫斯科。他的研究几乎遍及数学的所有领域,做出许多开创性的贡献。一生撰写学术论文 480 余篇,主要著作有《概率论基本概念》(1934)、《独立随机变量和极限分布》(1949)等。

3. 克劳德·艾尔伍德·香农(Claude Elwood Shannon, 1916—2001)

美国数学家、电子工程师、密码学家、信息论的创始人,1916 年 4 月 30 日出生于美国密歇根州的加洛德(Petoskey),2001 年 2 月 26 日卒于马萨诸塞州梅德福(Medford)。香农曾先后在《贝尔系统技术杂志》(*Bell System Technical Journal*)上发表了《通信的数学原理》(*A Mathematical Theory of Communication*, 1948)、《保密系统的通信理论》(*Communication Theory of Secrecy Systems*)和《噪声下的通信》(1949),成为了信息论的奠基性著作。

4. 鲁道夫·卡尔曼(Rudolf Emil Kalman, 1930—)

匈牙利裔美国数学家,1930 年 5 月 19 日出生于匈牙利首都布达佩斯,卡尔曼于 1960 年提出著名的卡尔曼滤波器,著有《数学系统概论》(1968)等著作。

5. 卡尔·弗里德里希·高斯(Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)

德国著名数学家、物理学家、天文学家,与牛顿、阿基米德一起被誉为历史上伟大的数学家之一,1777 年 4 月 30 日生于布伦瑞克(Braunschweig),1855 年 2 月 23 日卒于哥廷根(Göttingen)。高斯的主要成果有《算术研究》(1801)、《天体运动理论》(1809)、《关于曲面的一般研究》(1828)、《地磁概念》和《论与距离平方成反比的引力和斥力的普遍定律》等,发明最小二乘法 and 正态分布等。

6. 大卫·希尔伯特(David Hilbert, 1862—1943)

德国数学家,1862 年 1 月 23 日生于柯尼斯堡(Königsberg),1943 年 2 月 14 日卒于哥廷根(Göttingen)。希尔伯特自己著有《希尔伯特全集》(三卷,其中包括著名的《数论报告》)、《几何基础》、《线性积分方程一般理论基础》等,与他人合著有《数学物理方法》、《理论逻辑基础》、《直观几何学》、《数学基础》等。1900 年,希尔伯特在巴黎国际数学家大会上发表题为《数学问题》的演讲,提出了 23 道最重要的数学问题,即著名的希尔伯特 23 问题,对现代数学的研究和发展产生了深刻的影响。

7. 亚历山大·李雅普诺夫(Александр Михайлович Ляпунов, 1857—1918)

俄罗斯应用数学家和物理学家,1857 年 6 月 6 日生于雅罗斯拉夫尔,1918 年 11 月 3 日卒于敖德萨。李雅普诺夫的主要成果有《论一个旋转液体平衡之椭球面形状的稳定性》(1884)、《关于具有有限个自由度的力学系统的稳定性》(1888)、《运动稳定性的一般问题》(1892)、《关于狄利克雷问题的某些研究》(1898)、《概率论的一个定理》(1900)、《概率论极限定理的新形式》(1901)等。

8. 托马斯·贝叶斯(Thomas Bayes, 1702—1763)

英国数学家,1702年出生于伦敦,1763年4月7日逝世。贝叶斯在数学方面主要研究概率论,创立了贝叶斯统计理论,1758年在《论有关机遇问题的求解》中提出归纳推理理论,即贝叶斯方法。贝叶斯所采用的许多术语被沿用至今。

9. 莱昂哈德·欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783)

瑞士数学家,1707年4月5日生于巴塞尔(Basel),1783年9月18日卒于彼得堡(Petepbypt)。欧拉著有《微积分原理》、《代数学完整引论》、《无穷小分析引论》、《行星和彗星的运动理论》、《月球运动理论》、《日蚀的计算》、《航海科学》、《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》、《屈光学》、《流体运动原理》和《流体运动的一般原理》等重要著作。

10. 拉格朗日(J. L. Lagrange, 1736—1813)

法国数学家、力学家、天文学家,1736年1月25日生于意大利都灵(Turin),1813年4月10日卒于巴黎。拉格朗日的主要著作有《关于解数值方程》、《关于方程的代数解法的研究》、《分析力学》、《解析函数论》、《函数计算教程》等。

11. 让·巴普蒂斯·约瑟夫·傅里叶(Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768—1830)

法国著名数学家、物理学家,1768年3月21日生于欧塞尔(Auxerre),1830年5月16日卒于巴黎。傅里叶于1822年出版专著《热的解析理论》,推导出著名的热传导方程,提出无穷级数、傅里叶级数(即三角级数)、傅里叶分析等理论。

1.6.2 信息的概念及几种主要解释

1. 概念

信息是客观事物运动状态的表征与描述。

2. 来源

最早出现在我国唐代文人李中的《暮春怀故人》一诗中的“梦断美人沈信息,日穿长路倚楼台”。^①

3. 几种主要解释

(1) 哈特莱学说。1928年,哈特莱(L. V. R. Hartley)在《贝尔系统电话杂志》上发表了《信息传输》一文,指出“信息是选择的自由度”。把信息理解为选择通信符号的方式,并用选择的自由度来计量信息大小。其定义提供了一种思路,即信息是可以客观测量的,为香农(C. E. Shannon)信息论的产生创造了条件。

(2) 香农学说。1948年,现代信息论的创始人香农(Shannon)在《贝尔系统电话杂志》上发表了《通信的数学理论》一文,认为“信息是用来减少随机不定性的东西”。其贡献主要表现在两个方面:一是推导出信息测度的数学公式,标志着信息科学进入了定量研究阶段。二是发现了信息编码的三大定理,为现代通信技术的发展奠定了理论基础。他的信息定义着眼于信息的认识 and 描述。

(3) 维纳学说。1948年,维纳(Norbert Wiener)出版了专著《控制论——动物和机器中的通信与控制问题》,创立了控制论。他将信息理解为“信息是人们在适应外部世界,并使这

^① 全诗为:池馆寂寥三月尽,落花重叠盖莓苔。惜春眷恋不忍扫,感物心情无计开。梦断美人沈信息,目穿长路倚楼台。琅玕绣段安可得,流水浮云共不回。

种适应反作用于外部世界的过程中,同外部世界进行交流的内容的名称”。维纳对信息的认识着眼于信息的应用。

(4) 郎高学说。1975年,意大利学者郎高(G. Longo)在《信息论:新的趋势与未决问题》一书的序言中指出:“信息是反映事物的形成、关系和差别的东西,它包含在事物的差异之中,而不在事物本身。”简而言之,信息就是差异。

(5) 钟义信学说。1988年我国学者钟义信在《信息科学原理》一书中对信息的界定为“信息是事物运动的状态和(状态改变的)方式,是物质的一种属性”。

(6) 马克思主义哲学认识论学说。从马克思主义哲学认识论的观点出发,我国多数学者对信息较为一致的看法是,信息是物质的一种基本属性,是物质的存在方式和运动的规律和特点的特征,是事物及其现象的内外特征、相互联系及作用的反映。

第 2 章 随机信号及其统计描述

2.1 知识点结构框架

本章知识点结构如图 2-1 所示。

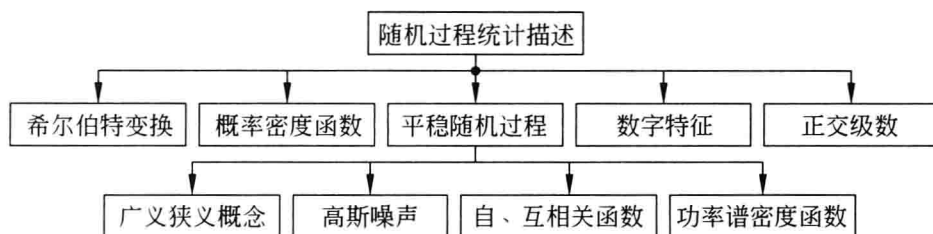


图 2-1 知识点结构框图

2.2 学习要求

- (1) 掌握随机过程的基本概念、统计描述方法,以及平稳随机过程的数字特征与概率密度函数;
- (2) 熟悉高斯噪声和白噪声及其统计特性。

2.3 核心内容

2.3.1 随机过程的基本概念

1. 随机过程(random process)

当事物变化的过程不能用确定函数描述时,此过程称为随机过程。其严格的定义有下面两个。

定义 1: 设随机试验 E 的样本空间为 $S = \{e\}$, 对其中每一个元素 $e_i (i=1, 2, \dots)$ 都以某种法则确定一个样本函数 $x(t, e_i)$, 由全部元素 $\{e\}$ 所确定的一簇样本函数 $X(t, e)$ 称为随机过程, 简记为 $X(t)$ 。

定义 2: 设有一个时间函数 $X(t)$, 若对于每一个固定的时刻 $t_i (i=1, 2, \dots)$, $X(t_i)$ 是一个随机变量, 则称 $X(t)$ 为随机过程。

随机过程具有两个特征: 一是随机过程是时间的函数; 二是在任一时刻观察到的值是不确定的, 是一个随机变量。

2. 随机变量(random variable)

在随机试验中, 每个随机过程 $X(t, e)$ 在某一固定时刻 $t = t_i$ 时的实现 $X(t_i, e)$, 称为一个随机变量, 即随机变量是随机过程的一个具体实现, 是指依赖随机因素而变, 以一定概率

取值的变量。根据随机变量的取值情况,可分为离散型随机变量和非离散型随机变量两类。

3. 概率密度函数(probability density function)和分布函数(distribution function)

随机过程 $X(t)$ 在任一给定时刻 t_1 的取值是一个一维(one dimensional)随机变量 $X(t_1)$,将随机变量 $X(t_1)$ 小于和等于某一数值 x_1 的概率

$$F_X(x_1, t_1) = P[X(t_1) \leq x_1] \quad (2.1)$$

定义为随机过程 $X(t)$ 的一维分布函数。若存在

$$f_X(x_1, t_1) = \frac{\partial F_X(x_1, t_1)}{\partial x_1} \quad (2.2)$$

则称 $f_X(x_1, t_1)$ 为 $X(t)$ 的一维概率密度函数。

一维分布函数和一维概率密度函数给出了随机过程最简单的概率分布特性,只能描述随机过程在任一孤立时刻取值的统计特性,而不能反映出随机过程各个时刻的内在联系。因此,为了完整地描述随机过程的统计特性,一般需要 n 维分布函数和 n 维概率密度函数。

随机过程 $X(t)$ 的 n 维分布函数和 n 维概率密度函数定义为

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n) \quad (2.3)$$

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial F_X(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (2.4)$$

当 n 为 2 时,称为二维分布函数和二维概率密度函数,可以描述随机过程在任意两个时刻取值之间的相关程度,但不能完整地反映出随机过程的全部信息。从理论上讲, n 值越大,用随机过程的 n 维分布函数和 n 维概率密度函数来描述随机过程的统计特性也就越完善,但随着 n 值的增大分析处理会变得越来越复杂。

概率密度函数的性质:

- (1) 概率密度函数是非负的;
- (2) 概率密度函数在全定义域内的积分为 1;
- (3) 随机变量落在某一区间的概率等于其概率密度函数在此区间的积分。

4. 数字特征

随机过程的数字特征主要包括数学期望、方差、相关函数和协方差函数等。

(1) 数学期望(mathematic expectation): 又称为均值(average)和统计平均。 $X(t)$ 在任一时刻 t 的数学期望定义为

$$E[X(t)] = m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x, t) dx \quad (2.5)$$

数学期望是一个时间的确定函数,由随机过程 $X(t)$ 所有样本在任一时刻 t 的值取平均而得到,即统计平均值。它表示所有样本在任一时刻 t 取值的分布中心。

数学期望的性质:

- ① 常数的数学期望是其本身, $E[c] = c$ (c 为常数);
- ② $E[cx] = cE[x]$;
- ③ 和的数学期望等于数学期望的和。 $E[x+y] = E[x] + E[y]$;
- ④ 若 x, y 相互独立,则 $E[xy] = E[x]E[y]$ 。

(2) 方差(variance): 随机过程 $X(t)$ 在任一时刻 t 的方差定义为

$$\text{Var}[X(t)] = D_X(t) = \sigma_X^2(t) = E[(X(t) - E[X(t)])^2]$$