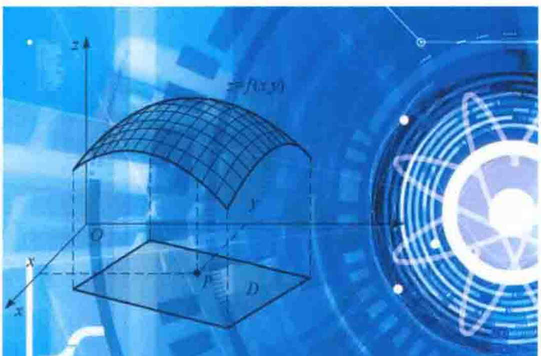
国家示范性高等职业教育精品规划教材

高等数学

Gaodeng shuxue

◎主　编/林　漪
◎副主编/陈　钢



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家示范性高等职业教育精品规划教材

高等数学

主　编　林　漪

副主编　陈　钢

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书根据不同专业对“高等数学”课程的需求，把“高等数学”课程的内容进行筛选、整合编写而成。内容包括：极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、拉普拉斯变换、行列式、矩阵、线性方程组、空间向量与空间解析几何、级数、概率。

本书可作为高等职业技术院校的教材使用，也可作为成人高等职业教育的教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/林漪主编．—北京：北京理工大学出版社，2010.7
ISBN 978－7－5640－3212－8

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①林…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材
Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 093796 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(总编室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京富达印刷厂
开　　本／710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张／20.75
字　　数／390 千字
版　　次／2010 年 7 月第 1 版　2010 年 7 月第 1 次印刷
印　　数／1～4000 册　　　责任校对／陈玉梅
定　　价／42.00 元　　　责任印制／边心超

前　　言

高等数学是高职高专各专业的一门必修的公共基础课，是学好专业课程的基础和工具。为了能更好地为专业课服务，我们根据教育部批准的高职高专《高等数学课程教学基本要求》，并根据不同专业对“高等数学”课程的需求，把“高等数学”课程的内容进行筛选、整合，编写了这本《高等数学》教材。

本书力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在保证科学的基础上注意讲清概念，减少定理证明，注重培养学生基本运算能力和分析问题、解决问题的能力。

本书分为公共基础和专业选修两部分使用。

第 1 部分为公共基础部分，包括第 1 章极限与连续；第 2 章一元函数微分学；第 3 章一元函数积分学；第 4 章常微分方程。

第 2 部分为专业选修部分，包括第 5 章拉普拉斯变换；第 6 章行列式；第 7 章矩阵；第 8 章线性方程组；第 9 章空间向量与空间解析几何；第 10 章级数；第 11 章概率。

本书主编林漪，副主编陈钢。

参加编写本书的有周建华（第 1 章、第 9 章）、刘振莉（第 2 章、第 5 章）、王萍（第 3 章、第 10 章）、陈钢（第 4 章）、肖满红（第 6 章、第 7 章）、肖郑利（第 8 章、第 11 章）。赵之眸老师为本书的编写做了大量的文字处理工作，本书也得到了李广全老师的指导、帮助，在此表示衷心的感谢。

由于编者的水平有限，书中难免存在错误和疏漏，敬请读者批评指正。

编　者

目　录

第 1 章　极限与连续

"高等数学"课程所研究的重要内容之一是函数的微积分及其应用，而极限是研究微积分的重要工具. 本章将在中学数学知识的基础上，讨论函数的极限，并介绍函数的连续性概念.

1.1　函　数

一、函数的概念与分类

1. 函数的概念

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的某个子集. 若对任意的 $x \in D$，变量 y 总有确定的数值与之对应，则 y 叫做 x 的**函数**，记作 $y = f(x)$. 其中 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**，f 叫做 x 与 y 之间的**对应规则**，数集 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的**定义域**.

当 $x = x_0$ 时，与之对应的 y 值叫做函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

当 x 取遍 D 内所有数值时，与之对应的 y 值的集合叫做函数 $y = f(x)$ 的**值域**，记作 M，即 $M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$.

由函数的定义可知，函数的定义域是自变量 x 的取值范围，一般是使函数表达式 $f(x)$ 有意义的 x 值的集合.

例 1-1-1　设函数 $f(x) = 2x - 3$，求 $f(a)$，$f[f(a)]$，$[f(a)]^2$.

解　$f(a) = 2a - 3$，

$$f[f(a)] = f(2a-3) = 2(2a-3) - 3 = 4a - 9,$$

$$[f(a)]^2 = (2a-3)^2 = 4a^2 - 12a + 9 .$$

例 1-1-2　求函数 $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \lg \dfrac{1}{x-1}$ 的定义域.

解　要使函数有意义，自变量 x 必须同时满足以下条件：

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{x-1} > 0. \end{cases} \text{即} \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ x > 1, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

解不等式组得 $1 < x \leqslant 2$. 所以函数的定义域为 $(1,2]$.

如果对于任意的 $x \in D$，与之对应的 y 值只有一个，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数，本书所讨论的函数都是单值函数.

2. 函数的表示法

函数的对应规则是连接 x 与 y 的纽带，当对应规则用表格给出时，叫做**表格法**；当对应规则用图形给出时，叫做**图像法**；当对应规则用解析式给出时，叫做**解析法**.

当我们用解析法表示函数时，经常会遇到下面几种情况.

(1)当函数的对应规则由一个解析式表达时，这种函数叫做**显函数**，记作 $y = f(x)$. 例如，

$$y = 2x^2 + 1\,,\ y = \sin x\,.$$

(2)当函数的对应规则由方程 $F(x,y) = 0$ 所确定时，这种函数叫做**隐函数**. 例如，

$$e^{xy} - y = 0\,,\ 2xy = \ln y\,.$$

(3)当函数在定义域的不同范围，具有不同的解析表达式时，这种函数叫做**分段函数**. 例如，

$$f(z) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$$

(4)当 x 与 y 之间是通过第三个变量来建立对应规则时，这种函数叫做**由参数方程表示的函数**，或称**参数式函数**，其中第三个变量叫做**参变量**. 例如，

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$$

3. 函数的两个要素

定义域和对应规则叫做函数的**两个要素**. 如果函数的定义域相同且对应规则相同，则这两个函数为同一函数.

例 1-1-3 判定函数 $f(x) = \lg x^2$ 与 $g(x) = 2\lg x$ 是否为同一函数.

解 因为函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$，函数 $g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，所以 $f(x) = \lg x^2$ 与 $g(x) = 2\lg x$ 不是同一函数.

如果将 x 的取值限制在 $(0,+\infty)$ 内，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同一函数.

4. 反函数

定义 2 设函数 $y = f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于任意的 $y \in M$，都可以从关系式 $y = f(x)$ 确定唯一的 $x \in D$ 与之对应，这样就确定了一个以 y 为自变量的新函数，叫做函数 $y = f(x)$ 的**反函数**，记做 $x = f^{-1}(y)$，其定义域是 M，值域是 D.

在函数 $x = f^{-1}(y)$ 中，y 表示自变量，x 表示函数. 但是习惯上，经常用 x 表示自变量，用 y 表示函数. 因此反函数通常改写为 $y = f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 的定义域,是其反函数的值域;其值域,是其反函数的定义域.

需要注意:

(1)不是每个函数在其定义域内都有反函数存在,例如,$y=x^2(x\in\mathbf{R})$在整个定义域中,没有反函数;

(2)互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1-1-4　求函数 $y=2x$,$x\in[0,4]$ 的反函数.

解　由 $y=2x$ 得

$$x=\frac{1}{2}y\ ,\ y\in[0,8].$$

将 x 与 y 互换得到所求的反函数为

$$y=\frac{1}{2}x\ ,\ x\in[0,8].$$

二、函数的性质

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D ,数集 $X\subset D$,若存在常数 $M>0$,使得对于任意的 $x\in X$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则 $y=f(x)$ 叫做在数集 X 上的**有界函数**;若这样的 M 不存在,则 $y=f(x)$ 叫做在数集 X 上的**无界函数**.

2. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D ,区间 $I\subset D$,对于 I 内任意的 $x_1<x_2$

(1)若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $y=f(x)$ 在 I 上是单调增加的,区间 I 叫做函数 $y=f(x)$ 的**单调增加区间**.单调增加函数的图像随自变量在 I 内的增大而自左向右上升,即自变量越大,对应的函数值越大.

(2)若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $y=f(x)$ 在 I 上是单调减少的,区间 I 叫做函数 $y=f(x)$ 的**单调减少区间**.单调减少函数的图像随自变量在 I 内的增大而自左向右下降,即自变量越大,对应的函数值越小.

在 I 上的单调增加函数或单调减少函数统称为 I 上的**单调函数**.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,对于任意的 $x\in D$,

(1)若恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**,其图像关于 y 轴对称.

(2)若恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**,其图像关于原点对称.

例 1-1-5　讨论下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$;

(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(3) $f(x)=\sin x+\cos x$.

解 (1)因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^{x}}{2}=f(x)$，所以 $f(x)=\dfrac{a^{x}+a^{-x}}{2}$ 为偶函数.

(2)因为 $f(-x)=\ln\left[-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right]=\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$$=\ln\frac{\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$=-f(x),$$

所以 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 为奇函数.

(3)因为 $f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$，它既不等于 $f(x)$，也不等于 $-f(x)$，所以 $f(x)=\sin x+\cos x$ 既不是偶函数，也不是奇函数.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 $T>0$，使得对于任意的 $x\in D$，且 $x\pm T\in D$，恒有 $f(x\pm T)=f(x)$，则 $y=f(x)$ 叫做以 T 为周期的**周期函数**.

例 1－1－6 求函数 $f(x)=\sin 2x$ 的周期.

解 设所求周期为 T，则必有 $f(x+T)=f(x)$，即

$\sin 2(x+T)=\sin(2x+2T)=\sin 2x$.

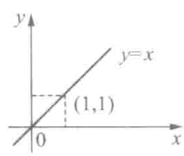
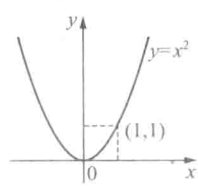
因为正弦 $\sin x$ 的周期为 2π，所以应有 $2T=2\pi$. 故 $T=\pi$.

三、基本初等函数

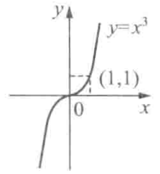
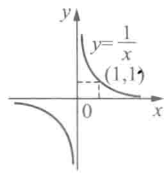
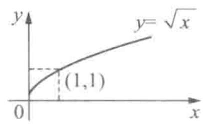
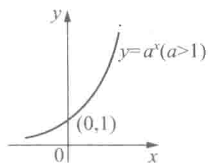
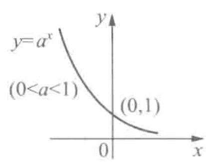
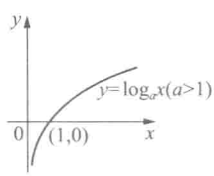
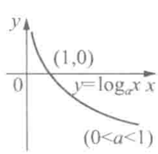
幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**.

高中阶段的数学教材中，对幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的性质与图像均已做过介绍. 在此，列表如下(表 1－1).

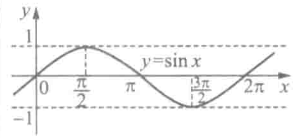
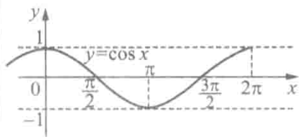
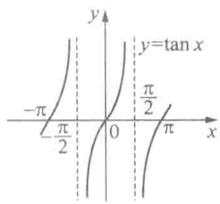
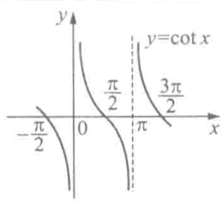
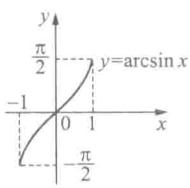
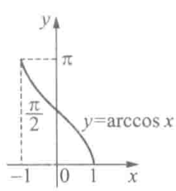
表 1－1

	函数	定义域与值域	图像	特征
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数，在 $(-\infty,0]$ 内单调减少，在 $[0,+\infty)$ 内单调增加

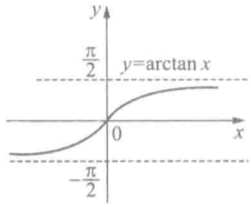
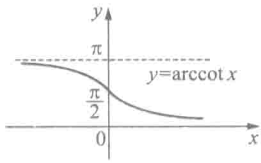
续表

	函　数	定义域与值域	图　像	特　征
幂函数	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数，在$(-\infty,0)$内单调减少，在$(0,+\infty)$内单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少

续表

	函　数	定义域与值域	图　像	特　征
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期为2π，有界，在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加，在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$内单调减少
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期为2π，有界，在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$内单调减少，在$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$内单调增加
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为π，在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为π，在$(k\pi,k\pi+\pi)$内单调减少
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界

续表

	函　数	定义域与值域	图　像	特　征
反三角函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数,单调增加,有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少,有界

四、复合函数

定义 3　设函数 $y=f(u)$ 是 u 的函数,$u=g(x)$ 是 x 的函数,如果由 x 所确定的 u 使得 y 有意义,则把 $y=f[g(x)]$ 叫做 x 的复合函数. 其中 x 叫做自变量,u 叫做中间变量,f 叫做外层函数,g 叫做内层函数.

由定义不难得出如下结论:

(1)函数的复合是有条件的.

例如,设函数 $y=\arccos u$,$u=2+x^2$,因为对于内层函数 $u=2+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中的任何 x 值,对应的 u 值都不小于 2,从而使得外层函数 $y=\arccos u$ 无意义,因此,形式上的复合函数 $y=\arccos(2+x^2)$ 是没有意义的.

(2)函数的复合可以是多重复合.

例 1-1-7　设函数 $y=u^2$,$u=\cos v$,$v=2x$,试将 y 写成 x 的函数.

解　$y=\cos^2 v=\cos^2(2x)$.

此函数由三层函数复合而成.

外层:$y=u^2$ ——幂函数;

中层:$u=\cos v$ ——三角函数;

内层:$v=2x$ ——幂函数与常数的四则运算.

由上例可见,比较复杂的函数,可以看做是由几个简单函数复合而成的. 这里所说的**简单函数**一般指基本初等函数或基本初等函数与常数的四则运算所构成的函数. 正确地分析函数的复合过程十分重要,必须掌握要领,分清层次,“由外向内”逐层复合.

例 1-1-8　指出下列函数的复合过程:

(1) $y=\sqrt{5+2x}$;(2) $y=\mathrm{e}^{-x^2-1}$;(3) $y=\lg\sin^2 x$.

解 (1)函数 $y=\sqrt{5+2x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ ，$u=5+2x$ 复合而成的.

(2)函数 $y=\mathrm{e}^{-x^2-1}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$ ，$u=-x^2-1$ 复合而成的.

(3)函数 $y=\lg\sin^2 x$ 是由 $y=\lg u$ ，$u=v^2$ ，$v=\sin x$ 复合而成的.

五、初等函数

1. 初等函数的定义

定义 4 由基本初等函数与常数经过有限次的四则运算和有限次的复合所构成,并且可以用一个式子来表示的函数,叫做初等函数.

由定义可知,分段函数一般不是初等函数,但有些特殊的分段函数,例如,

$y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$,因为它可以写成 $y=\sqrt{x^2}$ 的形式,所以它是初等函数;而函数 $y=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 则不是初等函数.

2. 建立函数关系举例

利用数学方法解决实际问题时,通常需要我们找出该问题中存在的若干变量,科学准确地分析它们之间的相互关系,并根据实际需要,将这种关系用函数表示出来.

例 1-1-9 已知某物体与地面的摩擦系数为 μ ，其重力为 P ,设有一个与水平方向成 α 角的拉力 F ,使物体从静止开始移动(如图 1-1 所示). 求物体开始移动时,拉力 F 与角 α 之间的函数关系.

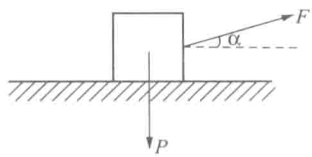


图 1-1

解 此物体对地面的压力为 $P-F\sin\alpha$,摩擦力为 $(P-F\sin\alpha)\mu$,水平方向的拉力为 $F\cos\alpha$,当物体开始移动时,水平拉力与阻力相等,因此有

$$F\cos\alpha=(P-F\sin\alpha)\mu,$$

所以, $F=\dfrac{P\mu}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$.

例 1-1-10 从甲地到乙地的火车票的全价为 q_0 (元). 铁路部门规定:1.1m 以下的儿童免票;身高超过 1.1m 但不足 1.4m 的儿童购买半价票;身高超过 1.4m 者购买全票. 试写出从甲地到乙地的票价 q 与身高 s 的函数表达式.

解 依题意,票价 q (元)与身高 s (m)的函数关系可表示为

$$q=\begin{cases} 0, & 0<s<1.1, \\ \dfrac{1}{2}q_0, & 1.1\leqslant s<1.4, \\ q_0, & s\geqslant 1.4. \end{cases}$$

习题 1－1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$；　　(2) $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}}$；　　(4) $y=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ x, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi.\end{cases}$

2. 判断下列各题中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为同一函数.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$；　　(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=|\cos x|$，$g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$；

(4) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$.

3. 求函数值.

(1) $f(x)=\sqrt{3+x^2}$，求 $f(2)$，$f(0)$，$f(x_0)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$；

(2) $f(x)=1+x^2$，$g(x)=\sin 3x$，求 $f(t^2-1)$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$；

(3) $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$ 求 $f(0)$，$f(3)$，$f\{f[f(-0.5)]\}$.

4. 判断函数的奇偶性.

(1) $y=x+\sin x$；　　(2) $y=x\cos x$；　　(3) $y=x(x-1)(x+1)$；

(4) $y=\sin x+\cos x$；　(5) $y=x^4+4x^2-1$；(6) $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

5. 求下列周期函数的周期.

(1) $y=\cos\dfrac{x}{2}$；　　(2) $y=\sin 2x$；　　(3) $y=\sin^2 x$；

(4) $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

6. 写出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sin^3(8x+5)$；　　(2) $y=\tan\left(\sqrt[3]{x^2+5}\right)$；

(3) $y=5(x+2)^2$；　　(4) $y=e^{1-x^2}$；

(5) $y=\ln(3-x)$；　　(6) $y=\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}}$；

(7) $y=\ln\cos^2(3x+1)$；　　(8) $y=\log_5\cot^3(5x^2+7)$.

1.2 极限的概念

一、数列 $\{x_n\}$ 的极限

早在公元前 3 世纪，我国的庄子就有“一尺之棰，日取其半，万事不竭”的名言，这反映了我国古代劳动人民在长期的生产和生活实践中所产生的朴素的极限思想.

1. 数列的概念

定义 1 按一定顺序排列的一列数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 叫做**数列**，记作 $\{x_n\}$. 其中，x_n 为**通项**.

例如，数列 $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$， 通项 $x_n = \frac{n+1}{n}$；

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$， 通项 $x_n = \frac{1}{2^n}$；

$1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$， 通项 $x_n = n$.

2. 数列的极限

例 1-2-1 观察下面的数列，当 n 无限增大时，x_n 的变化趋势.

(1) $x_n = \frac{n}{n+1}$；(2) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

解 (1)数列 $\{x_n\}$：$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$，当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于数值 1.

(2)数列 $\{x_n\}$：$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \cdots$，当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于数值 0.

定义 2 设数列 $\{x_n\}$，若当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于同一个常数 a，则把 a 叫做当 n 趋近于无穷大时**数列 $\{x_n\}$ 的极限**，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a\ (n \to \infty)$.

由定义可知，例 1-2-1 中的两个数列都有极限，分别记作：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$.

二、函数 $y = f(x)$ 的极限

1. $x \to \infty$ 时，$y = f(x)$ 的极限

例 1-2-2 观察当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的变化趋势.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，由图 1-2 可见，当 $x \to +\infty$

时，曲线无限趋近于 x 轴，曲线上各点处的函数值无限趋近于0，即 $\frac{1}{x} \to 0$.

当 $x \to -\infty$ 时，曲线无限趋近于 x 轴，曲线上各点处的函数值无限趋近于0，即 $\frac{1}{x} \to 0$.

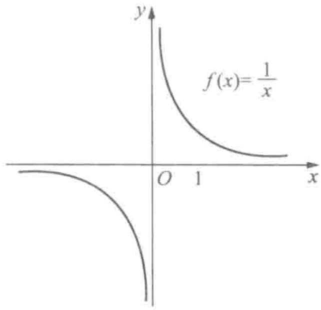


图 1－2

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>N$（N 为某个正数）上有意义，若当 $x \to +\infty$（或 $x \to -\infty$）时，$f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则常数 A **叫做函数** $f(x)$ **当** $x \to +\infty$（**或** $x \to -\infty$）**时的极限.** 记作 $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x)=A$ 或 $f(x) \to A$（$x \to +\infty$ 或 $x \to \infty$）.

符号 $x \to \infty$ 包含 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$，由此得到极限 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=\lim_{x \to -\infty} f(x)=A .$$

例 1－2－3　用观察图像的方法，写出下列函数当 $x \to \infty$ 时的极限.

(1) $f(x)=\arctan x$；(2) $f(x)=2^x$；(3) $f(x)=\sin x$.

解　(1)函数 $f(x)=\arctan x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其图像如图 1－3 所示.

因为 $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x=-\frac{\pi}{2}$，

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x \neq \lim_{x \to -\infty} \arctan x,$$

所以，$\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x$ 不存在.

(2)函数 $f(x)=2^x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其图像如图 1－4 所示，$\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x=0$，而当 $x \to +\infty$ 时，2^x 的值无限增大，故 $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x$ 不存在. 为了研究方便，一般可以记作 $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x=+\infty$.

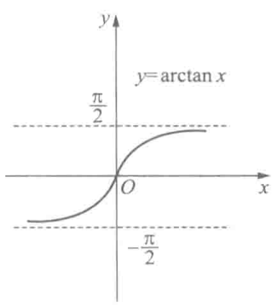


图 1－3

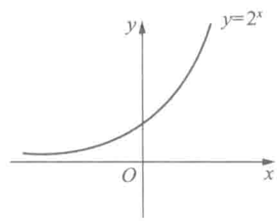


图 1－4