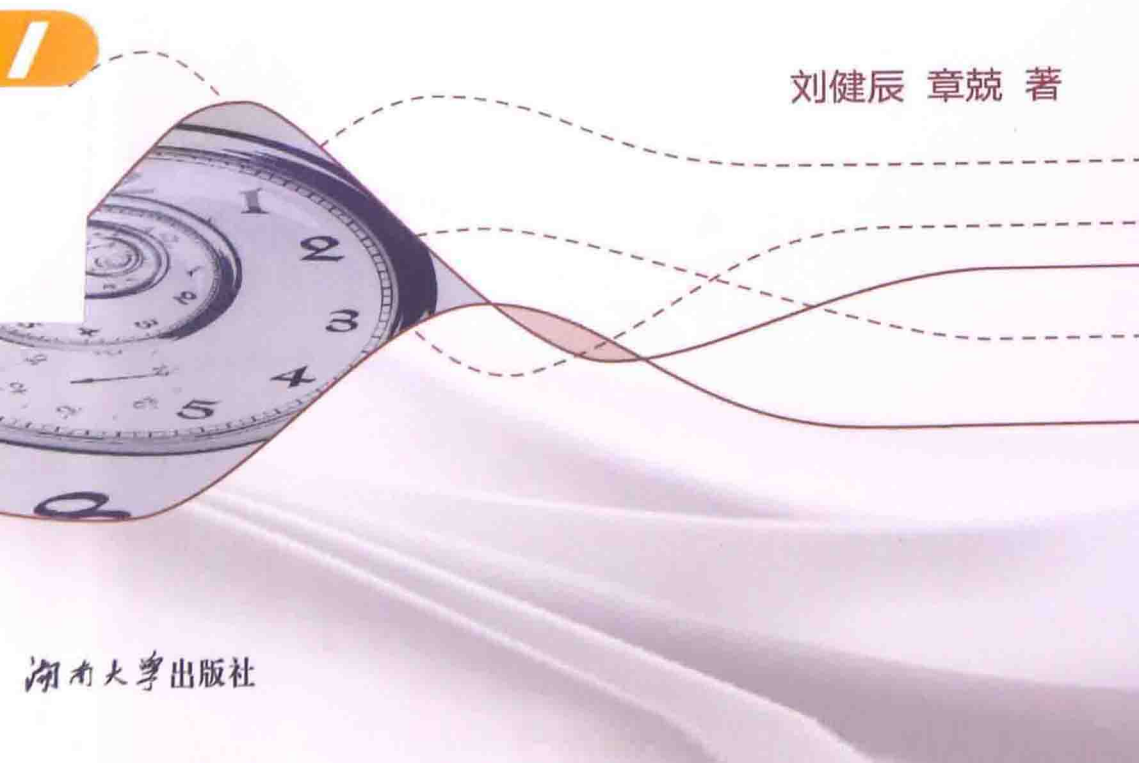


时滞系统 分析与综合

——基于finsler引理的新框架

SHIZHI XITONG
FENXI YU ZONGHE

刘健辰 章兢 著



湖南大学出版社

时滞系统分析与综合

——基于 Finsler 引理的新框架

刘健辰 章 兢 著

湖南大学出版社

内 容 简 介

本书针对基于简单 LKF 方法的时滞系统分析和综合问题,提出了一个基于 Finsler 引理的时滞系统分析和综合的统一研究框架。在此框架下,本书提出了分析、解决相关问题的途径和方法。

本书可供大专院校教师、研究生和高年级学生阅读,也可供相关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

时滞系统分析与综合——基于 Finsler 引理的新框架/刘健辰,章兢著. —长沙:湖南大学出版社,2014.5

ISBN 978-7-5667-0646-1

I. ①时… II. ①刘… ②章… III. ①时滞系统—系统分析—研究 IV. ①TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 089202 号

时滞系统分析与综合——基于 Finsler 引理的新框架
SHIZHI XITONG FENXI YU ZONGHE——JIYU FINSLER
YINLI DE XINKUANGJIA

作 者:刘健辰 章 兢 著

责任编辑:张建平 金红艳 责任印制:陈 燕

印 装:虎彩印艺股份有限公司

开 本:880×1230 32 开 印张:6 字数:188 千

版 次:2014 年 6 月第 1 版 印次:2014 年 6 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 978-7-5667-0646-1/TP·86

定 价:15.00 元

出 版 人:雷 鸣

出版发行:湖南大学出版社

社 址:湖南·长沙·岳麓山 邮 编:410082

电 话:0731-88822559(发行部),88820006(编辑室),88821006(出版部)

传 真:0731-88649312(发行部),88822264(总编室)

网 址:<http://www.hnupress.com> 电子邮箱:presszhangjp@hnu.cn

版权所有,盗版必究

湖南大学版图书凡有印装差错,请与发行部联系

前 言

时滞现象广泛存在于各种自然和工程系统中,而且往往成为系统性能恶化甚至失稳的根源。由于其所具有的理论 and 实际价值,时滞系统的分析和综合一直以来都是控制界的重要研究领域。近年来,由于网络化控制系统等新兴研究问题的出现,时滞系统问题重新获得了国内外研究者的关注。

时滞系统的研究方法大体可以分为时域方法和频域方法两大类。纵观最近十几年来的研究成果,以时域方法中的简单 LKF 方法为主流。从状态空间的角度,时滞对系统的影响表现为从有限维到无限维,而这一特点决定了基于简单 LKF 方法的时滞系统稳定性判据只能是充分条件,降低保守性和减少计算量构成了控制算法得以实用化的两个关键。需要指出的是对于时滞系统的研究虽然历时已久,而且成果颇丰,但是仍然有一些重要问题亟待解决。例如,如何将名目繁多的已有方法纳入到一个统一的研究框架,并在此框架下分析和发现解决两个关键问题的根本途径,进而改进已有算法的性能。

本书在作者近年来研究工作的基础上,针对基于简单 LKF 方法的时滞系统分析和综合问题,提出了一个基于 Finsler 引理的时滞系统分析和综合的统一研究框架。基于该框架可以分析已有四种方法(模型变换方法、自由权矩阵方法、积分不等式方法和 Jensen 不等式方法)的联系,也可以构造新的等价方法,更重要的是可以明确地发现引入自由矩阵的多少和方式只是问题的表面,解决 LKF 微分的定界问题的核心在于“解耦”。引入自由矩阵的唯一目的在于解除变量之间的耦合,以便于有效求解。在完成“解耦”的情况下引入尽量少的自由矩阵,可以最大程度地减少计算量。在此基础上,针对 LKF 的构造问题,通过引入更多的系统时滞信息,进一步减小稳定性判据的保守性。在基于简

单 LKF 的时滞系统综合方面,针对控制器设计中不可避免涉及的非线性矩阵不等式的求解问题,提出三种改进的时滞相关控制器设计算法。然后,本书将针对连续时间分立型线性系统建立的研究框架,推广到离散时间时滞系统、中立型非线性系统、时滞 Markov 跳变系统和时滞 T-S 模糊系统的分析和综合问题中,解决了一些新问题,也取得了一系列对已有结果的改进。最后,作为一个主要应用领域,将本书提出的时滞系统方法,应用于网络控制系统的分析和综合问题。

全书共 8 章。第 1 章系统地分析和总结时滞系统分析和综合这一研究领域的发展现状及研究方法,给出与本书相关的一些预备知识。第 2 章建立基于 Finsler 引理的时滞系统分析和综合的统一研究框架,进而结合三重积分法、广义模型法和时变时滞分解法,提出一系列具有更小保守性的改进稳定性判据。特别是深入讨论了乘子矩阵结构对所得结果保守性的影响。第 3 章,针对离散时间时滞系统稳定性分析问题,分别基于“1-X”定界法、Finsler 引理法和反凸函数法提出了一些改进的稳定性判据,并尝试证明三种方法之间的严格数学关系。第 4 章针对时滞系统控制器设计中的非线性矩阵不等式问题,提出三种改进的控制器设计算法:随机间接迭代算法、直接控制器设计算法和基于 BMI 方法的控制器求解算法。第 5 章,采用指数模型变换方法和多胞覆盖技术,以及时滞分解思想,研究时变时滞中立型系统的时滞相关指数稳定性问题和具有时变时滞的中立型系统的绝对稳定性问题。第 6 章,研究具有区间时变时滞的 Markov 跳变系统的随机稳定及有界实问题和具有区间时变时滞的离散广义 Markov 跳变系统的容许性问题。第 7 章,研究具有区间时变时滞的离散 T-S 模糊系统的鲁棒 H_∞ 控制问题。基于改进的 SLPM 算法,提出求解模糊 H_∞ 控制器的迭代算法。第 8 章,综合考虑网络化控制中存在的时滞、丢包和量化问题,基于时滞系统方法研究网络控制系统分析和设计问题。特别是,利用网络控制系统的锯齿形时变时滞特性和控制信号的脉冲特性,提出一种保守性更低的稳定性判据。

本书研究内容得到国家自然科学基金(编号:61174140)、高等学校博士学科点专项科研基金(编号:20110161110035)和辽宁省教育厅科

学研究一般项目(编号:L2013130)的资助。另外,本书的写作得到了许多学者的关心和帮助,他们的研究成果给予了作者很好的启发。湖南大学何敏博士、博士生张红强等参加了本书部分内容的编写、仿真和校对工作,在此向他们表示衷心的感谢。最后,非常感谢湖南大学出版社对本书顺利出版所给予的帮助。

由于作者水平有限,本书难免存在不妥之处,恳请读者不吝指教。

作 者

2014 年 4 月

目 次

第 1 章 绪 论

1.1 时滞系统及其稳定性分析	1
1.2 简单-LKF 方法的历史回顾与局限性探讨	10
1.3 本书研究内容和组织安排	18
1.4 符号说明和引理	20

第 2 章 连续时间线性时滞系统稳定性分析

2.1 定常时滞系统稳定性分析	22
2.2 时变时滞系统情况	28
2.3 鲁棒稳定性分析	33
2.4 时变时滞系统稳定性判据:改进的三重积分法	36
2.5 改进的时变时滞分解法	43
2.5.1 时变时滞分解法一:分段分析法	43
2.5.2 时变时滞分解法二:状态增广法	47
2.5.3 数值算例和比较研究	50

第 3 章 离散时间线性时滞系统稳定性分析

3.1 稳定性分析之一:“1-X”定界法	53
3.2 稳定性分析之二:Finsler 引理方法	56
3.3 稳定性分析之三:反凸函数法	57
3.4 各种方法之间的联系	58
3.5 数值算例和计算量分析	61
3.5.1 数值算例	61
3.5.2 计算量分析	62

第 4 章 线性时滞系统的控制器设计

4.1 随机初始化间接迭代算法	63
-----------------------	----

4.2	基于 Finsler 引理的直接算法	66
4.3	基于 BMI 的迭代算法	67
4.4	数值分析	69
4.5	TCP/AQM 系统设计	72
4.6	网络化 AGC 系统控制	76
第 5 章 时变时滞中立型系统的稳定性分析		
5.1	时变时滞中立型系统的指数稳定性分析	84
5.2	时变时滞中立型系统的绝对稳定性分析	90
第 6 章 时滞 Markov 跳变系统的稳定性和有界实分析		
6.1	连续时间区间时滞 Markov 跳变系统的稳定性和 有界实分析	100
6.1.1	系统描述和预备引理	100
6.1.2	主要结果	101
6.1.3	数值算例	107
6.2	时变时滞离散广义 Markov 跳变系统的稳定性分析	109
6.2.1	问题描述和引理	109
6.2.2	主要结果	110
6.2.3	数值算例	117
第 7 章 时滞离散 T-S 模糊系统的分析和综合		
7.1	系统描述	126
7.2	主要结果	129
7.3	数值算例	135
7.4	本章小结	138
第 8 章 时滞系统方法在网络控制系统中的应用		
8.1	网络控制系统的时滞相关镇定控制器设计	140
8.2	考虑量化影响的网络控制系统	146
8.3	基于脉冲时滞系统模型的网络控制系统分析	159
参考文献		164

第 1 章 绪 论

1.1 时滞系统及其稳定性分析

时滞现象在物理和生物系统以及实际生产生活中广泛存在,如系统信号的量测(特别是复杂的在线分析仪)、长管道进料或皮带传输、缓慢的化学反应过程等,也常见于电路、光学、神经网络、生态环境、数据网络及冶金工业、建筑结构、机械传动等领域。由于应用背景广泛,一直深受众多研究者的关注。时滞系统分析涉及泛函微分方程理论,而泛函微分方程的研究要远远困难于常微分方程。考虑如下定常时滞微分方程(1.1):Equation Chapter 1 Section 1

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h), \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $h>0$ 为定常时滞,初始条件由定义在 $[-h, 0]$ 上的连续可微函数 $\varphi(t)$ 确定,系统在 $t>0$ 时的行为不仅依赖于 0 时刻的状态,而且与时间段 $[-h, 0]$ 内的状态有关,可见时滞特性使系统具有某种“记忆”能力。时滞系统(1.1)是一个无穷维的系统,其特征方程是含有指数函数的超越方程

$$\det(\lambda I - A - A_d e^{-\lambda h}) = 0 \quad (1.2)$$

有无穷多个特征根。而对于离散时滞系统,系统维数随时滞的增加而几何增长,这给系统的稳定性分析和控制器设计带来了困难。因此对时滞系统的分析和控制,无论在理论还是在工程实践方面都极具挑战性。

时滞系统一般分成以下三类:

(1) 分立时滞(discrete delay)系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d\mathbf{x}(t - h_x) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}(t - h_u), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_h\mathbf{x}(t - h_y), \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 h_x , h_u 和 h_y 分别是状态时滞、输入时滞和输出时滞。分立时滞系统的“记忆”具有“局部”特性, 即其仅仅记忆了过去某个时刻的状态和输入。

分立时滞系统举例:(循环式化工生产过程^[1])

在化工生产中, 化学反应常常不是完全的。例如: $A \rightarrow B$, 在有限时间内由 A 到 B 的转化不能达到 100%, 这时一般采用循环反应方式, 即通过管道将反应产物中未反应的 A 重新传输到反应釜中。循环式化工生产过程可以用如下具有分立时滞的非线性微分方程描述:

$$\begin{cases} \frac{dA(t)}{dt} = \frac{q}{V}[\lambda A_0 + (1 - \lambda)A(t - \tau) - A(t)] - K_0 e^{-\frac{Q}{T}} A(t), \\ \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{V}[\lambda T_0 - (1 - \lambda)T(t - \tau) - T(t)] \frac{\Delta H}{C\rho} - K_0 e^{-\frac{Q}{T}} A(t) - \\ \frac{1}{VC\rho} U(T(t) - T_w), \end{cases}$$

其中 $A(t)$ 和 $T(t)$ 分别为 A 的浓度和温度, $\lambda \in [0, 1]$ 为循环系数, τ 为输送时滞。

(2) 分布时滞(distributed delay)系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \int_{-h_x}^0 \mathbf{A}_h \mathbf{x}(t + \theta) d\theta + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \int_{-h_u}^0 \mathbf{B}_h \mathbf{u}(t + \theta) d\theta, \quad (1.4)$$

与分立时滞系统相反, 分布时滞系统中的时滞具有在整个时滞区间的分散性影响, 而不是局部影响。

分布时滞系统举例:(传染病 SIR 模型^[2])

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t), \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \beta \int_h^\infty \gamma(\tau) S(t - \tau) I(t - \tau) d\tau, \\ \dot{R}(t) = \beta \int_h^\infty \gamma(\tau) S(t - \tau) I(t - \tau) d\tau, \end{cases}$$

其中 S , I 和 R 分别为易感(Susceptible)人群人数、感染(Infected)人

群人数和康复(Recovered)人群人数。时滞 τ 为康复时间,取值因人而异,取值范围为 $[h, \infty)$ 且概率密度为 $\gamma(\tau)$ 。

(3)中立时滞(neutral delay)系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{F}\dot{\mathbf{x}}(t-h) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (1.5)$$

该系统的特点是时滞并不是从系统状态输入或引入,而是引入到系统状态的高阶微分。

中立时滞系统举例:(集中供热系统^[3])

集中供热系统的最简单模型由一个锅炉、一组散热器以及供热管路组成。假设管道内热水流速恒定,仅仅考虑温度控制,且忽略不计供热管路的热量损失。下面首先建立各个分立器件的数学模型。

散热器模型:假设散热器被分为 N 个单元,则各个散热单元的温度 T_j 满足:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= \frac{NH_q q}{C} [T_{\text{input}} - (1-\varphi)T_1 - \varphi T_2] - \frac{\Phi_0}{C} \left(\frac{T_1 - T_a}{\Delta T_{\max,0}} \right)^{n_1}, \\ \frac{dT_j}{dt} &= \frac{NH_q q}{C} [(1-\varphi)T_{j-1} - (2\varphi-1)T_j - \varphi T_{j+1}] - \frac{\Phi_0}{C} \left(\frac{T_j - T_a}{\Delta T_{\max,0}} \right)^{n_1}, j=2, \dots, N-1, \\ \frac{dT_N}{dt} &= \frac{NH_q q}{C} [T_{N-1} - T_N] - \frac{\Phi_0}{C} \left(\frac{T_N - T_a}{\Delta T_{\max,0}} \right)^{n_1}. \end{aligned}$$

而输出功率满足:

$$P_{\text{rad}} = \frac{\Phi_0}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{T_j - T_a}{\Delta T_{\max,0}} \right)^{n_1},$$

其中 $H_q = C_p \rho$, ρ 为水的密度, C_p 为水的热容, C 为散热器的热容, q 为热水流速, Φ_0 为散热器额定功率, T_{input} 为散热器入水温度。

锅炉模型:

$$C_b \frac{dT_w}{dt} = n_{\text{com}}(T_w) Q_b - \rho C_p q (T_{\text{us}} - T_{\text{ws}}) - a_j (T_w - T_e),$$

其中 T_w 为锅炉中心温度, T_{us} 和 T_{ws} 分别为锅炉出水和入水温度, T_e 为锅炉房室温, a_j 为锅炉保温层散热率, Q_b 为锅炉的能量输入。 $n_{\text{com}}(T_w)$ 为锅炉燃烧效率,一般可以表示为:

$$n_{\text{com}}(T_w) = a_1 + a_2 \frac{T_w}{T_{w,\max}},$$

其中 $T_{w,\max}$ 为 T_w 的最大值。 T_w 与 T_{us} 和 T_{wv} 的关系为:

$$T_w = aT_{wv} + (1-a)T_{us}, \quad 0 < a < 1.$$

室温模型:

$$\frac{dT_r}{dt} = \frac{1}{C_r R_w} [T_{out} - T_r] + \frac{1}{C_r} P_{rad}.$$

其中 T_r 为被控室温, T_{out} 为室外温度, C_r 为房间热容, R_w 为外墙热阻。

综合以上各式, 并且根据如下关系:

$$T_{input} = T_{us}(t - \tau_1), T_{wv} = T_N(t - \tau_2),$$

其中 τ_1 和 τ_2 分别为热水由锅炉流至散热器和由散热器返回锅炉所用时间, 可得到如下的系统总方程:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= \frac{NH_{qg}}{C} [T_{us}(t - \tau_1) - (1 - \varphi)T_1 - \varphi T_2] - \frac{\Phi_0}{C} \left(\frac{T_1 - T_a}{\Delta T_{\max, 0}} \right)^{n_1}, \\ \frac{dT_j}{dt} &= \frac{NH_{qg}}{C} [(1 - \varphi)T_{j-1} - (2\varphi - 1)T_j - \varphi T_{j+1}] - \frac{\Phi_0}{C} \left(\frac{T_j - T_a}{\Delta T_{\max, 0}} \right)^{n_1}, j=2, \dots, N-1, \\ \frac{dT_N}{dt} &= \frac{NH_{qg}}{C} [T_{N-1} - T_N] - \frac{\Phi_0}{C} \left(\frac{T_N - T_a}{\Delta T_{\max, 0}} \right)^{n_1}, \\ \frac{dT_{us}}{dt} &= \frac{1}{C_b(1-a)} n_{om}(T_{us}, T_N(t - \tau_2)) Q_b - \frac{\rho C_p q}{C_b(1-a)} (T_{us} - T_N(t - \tau_2)) \\ &\quad - \frac{a_j}{C_b(1-a)} [aT_N(t - \tau_2) + (1-a)T_{us} - T_e] - \frac{a}{1-a} \dot{T}_N(t - \tau_2), \\ \frac{dT_r}{dt} &= \frac{1}{C_r R_w} [T_{out} - T_r] + \frac{1}{C_r} \frac{\Phi_0}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{T_j - T_a}{\Delta T_{\max, 0}} \right)^{n_1}. \end{aligned}$$

可见, 该集中供热系统模型是一个中立时滞非线性微分方程组。

早期的研究都集中于如系统(1.1)的定常时滞系统, 但在一些应用中(如网络控制、采样控制等), 时滞会变为时变。从统计信号分析的角度, 时变时滞会使系统的统计特性变得不再是平稳。初看来, 这似乎只是一个技术问题, 但实际上时变时滞会引起特有的 Quenching(淬火)现象^[4, 5]。Quenching 现象是指: (1) 对于任何 $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ 的稳定定常时滞系统, 相应地在同样范围内变化的时变时滞系统可能不稳定; (2) 对于任何 $\tau \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ 的不稳定的定常时滞系统, 相应的在同样范围内变化的时变时滞系统可能稳定。Quenching 现象体现了时滞变化率所引起

的系统特性变化。

另一种有趣现象是,存在一些系统,当其无时滞时不稳定,而当其具有非零值时滞时会稳定。例如一个被广泛考虑的二阶系统: $\ddot{y}(t) - 0.1\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$,使用静态时滞输出反馈 $u(t) = y(t-h)$,则可以表示为如下闭环系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t-h),$$

易知,当 $h \rightarrow \infty$ 和 $h \rightarrow 0$ 时,该系统均不稳定。实际上, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A} + \mathbf{A}_d$ 的特征值分别为: $\{0.05 \pm 1.4133i\}$ 和 $\{0.05 \pm 0.9987i\}$ 。通过解析法可以证明,对于在 $[0.10016826, 1.7178]$ 区间内的任意时滞,该系统均稳定^[6]。还存在一些工程和生物系统中的区间时滞系统的例子^[7]。另外在网络控制系统中,也有必要采用区间时滞系统对网络诱导时滞和数据丢包进行建模^[8]。

从工程角度看,时滞的存在往往导致系统性能恶化,甚至使系统失去稳定性。例如系统 $\dot{x}(t) = -0.5x(t)$ 是稳定的,但加入时滞项后,系统

$$\dot{x}(t) = -0.5x(t) + 1.3x(t-1)$$

变得不稳定。但另一方面,也可以用时滞来改善系统特性,例如混沌控制中的时滞反馈控制方法。

稳定性分析是控制理论的基本问题,也是控制器设计和性能分析的基础。时滞系统稳定性分析的目的是找到计算简单并且保守性尽可能小的稳定性判据。时滞系统稳定性分析方法主要分为两类:频域方法和时域方法。

最早的稳定性分析方法是频域法,该方法通过分析特征方程根的分布来判别稳定性。时滞线性系统稳定的充分必要条件是闭环特征方程根均具有负实部。但是由于时滞系统的特征方程是一个具有无穷多个解的超越方程,造成其稳定性分析要比无时滞系统困难得多,并且频域法难于处理时变时滞、时变不确定性参数和非线性系统。在专著^[9]中总结了频域法的主要研究成果。

时域法是日前时滞系统分析和综合的主要方法,特别适于处理含

有不确定性或时变参数、时变时滞和非线性的时滞系统。时域法主要包括 Lyapunov-Krasovskii 泛函(LKF)法、Lyapunov-Razumikhin 函数(LRF)法、二次分离(quadratic separation, QS)方法、积分二次约束(integral quadratic constraint, IQC)方法和小增益定理(Small Gain Theorem)方法等。LKF 法和 LRF 法分别由 Krasovskii 和 Razumikhin 于 20 世纪 50 年代末提出,本质上都属于 Lyapunov 稳定性方法在时滞系统分析上的扩展,但是 LRF 法得到的结果一般比 LKF 法更为保守^[10],故而较少采用。

Krasovskii 在 1963 年提出,用 LKF 取代传统意义上的二次 Lyapunov 函数,并在此基础上针对时滞系统给出一类新的稳定性分析方法,该思想可以通过下面的 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理进行描述。

引理 1.1 (Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理)考虑时滞系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (1.6)$$

如果存在连续可微函数 $V(t, \mathbf{x}(t))$,使得

$$u(\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|) \leq V(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq v(\|\boldsymbol{\varphi}\|_c) \quad (1.7)$$

和

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq -w(\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|) \quad (1.8)$$

成立,则系统(1.6)一致稳定。其中, $u, v, w: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ 是严格单调不减函数,满足 $u(s) > 0, v(s) > 0, s > 0, u(0) = v(0) = 0$ 。 $\|\boldsymbol{\varphi}\|_c = \max_{a \leq t \leq b} \|\boldsymbol{\varphi}(t)\|$ 为 $\boldsymbol{\varphi}$ 函数的模。进而,如果满足 $w(s) > 0, s > 0$,则系统(1.6)一致渐近稳定。如果 $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$,则系统(1.6)一致全局渐近稳定。

基于 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理可以得到两类稳定性条件:一类条件不包含时滞,称为时滞无关(Delay-independent)条件。此时,LKF 取为

$$V_1(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \int_{t-h}^t \mathbf{x}^T(\theta) \mathbf{Q} \mathbf{x}(\theta) d\theta, \quad (1.9)$$

其中 $\mathbf{P} > 0, \mathbf{Q} > 0$ 。对式(1.9)求导,并利用引理 1.1 可得系统一致渐近稳定的充分条件为:如果存在矩阵 $\mathbf{P} > 0, \mathbf{Q} > 0$,使得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} & \mathbf{P} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} & -\mathbf{Q} \end{bmatrix} < 0 \quad (1.10)$$

成立,则系统(1.1)一致渐近稳定。

时滞无关条件(1.10)不含时滞信息,然而许多实际系统中的时滞一般都是有界的,无穷时滞很少出现。这种不考虑时滞大小的结论,因为适用于任意大小的时滞,当时滞有界时,或者时滞比较小时,是相当保守的。于是另一类条件更加引起人们的关注,即包含时滞信息的稳定性条件,被称为时滞相关(Delay-dependent)条件。近年来,时滞相关稳定性分析与控制综合,以及如何降低所得条件的保守性,已经成为控制理论界研究的热点问题。

需要说明的是,对于线性定常时滞系统而言,可以通过构造 Complete-LKF(完整-LKF)来得到时滞相关稳定性的充分必要条件。系统(1.1)时滞相关渐近稳定的充分必要条件为:存在定常矩阵 $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, 标量 $\epsilon > 0$ 和连续可微矩阵函数: $\mathbf{Q}(\xi): [-h, 0] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\mathbf{S}(\xi) = \mathbf{S}^T(\xi): [-h, 0] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}(\xi, \eta) = \mathbf{R}^T(\xi, \eta): [-h, 0]^2 \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$, 使得

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t) \int_{-h}^0 \mathbf{Q}(s) \mathbf{x}(t+s) ds + \\ &\quad \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t+s) \mathbf{S}(s) \mathbf{x}(t+s) ds + \\ &\quad \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t+s) \mathbf{R}(s, \eta) \mathbf{x}(t+\eta) d\eta ds \\ &\geq \epsilon \|\mathbf{x}(t)\|^2, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{x}^T(t) [\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q}(0) + \mathbf{Q}^T(0) + \mathbf{S}(0)] \mathbf{x}(t) - \\ &\quad \mathbf{x}^T(t-h) \mathbf{S}(-h) \mathbf{x}(t-h) - \\ &\quad \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t+s) \dot{\mathbf{S}}(s) \mathbf{x}(t+s) ds + 2\mathbf{x}^T(t) [\mathbf{P} \mathbf{A}_d - \mathbf{Q}(-h)] \mathbf{x}(t-h) - \\ &\quad \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t+s) \left[\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{R}(s, \eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{R}(s, \eta) \right] \mathbf{x}(t+\eta) d\eta ds + \\ &\quad 2\mathbf{x}^T(t) \int_{-h}^0 [\mathbf{A}^T \mathbf{Q}(s) - \dot{\mathbf{Q}}(s) + \mathbf{R}(0, s)] \mathbf{x}(t+s) ds + \end{aligned}$$

$$2\mathbf{x}^T(t) \int_{-h}^0 [\mathbf{A}_d^T \mathbf{Q}(s) - \mathbf{R}(-h, s)] \mathbf{x}(t+s) ds \\ \leq -\epsilon \|\mathbf{x}(t)\|^2.$$

虽然可以通过构造完整-LKF, 避免任何保守性的引入, 但由于这个二次泛函的决策变量是函数, 会涉及一个无穷维优化问题, 所以实际上无法通过数值计算检验这个二次泛函的存在性。为了克服这个问题, 研究者退而求其次, 寻求近似数值解法。其中, 离散化 (discretization) 方法^[10-13]和平方和 (Sum of Squares, SOS) 方法^[5, 14, 15]是目前存在的主要方法。两种方法都存在计算量巨大的缺点, 目前受到的关注相对较少。相对于完整-LKF, 研究者更加乐于寻求不涉及无穷维优化和近似解法的简单方法, 这类 LKF 方法一般称为简单 (simple)-LKF 方法。与完整-LKF 方法不同, 利用简单-LKF 方法只能得到充分稳定性条件, 会存在无可避免的保守性, 所以主要的研究方向自然就是如何在保持较小复杂性的前提下, 有效减小保守性。

小增益定理是现代鲁棒控制理论的重要方法之一^[16], 目前也被研究者引入时滞系统稳定性的分析^[17-18]。下面以时滞无关稳定性分析为例, 说明基于小增益定理的时滞系统分析原理。

在小增益定理研究框架下, 首先需要将系统 (1.1) 变换为如下“LFT”(线性分式变换) 形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t), \\ \mathbf{w}(t) = D_h(\mathbf{z}(t)), \end{cases} \quad (1.11)$$

其中 $D_h: \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t-h)$ 为线性算子, 并可以证明其渐近稳定且具有有限 H_∞ 范数。实际上, 对于定常时滞, 如果该算子的输入信号有界, 则由于其输出信号是输入信号的时域平移, 也必有界, 故而该算子稳定。另外, 可以计算:

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{w}^T(s) \mathbf{w}(s) ds = \int_0^{+\infty} \mathbf{z}^T(s-h) \mathbf{z}(s-h) ds \underset{s'=s-h}{=} \int_{-h}^{+\infty} \mathbf{z}^T(s') \mathbf{z}(s') ds'.$$

这样, 在零初始条件下, 有

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{w}^T(s) \mathbf{w}(s) ds = \int_0^{+\infty} \mathbf{z}^T(s') \mathbf{z}(s') ds',$$

故而算子 D_h 具有单位 H_∞ 范数。

接下来,定义 Hamiltonian 函数:

$$H(\mathbf{x}(t)) = S(\mathbf{x}(t)) - \int_0^t s(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s-h)) ds, \quad (1.12)$$

其中 $S(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$ 为存储函数,供应率为

$$s(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-h)) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{L} & 0 \\ 0 & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-h) \end{bmatrix}.$$

计算该 Hamiltonian 函数的微分,可得

$$\dot{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{L} & \mathbf{P} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} & -\mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-h) \end{bmatrix}.$$

在耗散理论框架下,由 $\dot{H} < 0$ 可得系统渐近稳定,即如果存在正定矩阵 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{L}$ 使得如下 LMI 成立,则系统渐近稳定。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{L} & \mathbf{P} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} & -\mathbf{L} \end{bmatrix} < 0. \quad (1.13)$$

可见,条件(1.13)与(1.10)在本质上是相同的,与 Hamiltonian 函数(1.12)对应的 LKF 为

$$V(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \int_{-h}^t \mathbf{x}^T(\theta) \mathbf{L} \mathbf{x}(\theta) d\theta.$$

相似地,也可以由小增益定理建立时滞相关稳定性判据。

IQC 方法由 Rantzer 在 1997 年首先提出^[19],目前已经被应用于包括时滞系统稳定性分析在内的众多领域^[20-25]。IQC 方法的核心是互联系统的 L_2 稳定性,对于定常时滞系统,所得结果与小增益定理方法相似。但是,IQC 方法可以有效处理时变时滞系统,而小增益定理方法却不能处理。另外,IQC 方法可以结合一些频域方法(如 KYP 引理),获得保守性更小的结果^[22]。

二次分离(quadratic separation, QS)源于互联系统稳定性分析中的适定性(well-posedness)理论^[26]。最近,法国学者 Gouaisbaut 等将其引入到时滞系统稳定性分析中,取得了一系列有意义的成果。其中,文[27]首次将二次分离法用于定常时滞系统的稳定性分析。随后,文[28]将该方法推广到时变时滞情况。QS 方法与 IQC 方法类似,都可