规范引力对偶及其在凝聚态物理中的应用

吴健聘　著

冶金工业出版社
Metallurgical Industry Press

规范引力对偶及其在凝聚态物理中的应用

吴健聘 著

北 京
冶 金 工 业 出 版 社
2014

内容简介

本书共4章。第1章对经典弦论、*D*膜及规范引力对偶词典做一简单介绍，并介绍几个重要的反德西特黑膜，包括最一般的RN-AdS黑膜、Lifshitz黑膜、Hyperscaling violation黑膜和零基态熵黑膜，分析其近视界几何。第2章主要导出对角度归的弯曲时空狄拉克方程，并简单介绍RN-AdS黑膜背景的费米谱函数特点，导出非相对论性费米定点的低能行为。第3章介绍全息超导模型的两种构建方法：bottom-up构建和top-down构建。第4章介绍全息实现平移对称性破缺的三种方法：手动导入非均匀对偶边界的源；通过在拉格朗日量中加入拓扑项导致的平移对称性自发破缺；导入一引力子质量项，并重点介绍非对角弯曲时空几何狄拉克方程的导出。

本书的出版得到国家自然科学基金(No.11305018)的资助，适用于物理等相关专业的研究人员、教师、研究生和本科高年级学生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

规范引力对偶及其在凝聚态物理中的应用/吴健聘著. —北京：冶金工业出版社，2014.4
ISBN 978-7-5024-6529-2

Ⅰ.①规…　Ⅱ.①吴…　Ⅲ.①凝聚态—物理学—研究
Ⅳ.①O469

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第051741号

出 版 人　谭学余
地　　址　北京北河沿大街嵩祝院北巷39号，邮编100009
电　　话　(010)64027926　电子信箱　yjcbs@cnmip.com.cn
责任编辑　李　臻　美术编辑　杨　帆　版式设计　孙跃红
责任校对　李　娜　责任印制　李玉山
ISBN 978-7-5024-6529-2
冶金工业出版社出版发行；各地新华书店经销；三河市双峰印刷装订有限公司印刷
2014年4月第1版，2014年4月第1次印刷
148mm×210mm；3.75印张；112千字；114页
25.00元
冶金工业出版社投稿电话：(010)64027932　投稿信箱：tougao@cnmip.com.cn
冶金工业出版社发行部　电话：(010)64044283　传真：(010)64027893
冶金书店　地址：北京东四西大街46号(100010)　电话：(010)65289081(兼传真)
（本书如有印装质量问题，本社发行部负责退换）

前 言

笔者从 2010 年初开始研究规范引力对偶及其在凝聚态物理中的应用，至今已经 4 年。在国际刊物上发表相关学术论文十多篇，包括全息超导、全息费米系统、全息平移对称性破缺等的相关研究。规范引力对偶也称 AdS/CFT 对偶，是全息原理的一个严格实现。全息原理是将引力理论和非引力理论 (例如量子场论) 关联起来的一个重要思想。一方面，它允许利用弱耦合经典引力中的技术来研究强耦合量子系统；另一方面，利用全息对偶词典，原则上可以分析引力的量子化问题，这是理论物理最主要的挑战之一。尽管，对这个基本原理及其机制的理解仍然很有限，但是，作为一种强弱耦合的对偶，全息原理在高能粒子物理和凝聚态物理等领域已经有了广泛的应用，并带来了一些新的突破。2008 年，哈佛大学的 Hartnoll 等利用 AdS/CFT 对偶的方法建立了全息超导体模型。自此，引起了国内一些引力和弦论专家的关注，并开始进行相关的研究，目前已取得一些不错的成果。规范引力对偶及其应用是当前理论物理的前沿。20 世纪 80 年代中期以来，人们已经发现了大量新的奇异金属材料，它们的热动力学和输运特性强烈偏离于传统朗道费米液体理论所描述的特征。这些所谓的非费米液体包括高温铜酸盐超导体的奇异金属相以及近量子相变的重费米系统。到目前为止，仍然没有令人满意的理论框架来描述它们。非费米液体本质上是强耦合系统，如何理解强耦合费米系统以及寻找其背后的组织原则是当前理论物理最具挑战性的问题之一。

本书不是一个综述性的评论。由于笔者对入门时的困难有切身体会，因此，本书从经典弦论基础，特别是和规范引力对偶相关的 D 膜讨论出发做一简单介绍，这样的处理对入门者迅速理解规范引力对偶应有所帮助。此外，特别注重一些细节和技术性的困难，例如关于弯曲时空中狄拉克方程的导出，在一般的研究性文献里面并没有给出详细的推导过程，而这正是进行这方面研究的一个困难所在。笔者在第 2、4 章分别给出了一般静态对角度归、静态非对角度归和动态的 Vaidya BTZ 黑洞几何背景的狄拉克方程的详细导出过程。狄拉克方程在视界处的边界条件的导出也是一个难点，一般的研究性文献也仅仅给出结果，笔者在第 2 章分别给出了几个不同的近视界几何的边界条件的详细导出过程，希望这样的处理能对开始进行相关研究的研究人员有所帮助。而相关前沿方面的研究进展可参考本书的参考文献及其他相关文献。

本书第 4 章大部分内容来自与凌意教授、牛超博士、冼卓宇和张宏宝博士的相关合作，也得益于与李伟佳博士和曾化碧博士的相关讨论，以及方励青、葛先辉、况小梅、田雨、王斌、吴小宁、吴俊宝、周洋等同行的合作和讨论，在此表示深切的谢意。此外，也感谢渤海大学的张德福博士和张继芳老师对本书的写作和出版的密切关注和大力支持。本书的出版也得到国家自然科学基金 (No. 11305018) 的资助。

作 者

2014 年 1 月

目录

1 规范引力对偶

1.1 弦 论 基 础

本节将简单介绍弦论的基本概念。标准的弦论教科书可参考文献 [1]~[7]。简短而清楚的综述可参考文献 [8]。本节中的约定为：大写字母 $M, N, \cdots$ 为时空指标，小写字母 $m, n, \cdots$ 为世界体积指标；G_{MN} 为时空度规，g_{mn} 为世界体积上的诱导度规。

1.1.1 p-膜

弦论最基本的要素是弦。弦是一维的延展体。弦随时间演化，在时空中扫出一个二维面，称为弦世界面，相应于点粒子的世界线。在弦论中，还存在其他的延展体 ——p-膜。点粒子为 0-膜，弦是 1-膜，2-膜也叫膜片 (membrane)。p-膜的自由运动由长度、面和体积的最小作用量原理决定。

1.1.1.1 点粒子

点粒子作用量正比于世界线的长度，可写为

$$S_0 = -m\int_\gamma \sqrt{-\mathrm{d}X^M\mathrm{d}X^N G_{MN}(X)} = -m\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mathrm{d}\lambda\sqrt{-g_{\lambda\lambda}(\lambda)} \tag{1-1}$$

由于作用量 S_0 为无量纲量，故 m 的量纲为长度量纲的倒数，即 $[m] = L^{-1}$。在自然单位制中，$M = L^{-1}$，故 m 的量纲为质量量纲。从弦论的观点看，时空坐标 $X^M(\lambda)$ 是世界线上的场。λ 为世界线坐标。$g_{\lambda\lambda}$ 为世界线诱导度规

$$g_{\lambda\lambda}\big(X(\lambda)\big) = \frac{\mathrm{d}X^M}{\mathrm{d}\lambda}\cdot\frac{\mathrm{d}X^N}{\mathrm{d}\lambda}G_{MN}(X) \tag{1-2}$$

世界线坐标 λ 的选取具有任意性，即作用量 S_0 是微分同胚不变的 (重参数化不变)。具体说，即在变换 $\lambda \to \lambda'(\lambda)$, $\lambda'(\lambda_0) = \lambda_0, \lambda'(\lambda_1) = \lambda_1$

下，作用量 S_0 不变，因此，需要规范固定。通常的一个规范是静态规范

$$\lambda = X^0 (\equiv t) \tag{1-3}$$

此规范将世界线上的类时坐标和时空中的时间坐标认同。另一常用的规范是

$$\frac{\mathrm{d}X^M}{\mathrm{d}\tau} \cdot \frac{\mathrm{d}X^N}{\mathrm{d}\tau} G_{MN} \equiv U^M U_M = -1 \tag{1-4}$$

$\lambda = \tau$ 为固有时。

但是，式 1-1 有一平方根，对自由例子而言，没有问题，但对弦而言，将是一个问题，后面将讨论到。此外，此式仅对有质量粒子有效。经典上，存在一个等效的作用量。它不包含平方根，而且还允许推广到无质量情形。此作用量称为质壳 (on-shell) 等效的作用量

$$\widetilde{S}_0[e, X] = \frac{1}{2} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mathrm{d}\lambda \Big(e^{-1} \partial_\lambda X^M \partial^\lambda X_M - m^2 e \Big) \tag{1-5}$$

$e(\lambda)$ 为辅助场，是世界线上的单标架场 (einbein)。式 1-5 和式 1-1 的等价性证明如下

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Big(e^{-1} \partial_\lambda X^M \partial^\lambda X_M - m^2 e \Big) \\
&\Rightarrow 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e} = \frac{1}{2} \Big(-e^{-2} \partial_\lambda X^M \partial^\lambda X_M - m^2 \Big) \\
&\Rightarrow \partial_\lambda X^M \partial_\lambda X^N G^{MN} + m^2 e^2 = 0 \qquad \left(\Rightarrow e = \frac{1}{m} \sqrt{-g_{\lambda\lambda}} \right) \\
&\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} (-m^2 - m^2 e) = -m^2 e = -m \sqrt{-g_{\lambda\lambda}}
\end{aligned}$$

基本思想是对辅助场 e 变分，导出运动方程 (第三行)，然后将运动方程重新代回式 1-5，即可得到式 1-1。

现在，在 bulk 时空中导入电磁场 $A_1(x) = A_M(x) \mathrm{d}x^M$。要强调的是，这是在时空里的场。其作用量为

$$S_M = -\frac{1}{4} \int_M \mathrm{d}^D x \sqrt{-G} F^{MN} F_{MN} \tag{1-6}$$

麦克斯韦场可以和粒子世界线耦合，其作用量为

$$S_{0WZ} = -q \int_\gamma \mathrm{d}X^M A_M(X) = -q \int_\gamma \mathrm{d}\lambda \frac{\mathrm{d}X^M}{\mathrm{d}\lambda} A_M(X) \tag{1-7}$$

此作用量称为 Wess-Zumino 作用量，q 为粒子电荷。式 1-7 在规范变换 $\delta A_M = \partial_M \theta(x)$ 下不变，要求 $X^M(\lambda)$ 为有源场，即世界线必终止于源。类比于电场线必终止于电荷。

1.1.1.2 p-膜

p-膜是 p 维延展物体，可由 σ^m $(m = 0, 1, \cdots, p)$ 参数化，并通过时空坐标 $X^M(\sigma)$ 嵌入到 bulk 时空中。作用量正比于 p-膜所扫的体积

$$S_p = -T_p \int_\Sigma \mathrm{d}^{1+p}\sigma \sqrt{-\det g_{mn}(\sigma)} \tag{1-8}$$

$g_{mn}\big(X(\sigma)\big) = \partial_m X^M \partial_n X^N G_{MN}(X)$ 为世界体积的诱导度规。T_p 为 p-膜张力，量纲为 M^{1+p}。p-膜和其他时空场之间的相互作用可参考文献 [1]~[8]，在此不详述。

1.1.2 弦

1.1.2.1 Nambu-Goto 作用量

$p = 1$ 的延展体为弦，其作用量为

$$S_1[X] = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_\Sigma \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{-\det g_{mn}(\sigma)} \tag{1-9}$$

此即 Nambu-Goto 作用量。世界面坐标为 $\sigma^m = (\tau, \sigma)$。$\alpha' = l_s^2$，$l_s$ 为弦长度。有两种弦，即开弦和闭弦。闭弦扫出没有边界的世界面，而开弦扫出有边界的世界面。

若定义 $\dot{X}^M := \dfrac{\partial X^M}{\partial \tau}, (X^M)' := \dfrac{\partial X^M}{\partial \sigma}$ 以及 $A \cdot B := A^M B^N G_{MN}$，则弦世界面上的度规可写为

$$\begin{aligned}
g_{\tau\tau} &= G_{MN} \frac{\partial X^M}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X^N}{\partial \tau} = \dot{X}^2 \\
g_{\tau\sigma} &= G_{MN} \frac{\partial X^M}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X^N}{\partial \sigma} = \dot{X} \cdot X' (= g_{\sigma\tau}) \\
g_{\sigma\sigma} &= G_{MN} \frac{\partial X^M}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial X^N}{\partial \sigma} = (X')^2
\end{aligned} \tag{1-10}$$

写成矩阵形式，则

$$g_{mn}=\begin{pmatrix}\dot{X}^2 & \dot{X}\cdot X' \\ \dot{X}\cdot X' & (X')^2\end{pmatrix} \tag{1-11}$$

在此约定下，式 1-9 可写为

$$S_1[X]=-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_\Sigma \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2-\dot{X}^2(X')^2} \tag{1-12}$$

通过变分此作用量，可求得相应的共轭动量

$$P^\sigma_M=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(X^M)'}=-T\frac{(\dot{X}\cdot X')\dot{X}_M-\dot{X}^2X'_M}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2-\dot{X}^2X'^2}} \tag{1-13}$$

$$P^\tau_M=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\dot{X}^M)}=-T\frac{(\dot{X}\cdot X')X'_M-X'^2\dot{X}_M}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2-\dot{X}^2X'^2}} \tag{1-14}$$

1.1.2.2 Polyakov 作用量

由于式 1-9 有一平方根，不方便量子化。类似于前面所讨论的粒子作用量的情况，Nambu-Goto 作用量亦有一质壳等效的作用量，即 Polyakov 作用量 (也称弦西格玛模型)

$$\widetilde{S}_1[X,\gamma]=-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma \mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-\gamma}\gamma^{mn}\partial_mX^M\partial_nX^NG_{MN}(X) \tag{1-15}$$

相应于点粒子作用量中所导入的辅助场 $e(\lambda)$，$\gamma_{mn}(\tau,\sigma)$ 为世界面上的辅助场。此辅助场不同于诱导度规 g_{mn}。同样，对于世界面坐标 (τ,σ) 也具有选择的任意性。如果弦世界面上的欧拉示性数为零，可以选择 $\gamma_{mn}(\tau\sigma)=\eta_{mn}$，称为共形规范。但共形规范仍然不能完全固定规范自由度。

1.1.2.3 边界条件

对式 1-9 做变分，可以导出弦的运动方程

$$\frac{\partial P^\tau_\mu}{\partial\tau}+\frac{\partial P^\sigma_\mu}{\partial\sigma}=0 \tag{1-16}$$

此运动方程为微分方程，要解此方程，需要给定弦的边界条件。对闭弦而言，边界条件为

$$X^M(\tau,\sigma)=X^M(\tau,\sigma+\pi) \tag{1-17}$$

对开弦而言，有两种类型的边界条件。第一种为诺伊曼边界条件 (Neumann boundary condition)，也称为“第二类边界条件”。诺伊曼边界条件指定了微分方程的解在边界处的微分

$$P_M^\sigma\Big|_{\sigma=0,\pi}=0 \tag{1-18}$$

或者

$$\frac{\partial X^M}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=0,\pi}=0 \tag{1-19}$$

从式 1-13 可看出上面两式等价。诺伊曼边界条件表明没有动量从弦的端点流出，弦的端点可以在 bulk 时空自由运动。因此，诺伊曼边界条件亦称为自由端点边界条件。

另一类边界条件为狄利克雷边界条件 (Dirichlet boundary condition)，也称为“第一类边界条件”。狄利克雷边界条件指定微分方程的解在边界处的值

$$P_M^\tau\Big|_{\sigma=0,\pi}=0 \tag{1-20}$$

或者

$$X^M\Big|_{\sigma=0,\pi}=c^M \tag{1-21}$$

c^M 为常数。这两个边界条件的等价性亦可从式 1-14 中看出。狄利克雷边界条件表明弦的端点固定在 bulk 时空中，因此也称为定点边界条件。当弦的端点加上狄利克雷边界条件时，在弦的端点上，动量不再守恒，有动量从弦的端点流出 (进)。因此，弦的端点需要搭在另外的延展体上。此延展体称为 Dp-膜。

具体地说，弦的端点搭在 p-膜上，表明弦的端点被限制在 p-膜所产生的 $p+1$ 维 $(M=m=0,1,\cdots,p)$ 超曲面上运动，在此 $p+1$ 维超曲面上，应该加上诺伊曼边界条件。而在剩下的 $D-p-1$ 维 $(M=a=p+1,\cdots,D-1)$，则应加上狄利克雷边界条件。因此，从另

一角度看，开弦端点扫出了 $p+1$ 维超曲面，此超曲面称为 Dp-膜。关于 Dp-膜的详细讨论，可参考文献 [3]、[9]~[12]。在下一小节，仅给一简单的介绍。

1.1.3 D-膜

D-膜为一类超曲面，是可以让开弦的端点以狄利克雷边界条件固定的物体。电磁相互作用，强相互作用和弱相互作用约束在膜上，而引力分布在整个时空。因此，引力为高维所稀释。这解释了引力比其他相互作用要弱的原因。D-膜是许多超引力反对称形式的基本电荷和磁荷。引力的解 —— 黑 p-膜和 D-膜可以认同。

对不同的弦论而言，D-膜的维数是有约束的。对于Ⅱ B 型弦论而言，p 为奇数 ($p=-1,\ 1,\ ,3\ ,5,\ 7,\ 9$)。对于Ⅱ A 型弦论，$p$ 为偶数 ($p=0,\ 2,\ ,4\ ,6,\ 8$)。对于Ⅰ型弦论，$p=1,\ 5,\ 9$。

开弦的无质量激发给出标量场，规范场和费米超对称伙伴。搭在 Dp-膜上的开弦的量子化给出 $D-p-1$ 个无质量标量场 —— 横向扰动。这 $D-p-1$ 个标量场描述了 Dp-膜的横向位置。标量场导致了在这 $D-p-1$ 个横向上的平移对称性破缺。单个 D-膜也激发世界体积上的单个 $U(1)$ 多重态，这个无质量的矢量场来自于零长度的弦 —— 起点和终点皆搭在膜的同一位置。

如果有 N 个 D-膜，则开弦可以从膜 i 延伸到膜 j，标记为 $[ij]$，其中，$i,j\in\{1,N\}$。i，j 称为 Chan-Paton 因子。每一个弦的终点携带一规范群的 Chan-Paton 因子。$U(1)$ 矢量场根据相对 D-膜的进入和逸出进行标记，分别为基本表示和反基本表示，因此可看作自伴场。

D-膜的作用量为 Dirac-Born-Infeld (DBI) 作用量。DBI 作用量是 p-膜作用量 (式 1-8) 加上一些额外项。这些额外项包括反对称的二形式场 F_{mn} 及相应的陈西蒙斯项。在弦标架下，其形式为

$$S_{\mathrm{DBI}}=-T_p\int \mathrm{d}^{p+1}\sigma \mathrm{e}^{-\Phi}\sqrt{-\det(P[G+B]_{mn}+2\pi\alpha' F_{mn})}+\frac{(2\pi\alpha')^2}{2}T_p\int P[C^{(p+1)}]\wedge F\wedge F \tag{1-22}$$

Φ 为伸缩子 (Dilaton)，B 为 NS-NS 2-形式场。上式为 D-膜上阿贝尔规范理论玻色型部分。当有 N 个 D-膜重合在一起时，其世界体积上

的规范理论为非阿贝尔的，玻色部分作用量为

$$S_{\mathrm{DBI}}^{NA} = -T_p \mathrm{Str} \int \mathrm{d}^{p+1}\sigma \sqrt{\det Q} \times \left\{ \det \left[P_{mn}(E_{MN} + E_{M\mu}(Q^{-1} - \delta)^{\mu\nu} E_{\nu N}) + 2\pi\alpha' F_{mn} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{1-23}$$

在上面作用量中，没考虑 WZ 项。其中，$Q^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + i2\pi\alpha'[\Phi^\mu, \Phi^\rho]E_{\rho\nu}$，$E_{MN} = g_{MN} + B_{MN}$。关于 DBI 作用量的费米场部分，在此不详述，可参考文献 [13]。

1.2 规范引力对偶

基于贝肯斯坦和霍金关于黑洞熵的研究，特霍夫特和沙氏金提出了全息原理[14]。全息原理认为，一个系统原则上可以由它边界上的一些自由度完全描述。具体地说，一个包括引力的动力学系统可以由其边界上的量子场论描述。AdS/CFT 对偶 [15~17] 是全息原理的严格实现。AdS/CFT 对偶的全称为反德西特/共形场论对偶 (Anti-de Sitter/Conformal Field Theory Correspondence)。AdS/CFT 对偶也称为规范弦对偶或规范引力对偶。AdS/CFT 对偶可表述为：$d+1$ 维反德西特 (AdS_{d+1}) 时空中的弱耦合经典引力理论对应于边界上 d 维强耦合量子场论。这表明，强相互作用多体理论中的一些复杂问题可以映射到经典引力中的简单问题。AdS/CFT 对偶有多种表述方式。最初的表述为，$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 空间中的ⅡB 型弦论，和 (3+1) 维闵可夫斯基时空中的超对称 $\mathcal{N} = 4$ 杨–米尔斯规范场之间存在一一对应关系。本节将从最初的表述出发进行讨论，相关的讨论可参考文献 [9]~[12]，[15]~[18]。

1.2.1 AdS/CFT 对偶

考虑超弦理论中的 $D3$ 膜。在超弦中，时空的维数为 10。$D3$ 膜是 10 维时空中的超曲面，开弦端点以狄利克雷边界条件固定其上。在低能极限下，这些开弦的自由度对应于超对称 $\mathcal{N} = 4$ 杨–米尔斯规范场，其规范群为 $U(N)$。N 为 RR 荷的数目，也是 $D3$ 膜的个数。

另外，$D3$ 膜也是 10 维Ⅱ B 型超引力的孤立子解，其形式为

$$\mathrm{d}s^2 = H_3(r)^{-\frac{1}{2}}\eta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j + H_3(r)^{\frac{1}{2}}(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_5{}^2) \tag{1-24}$$

其中调和函数 $H_3(r)$ 为

$$H_3(r) = \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right), \quad r^2 = \sum_{a=4}^{9} y_a^2 \tag{1-25}$$

$i,j \in \{0,\cdots,3\}$ 为 $D3$ 膜世界体积上的坐标，$a \in \{4,\cdots,9\}$ 为与 $D3$ 膜超曲面垂直的横向坐标。此外，$L^4 = 4\pi g_s N\alpha'^2$，$\lambda = g_s N = g_{YM}^2 N$ 为特霍夫特耦合常数。

当 $r \gg L$ 时，式 1-24 趋向于平直的 10 维闵氏时空。而在近视界极限 $(r \ll 1)$ 下，度规约化为如下的 $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 时空

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 \eta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j + \left(\frac{L}{r}\right)^2 (\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_5{}^2) \tag{1-26}$$

L 为反德西特时空的半径。反德西特时空具有负曲率 $-12/L^2$，其边界位于 $r = \infty$ 处。

综上所述，可以从两方面来看 N 个相互重叠的 $D3$ 膜。一方面是其四维世界体积的场论是 $\mathcal{N} = 4$ 的 $U(N)$ 超对称杨–米尔斯规范理论，它的低能有效作用量为 DBI 和 WZ 作用量；另一方面，N 个相互重叠的 $D3$ 膜可以作为Ⅱ B 型超弦理论的低能极限 —— Ⅱ B 型超引力的一个解。在近视界极限下，其几何为 $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$。基于上面的观察，马尔达西那 (Maldacena) 认同了这两个理论的低能极限。

通常，AdS/CFT 对偶有三个不同的版本，取决于所取极限的精确形式。最强的形式为：$(3+1)$ 维闵氏时空中 $\mathcal{N} = 4$ 的 $U(N)$ 超对称杨–米尔斯规范理论和 $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 时空的Ⅱ B 型超弦理论是等价的。此对应形式是普遍有效的，但是到目前为止，弯曲时空弦论的量子化仍然不清楚，要检验此假设是困难的。

另一版本为大 N 极限。即保持 $\lambda = g_{YM}^2 N$ 不变，而令 $N \to \infty$。此时，弦耦合常数 $g_s \equiv g_{YM} \to 0$。此时，$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 时空的Ⅱ B 型超弦理论约化为半经典极限的情况。

第三种表述是在第二种表述基础上，考虑大 λ 的情况。即 $N \to \infty$ 时，但 λ 不变。根据 $L^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2$ 及 $\alpha' = l_s^2$，可得 $\dfrac{L^4}{l_s^4} = 4\pi g_s N \gg 1$。即弦长度 $l_s \to 0$，AdS 时空半径 L 远大于弦长度 l_s。在此极限下，AdS/CFT 对偶表述为：强耦合 $\mathcal{N} = 4$ 的 $SU(N)$ 对称杨–米尔斯规范理论与 $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 时空的超引力理论等效。

1.2.2 场/算符对应

AdS/CFT 对偶的数学描述为[16, 17]

$$\left\langle \mathrm{e}^{i\int \mathrm{d}^4 x \psi_0(x) O(x)} \right\rangle_{SYM} = Z|_{\mathrm{II\,B,string}}[\psi(x,r)|_{r\to\infty} = \psi_0(x)] \tag{1-27}$$

此数学描述给出了场论中的规范不变算符和对偶弦论中场之间的一一对应关系，称为场/算符对应。此数学描述了最强版本的 AdS/CFT 对偶。公式左边可以用来计算算符关联函数，而右边为 $\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 时空中超弦理论的配分函数。具体计算时，需将场 $\psi(x,r)$ 取为其在无穷远处的值 $\psi(x,r)|_{r\to\infty} = \psi_0(x)$。

但是，到目前为止，仍然不知道如何计算Ⅱ B 型超弦理论的配分函数。所以我们常常考虑 AdS/CFT 对偶的第三种表述，即 $N \to \infty$ 和大 λ 的特殊极限。此时，$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ 时空中超弦理论约化为经典超引力理论。并且，利用鞍点近似❶，可以计算出Ⅱ B 型弦论的配分函数

$$\begin{aligned} &Z|_{\mathrm{II\,B,string}}[\psi(x,r)|_{r\to\infty} \\ &= \psi_0(x)] \approx \exp\{iS_{\mathrm{II\,B,sugra}}[\psi(x,r)|_{r\to\infty} = \psi_0(x)]\} \end{aligned} \tag{1-28}$$

因此，AdS/CFT 对偶的第三种表述的数学描述为

$$\left\langle \mathrm{e}^{i\int \mathrm{d}^4 x \psi_0(x) O(x)} \right\rangle_{SYM} = \exp\{iS_{\mathrm{II\,B,sugra}}[\psi(x,r)|_{r\to\infty} = \psi_0(x)]\} \tag{1-29}$$

最后，对如何利用 AdS/CFT 对偶计算算符 O 的关联函数做一简单总结：

---

❶ 鞍点近似指的是在作用量泛函积分中只考虑场的经典构型对作用量的贡献。

(1) 导出算符 O 对应的 bulk 场 ψ 的超引力运动方程；

(2) 解 ψ 的运动方程；

(3) 将解 ψ 代回超引力的作用量 $S_{\text{II B,sugra}}$，并写成指数形式 exp $(iS_{\text{II B,sugra}})$；

(4) 对源场 ψ_0 取变分。

例如，算符 O 的关联函数为

$$\langle O\rangle = i\frac{\delta}{\delta\psi_0}S_{\text{II B,sugra}} \tag{1-30}$$

通常，bulk 的质壳作用量和 CFT 生成泛函皆发散。引力方面，发散是因为 AdS 时空的体积是无限的，即长距红外 (IR) 发散。在场论方面，是短距紫外 (UV) 发散。因此，我们需要通过正规化和重整化来解决此问题。在此不作详细讨论。

1.2.3 标量场的场/算符对应

本节以标量场 Ψ 为例说明场/算符对应。通常，质量为 m 的标量场的作用量可写为

$$S_\Psi = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^{d+1}x\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\partial_\mu\Psi\partial_\nu\Psi + m^2\Psi^2) \tag{1-31}$$

利用变分原理，可导出其运动方程

$$\nabla^2\Psi - m^2\Psi = 0 \tag{1-32}$$

为讨论问题的方便，先在一普遍的度规形式

$$\mathrm{d}s^2 = -g_{tt}(u)\mathrm{d}t^2 + g_{uu}(u)\mathrm{d}u^2 + g_{ii}(u)(\mathrm{d}x^i)^2 \tag{1-33}$$

下导出式 1-32 的具体表达

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_u(\sqrt{-g}g^{uu}\partial_u\psi) - g^{xx}k^2\psi + g^{tt}\omega^2\psi - m^2\psi = 0 \tag{1-34}$$

在上面的方程中，已经做了傅里叶展开 $\Psi(u,t,x^i) = \psi(u,k^\mu)\mathrm{e}^{ik_\mu x^\mu}$，$k_\mu = (-\omega,\vec{k})$。特别的，由于空间方向的旋转对称性，已经设 $k_1 = k$ 和 $k_i = 0,\ i \neq 1$。