普通高等教育“十二五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

复变函数与积分变换

王志勇　主编
李金兰　主审

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十二五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

复变函数与积分变换

主　编　王志勇
副主编　朱四如
主　审　李金兰
编　委　王志勇　田　菲　陈兰花
朱四如　吴春梅　刘彩霞
杨延飞　蔡泽斌　方承胜

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/王志勇主编．—武汉：华中科技大学出版社，2014.5
ISBN 978-7-5680-0045-1

Ⅰ.①复…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材　②积分变换-高等学校-教材
Ⅳ.①O174.5　②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 100687 号

复变函数与积分变换　　王志勇　主编

策划编辑：王汉江
责任编辑：江　津
封面设计：潘　群
责任校对：张会军
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编：430074　电话：(027)81321915
录　　排：武汉市洪山区佳年华文印部
印　　刷：华中理工大学印刷厂
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：9
字　　数：180 千字
版　　次：2014 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：24.80 元

华中出版

内 容 提 要

本书是参照近年全国高等学校工科数学课程教学指导委员会工作会议的意见，结合电子类课程的实际情况编写而成的. 本书内容设计简明，叙述通俗易懂，具有针对性、先进性和系统性.

本书内容包括复变函数与解析函数、复变函数的积分、级数与留数、傅里叶变换、拉普拉斯变换与 z 变换等. 每章习题配有基础和提高两种题型，并附有相关科学家介绍，便于读者自学.

本书既可作为高等院校相关专业的数学教材，也可作为科学和工程技术人员的学习参考书.

前　言

"复变函数与积分变换"是一门具有明显工程应用背景的数学课程.随着科学技术的迅速发展,它的理论和方法已广泛应用于控制技术、信息技术、电子技术和力学等许多工程技术和科学研究领域.为了满足教学改革和课程建设的需求,更好地体现先进性、实用性和针对性,编者在分析雷达工程、指挥自动化、电子对抗等专业领域对数学需求的广度、深度后,重新编排"复变函数与积分变换"课程的内容,编写了这本教学用书.

本书有以下特点.

1. 定位精准明确,强化精简实用

本书是编者结合教育部制定的教学大纲和多年的教学实践编写而成的.考虑到学时要求和面向的专业对象,在编排上注重内容精炼、由浅入深,调整相应的知识架构,适时减少理论性强的推导证明,弱化计算技巧,侧重实际应用.章节后的习题分基础题(A 题)、提高题(B 题)两种层次,注重典型性和多样性,供学生选择使用.

2. 强调基本理论,体现需求引领

淡化定理、公式的严密性和逻辑性,采用数据、图像直观说明和理解概念、定理、公式.同时,针对工科的发展需求,引入离散傅里叶变换、z 变换和小波变换等数学基础和应用.在引例、例题和应用中大量采用工学领域的简化问题,突出实用,体现先进性.

3. 注重基础应用,面向专业拓展

既注重数学基础知识及应用的通识教育,又兼顾各专业需求的工程数学知识.面向工学类专业领域,书中的引例、案例和应用覆盖相关专业,满足后续课程的学习需要,加强数学的实用性.

4. 名家名言引导,提升数学素养

作为提高数学文化的一种途径,每章引用名人名言,介绍知识概念的产生背景和来龙去脉,体现数学思想与数学观念.同时,每章有选择性地介绍有突出贡献的数学家,让学生了解数学发展的历史,引导学习数学家的探索精神,激发学习兴趣,促进意志、品格、毅力和情感等非智力因素的形成,提升数学素养.

本书由王志勇任主编,朱四如任副主编,李金兰任主审.编写分工如下:王志勇、

田非编写第 1 章，杨延飞、陈兰花编写第 2 章，蔡泽斌、吴春梅编写第 3 章，方承胜、刘彩霞编写第 4 章，朱四如编写第 5 章.

在编写过程中，参考了国内外众多教材和书籍，借鉴和吸收了相关成果，在此对这些资料的作者表示衷心感谢. 同时，对积极支持本教材编写的领导、专家及同仁表示感谢. 书中标有 * 号的内容可供不同专业选用. 本书教学参考用时 30～40 学时.

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中难免有不妥之处，敬请读者指正.

编　者

2014 年 6 月

目　　录

数学方法渗透并支配着一切自然科学的理论分支.它愈来愈成为衡量科学成就的主要标志了.

——冯·诺依曼

第1章 复变函数与解析函数

复数的概念起源于代数方程求根中出现的负数开平方. 1777 年,数学家欧拉(Euler)首创用符号 i 表示虚数单位,发现了复指数函数和三角函数之间的关系,建立了系统的复数理论,并开始把它们应用到水力学和制图学上.

以复数为自变量的函数称为复变函数,与之相关的理论称为复变函数论. 为复变函数论的创建做了最早期工作的是瑞士数学家欧拉、法国数学家达朗贝尔(D'Alembert)和拉普拉斯(Laplace);随后,法国数学家柯西(Cauchy)和德国数学家黎曼(Riemann)、维尔斯特拉斯(Weierstrass)为这门学科的发展做了大量奠基工作.

复变函数论的全面发展是在 19 世纪. 就像微积分的直接扩展统治了 18 世纪的数学那样,复变函数论统治了 19 世纪的数学,当时的数学家们公认复变函数论是最丰饶的数学分支,称赞它是抽象科学中最和谐的理论之一. 20 世纪以来,复变函数理论形成了很多分支,如整函数与亚纯函数理论、解析函数的边值问题、复变函数逼近论、黎曼曲面、单叶解析函数论,等等,数学家们开拓了复变函数论广阔的研究领域.

复变函数论的应用很广泛,它可以解决理论物理、弹性物理和天体力学、流体力学、电学等领域中很多复杂的计算. 例如,俄国的茹科夫斯基在设计飞机时用复变函数论解决了飞机机翼的结构问题,他在运用复变函数论解决流体力学和航空力学的问题上做出了突出贡献.

1.1 复数

1.1.1 复数的概念

定义 1.1 设 $x, y\in \mathbf{R}$，则称 $z=x+\mathrm{i}y$ 为复数，其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 是虚数单位.

x 称为复数 z 的**实部**，记作 $x=\mathrm{Re}(z)$；y 称为复数 z 的**虚部**，记作 $y=\mathrm{Im}(z)$. 当 $y=0$ 时，$z=x$ 即为实数；当 $y\neq 0$ 且 $x=0$ 时，$z=\mathrm{i}y$，称之为**纯虚数**.

$x+\mathrm{i}y$ 与 $x-\mathrm{i}y$ 称为**互为共轭的复数**. 若记 $z=x+\mathrm{i}y$，则其共轭复数记作 $\bar{z}$，即 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$.

两个复数相等当且仅当这两个复数的实部与虚部分别相等.

1.1.2 复数的表示法

1. 复平面与复数的几何表示

复数 $z=x+\mathrm{i}y(x, y\in \mathbf{R})$ 由一对有序实数 (x, y) 唯一确定，即可用横坐标为 x、纵坐标为 y 的点 (x, y) 来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$，如图 1-1 所示. 其中，x 轴称为**实轴**，y 轴称为**虚轴**，实轴和虚轴决定的平面称为**复平面**或 **z 平面**.

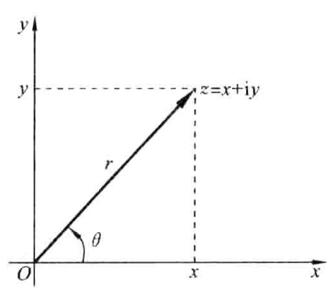


图 1-1

在复平面上，复数 z 与从原点指向点 z 的平面向量一一对应，所以复数 z 也可看作复平面内的向量. 向量的长度称为 z 的**模**，记为 $|z|$ 或 r，即

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

以正实轴为始边，以 $z(z\neq 0)$ 所对应的向量为终边的角称为复数 z 的**辐角**，记为 $\mathrm{Arg}z$.

辐角是多值的，这些值之间相差 2π 的整数倍. 在 $(-\pi, \pi]$ 之间的辐角称为 z 的**主辐角**（或主值），记为 $\arg z$. 于是

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \cdots). \tag{1-1}$$

$\arg z$ 可由反正切 $\arctan \frac{y}{x}$ 的值按如下关系确定，如图 1-2 所示.

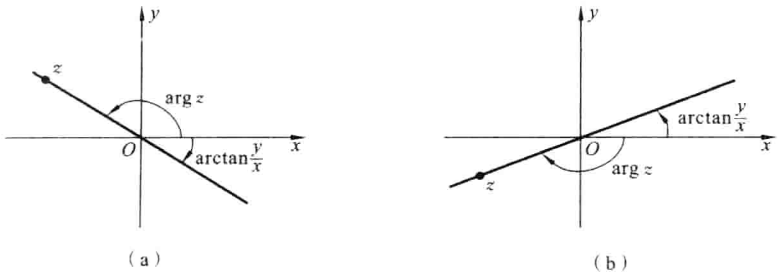


图 1-2

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z}=\begin{cases}\arctan \dfrac{y}{x}, & x>0,y\text{ 为任意实数；}\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0;\\ \arctan \dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant 0;\\ \arctan \dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0;\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases}$$

例 1.1　计算下列复数的辐角：

(1) $z=2-2\mathrm{i}$；　　(2) $z=-3+4\mathrm{i}$.

解　(1)
$$\arg z=\arctan \frac{-2}{2}=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{Arg} z=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k=0,\pm 1,\cdots);$$

(2)
$$\arg z=\arctan \frac{4}{-3}+\pi=-\arctan \frac{4}{3}+\pi,$$

$$\operatorname{Arg} z=-\arctan \frac{4}{3}+\pi+2k\pi \quad (k=0,\pm 1,\cdots).$$

2. 复数的三角表示和指数表示

如图 1-1 所示，非零的复数 z 也可用复数的模和辐角来表示，即

$$z=x+\mathrm{i}y=r\left(\frac{x}{r}+\mathrm{i}\frac{y}{r}\right)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \tag{1-2}$$

称为复数 z 的**三角形式**.

由**欧拉公式**

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,$$

可得

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}. \tag{1-3}$$

$z=re^{i\theta}$称为复数 z 的**指数形式**. 相应地,$z=x+iy$ 称为复数的**代数形式**.

例 1.2 将 $z=-1+\sqrt{3}i$ 化为三角形式与指数形式.

解 $$r=|z|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2.$$

由于 $z=-1+\sqrt{3}i$ 在第二象限,则

$$\tan\theta=-\sqrt{3},\quad \theta=\frac{2\pi}{3},$$

所以,z 的三角形式为

$$z=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right),$$

z 的指数形式为 $$z=2e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

1.1.3 复数的运算

设 $$z=x+iy,$$

$$z_1=x_1+iy_1=r_1e^{i\theta_1}=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$

$$z_2=x_2+iy_2=r_2e^{i\theta_2}=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

复数的运算规则如下.

1. 复数的加法和减法

两个复数相加减,对应于实部相加减和虚部相加减,即

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2). \tag{1-4}$$

复数加减法的几何意义:由于复数可以用向量表示,所以复数的加减法与向量的加减法一致,满足平行四边形法则和三角形法则,如图 1-3 和图 1-4 所示.

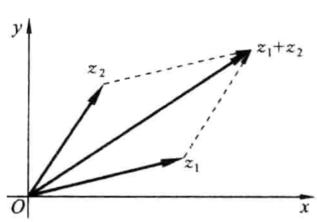


图 1-3

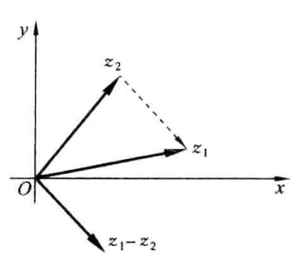


图 1-4

2. 复数的乘法

两个复数相乘遵循多项式的乘法法则,即

$$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_2 y_1 + x_1 y_2) \tag{1-5}$$

或

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}. \tag{1-6}$$

显然，

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \\ \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2. \end{cases} \tag{1-7}$$

复数乘法的几何意义：复数 z_1 与 z_2 的乘积在几何上相当于把向量 $\boldsymbol{z}_1$ 旋转 θ_2（$\theta_2>0$ 时，沿逆时针旋转），然后再伸长（$r_2>1$）或缩短（$r_2<1$）r_2 倍，如图 1-5 所示.

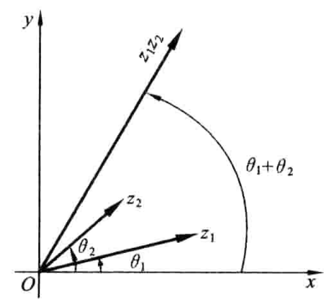


图 1-5

3. 复数的除法

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0) \tag{1-8}$$

或

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 - \theta_2)}. \tag{1-9}$$

显然，
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2.$$

复数除法的几何意义：复数 z_1 与 z_2 的商在几何上相当于把向量 $\boldsymbol{z}_1$ 旋转 θ_2（$\theta_2>0$ 时，沿顺时针旋转），然后再伸长（$r_2<1$）或缩短（$r_2>1$）$\frac{1}{r_2}$倍，如图1-6所示.

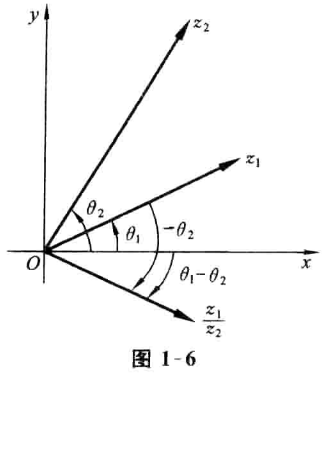


图 1-6

4. 共轭复数的运算

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0),$$

$$z\overline{z} = |z|^2 = r^2 = x^2 + y^2.$$

显然,复数的加法、乘法运算满足交换律、结合律、分配律.

例 1.3　设

$$z = \frac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} - \frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}},$$

求 $\mathrm{Re}(z)$、$\mathrm{Im}(z)$和$z \cdot \overline{z}$.

解

$$\begin{aligned} z &= \frac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} - \frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(2+\mathrm{i}) \cdot (-\mathrm{i})}{\mathrm{i} \cdot (-\mathrm{i})} - \frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} \\ &= -2\mathrm{i} + 1 - \frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{2} \\ &= -2\mathrm{i} + 1 - \mathrm{i} + 1 = 2 - 3\mathrm{i}, \end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{Re}(z) = 2, \quad \mathrm{Im}(z) = -3,$$

$$z \cdot \overline{z} = (2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i}) = 2^2 + 3^2 = 13.$$

5. 复数的乘幂

n 个相同的复数 z 的乘积称为 z 的 **n 次方幂**,记为 z^n,即

$$z^n = \overbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}^{n个}.$$

设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$,则

$$z^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta). \tag{1-10}$$

特别地,当 $r=1$ 时,有**棣莫弗(De Moivre)公式**

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta. \tag{1-11}$$

6. 复数的方根

将满足方程 $w^n = z (n \geqslant 2$ 且 $z \neq 0)$ 的复数 w 称为 z 的 **n 次方根**,记作 $w = \sqrt[n]{z}$.

令 $w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,则有 $\rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,从而

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots),$$

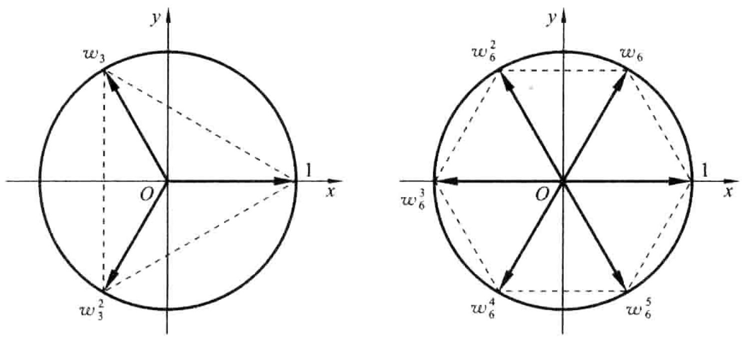
所以有

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

于是

$$w=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\quad(k=0,\pm1,\cdots).\qquad(1\text{-}12)$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，w 有互不相同的 n 个值 $w_0,w_1,\cdots,w_{n-1}$，它们的模相同，相邻两个值的辐角均相差 $\frac{2k\pi}{n}$，当 k 取其他值时，必与 $w_0,w_1,\cdots,w_{n-1}$ 中的某一个值重合. 这些值在复平面上均匀分布在以原点为中心、以 $\rho=\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上. 以 $n=3$ 为例作图 1-7(a)，以 $n=6$ 为例作图 1-7(b).



(a)　　(b)

图 1-7

例 1.4　求 $\sqrt[4]{1+i}$的所有值.

解　由于 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，所以有

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right],$$

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)\right],$$

其中 $k=0,1,2,3$.

1.1.4　复球面

除用平面内的点或向量来表示复数外，还可用球面上的点来表示复数. 具体方法如下.

作一个与复平面相切于坐标原点的球面，记切点为 S(与原点 O 重合，如图 1-8 所示). 过点 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于 N 点，N 和 S 分别称为该球面的北极和南极.

对于复平面内的任意一点 Q，过 N 和 Q 作直线，则它与该球面的另一交点是唯一的，记作点 P. 从而建立了复平面上点 Q 与球面上点 P 的一一对应关系，即球面上