高等数学物理方法

倪国喜　编著

科学出版社

中国工程物理研究院研究生系列教材

高等数学物理方法

倪国喜　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要讲述工程及物理中常用的数学方法，全书共分 6 章：第 1 章主要围绕广义函数介绍线性泛函分析的最基础的内容；第 2 章介绍积分变换中最重要的两种变换：Fourier 变换与 Laplace 变换；第 3 章介绍二阶常微分方程的幂级数解，对常点和正则奇点附近的幂级数解的结构进行了详细的讨论，并介绍了涉及的几种重要的特殊多项式；第 4 章介绍稳态问题的解析方法；第 5 章介绍演化方程的解析方法，它们是热传导方程与波动方程的初值及初边值问题的解法；第 6 章介绍曲线坐标系中的分离变量法，这里只考虑球坐标系与柱坐标系中的分离变量法. 全书突出广义函数在数学物理问题求解中的作用，并从微分流形的概念出发，对曲线坐标系中的微分算子给出了严格的推导，自成一体.

本书可作为非数学类的高年级本科生或研究生教材，也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学物理方法/倪国喜编著. —北京：科学出版社, 2014

ISBN 978-7-03-040204-2

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①倪…　Ⅲ. ①非线性偏微分方程-研究生-教材
Ⅳ. ①O175.29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 049030 号

责任编辑：李　欣　赵彦超／责任校对：胡小洁
责任印制：赵德静／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2014 年 6 月第　一　版　开本：720 × 1000 1/16
2014 年 6 月第一次印刷　印张：12 1/4
字数：247 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

数学作为一门基础学科在自然科学与社会科学中扮演越来越重要的角色, 尤其是微分方程. 物质世界的运动一般可用微分方程描述, 从牛顿力学到量子力学, 从电场到磁场, 从股市波动到城市的交通流, 都有相应的微分方程模型. 发现和掌握其运动规律需要对微分方程有基本的认识, 除少数线性方程外, 大部分微分方程的解不能显式表示, 但仍然可研究其解的性质和特点, 内容非常丰富, 已经发展成数个独立的学科, 这里只能挑选其中最基本的、最有代表性的内容进行介绍.

本书由作者近年来在中国工程物理研究院北京研究生部讲授数学物理方法课程的讲稿整理而成的. 讲授的对象主要为工程物理类专业的研究生. 考虑到非数学类专业学生的数学基础, 在内容选材上尽可能不涉及太多的数学中比较专门的内容, 只涉及物理学中的主要的数学方法与技巧, 同时希望课程的内容尽可能的自封, 并给出其严格的证明, 便于学习与掌握. 鉴于这种基本的想法, 本书在内容上作了如下安排:

第 1 章主要围绕广义函数介绍线性泛函分析的最基础的内容. 这里只选择了度量空间和 Hilbert 空间及其上的线性算子作了介绍. 度量空间是在集合上赋予一种度量, 它为基本的分析运算作准备, 是泛函分析的出发点. Hilbert 空间是在线性空间中增加了角度的概念, 从而有了正交的概念, 它在理论物理中有比较重要的应用, 线性算子的特征值是谱理论的最基础部分, 它在 Hilbert 空间中有比较完整的理论研究, 算子的谱理论是物理学中重要研究对象. 广义函数是一种特殊的线性算子, 广义函数的引进为 δ 函数提供了严密的数学理论基础, δ 函数在后面的章节中有很重要而广泛的应用.

第 2 章介绍积分变换. 积分变换是数学物理方法中的一个重要工具, 这里只介绍两种最重要的积分变换：Fourier 变换与 Laplace 变换. Fourier 变换在工程技术与物理中有很多的应用, 它将微分运算转化为代算运算, 为偏微分方程的基本解的求解提供了一个很好的途径, 它在后续的章节中会有一些具体的应用. Laplace 变换也是一种重要的变换, 它在半空间中进行的, 主要用于求解常微分方程. 这两种变换都是在复域中进行的, 本书将在 2.1 节介绍将要用到的复变函数的基本内容, 它们是 Cauchy 积分定理、Cauchy 积分公式与留数定理.

第 3 章介绍二阶常微分方程的幂级数解. 这里首先介绍二阶常微分方程的基本理论, 主要是解的结构, 无论是常系数还是变系数, 二阶常微分方程一般有两个线性无关的解, 它为讨论二阶常微分方程的幂级数解提供了理论基础. 常微分方程

的幂级数解的关键是弄清解的结构, 这里对常点和正则奇点附近的幂级数解的结构进行了详细的讨论, 知道解的结构之后, 确定幂级数解的系数是一些初等的运算. 同时在二阶常微分方程的幂级数求解时会很自然地导出许多特殊函数, 这里主要涉及几种重要的特殊多形式, Hermite 多项式、Legendre 多项式与 Bessel 多项式, 其他的一些重要的特殊函数将放在习题中加以介绍.

第 4 章介绍稳态问题的解析方法, 位势方程是最典型的稳态方程, 它的求解是数学物理方程求解的基础, 尽管多数的数学物理方程没有显式表达的解, 但是解析的求解方法还是有意义的, 通过这些解的性质的研究, 可以期望同类型的方程也有相似的性质. 这里先推导位势方程的基本解, 对规则区域中的位势方程的边值问题, Green 函数方法是求解这类问题最直观也是最有效的方法. 与位势方程等价的是变分问题的求解. 古典的变分法就是求解泛函的极值点, 理论上它等价于 Euler-Lagrange 方程的解, 但它们的研究方法有很大的不同, 这里重点介绍如何在无约束与有约束的条件下得到泛函的 Euler-Lagrange 方程, 并对一些简单的 Euler-Lagrange 方程直接给出其解的表示.

第 5 章介绍演化方程的解析方法. 热传导方程与波动方程是数学物理方程中最重要的两类演化方程, 它们有很明确的物理意义, 其解法有比较广泛的意义. 利用 Fourier 变换可以很简单地求解热传导方程的 Cauchy 问题, 得到其基本解, 利用叠加原理可以得到非齐次 Cauchy 问题的解. 一维波动方程的 Cauchy 问题用 Fourier 变换方法也可得到基本解, 利用叠加原理就可得到非齐次 Cauchy 问题的解. 对三维波动方程的 Cauchy 问题目前多采用球平均方法, 这里将利用 Fourier 变换直接求解. 热传导方程与波动方程的初边值问题一般用分离变量求解. 这两类方程解的性质有很大的差别, 这里分别介绍它们的一些主要性质.

第 6 章介绍曲线坐标系中的分离变量法. 它可以看作第 5 章的补充, 但由于它有一定的特殊性, 所以单独介绍. 这里只考虑两种正交曲线坐标系：球坐标系与柱坐标系. 它们分离变量法的基础是两种坐标系中 Laplace 算子的表示, 虽然有现成的结果, 这里将从原始的定义出发, 从微分流形开始, 介绍微分流形上的微分算子, 这种微分算子的表示对任意形式的曲线坐标系都成立, 它为 Laplace 算子、梯度与散度算子的表式提供了严格的理论依据, 也为进一步的学习打下基础.

本书虽然数易其稿, 但缺点和错误在所难免, 希望广大读者提出宝贵的意见和建议, 以便进一步完善. 最后感谢中国工程物理研究院北京研究生部、国家自然科学基金以及计算物理重点实验室的大力支持.

倪国喜
北京应用物理与计算数学研究所
2014 年 3 月

目　　录

第 1 章　广义函数论

广义函数是数学与物理中一个非常重要的概念, 它是泛函分析的重要内容之一. 泛函分析是现代数学的基础, 它有非常丰富的内容, 它研究的对象是一般的抽象空间, 以及其上的代数的拓扑的结构, 它是从具体的数学与物理问题中抽象出来的, 得到的结论更具有一般性. 本章将从度量空间开始, 逐步过渡到广义函数, 广义函数理论将为 Fourier 变换奠定坚实的理论基础, 并在数学物理方程的基本解的求解中发挥重要作用.

1.1　度 量 空 间

函数是数学的一个基本概念, 它的自变量与函数值都是数域, 函数可以认为是数域间的映射. 但映射并非一定定义在数域之间, 它可以定义在比较广泛的集合之间, 为了能研究这种映射的微积分, 需要在这种集合上定义拓扑的结构, 其中最基本的就是度量, 这就是所谓的度量空间.

度量空间又称距离空间, 它是在给定的集合上定义一种拓扑结构. 定义这种结构的目的是为了能对其上的映射作分析运算, 如收敛性、微分与积分等.

1.1.1　度量空间的定义

定义 1.1.1(度量空间)　设 X 是一个非空集合, 称 X 为度量空间, 是指在 X 上定义了一个二元的实值函数 $\rho(x,y)$, 满足下列三个条件:

(i) $\rho(x,y)\geqslant 0, \forall x,y\in X$, 且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$,

(ii) $\rho(x,y)=\rho(y,x), \forall x,y\in X$,

(iii) $\rho(x,z)\leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z), \forall x,y,z\in X$,

这里 ρ 称为 X 上的一个度量 (或距离), 记 (X,ρ).

注: (i) 称为非负性条件;

(ii) 称为对称性条件;

(iii) 为三角关系, 它是欧氏空间的三角关系的一种推广, 即两边之和大于第三边.

例 1.1.1　欧氏空间 R^n.

$\forall x,y\in R^n$, 定义 $\rho(x,y)=\left((x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\right)^{1/2}$, 则 (R^n,ρ) 为度量空间.

证　容易证明 $\rho(x,y)$ 满足度量空间定义的条件 (i), (ii), (iii).

对 (i), $\rho(x,y)=\left((x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\right)^{1/2}\geqslant 0$;

对 (ii), $\rho(x,y)=\left((x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\right)^{1/2}$

$$=((y_1-x_1)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2)^{\frac{1}{2}}=\rho(y,x);$$

而 (iii) 就是欧氏空间的基本关系式.

例 1.1.2　记 $C[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体, 对 $x,y\in C[a,b]$ 定义 $\rho(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$, 则 $(C[a,b,],\rho)$ 为度量空间.

证　直接验证定义中的条件

(i) $\rho(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\geqslant|x(t)-y(t)|\geqslant 0$,

(ii) $\rho(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|y(t)-x(t)|=\rho(y,x)$,

(iii)
$$\begin{aligned}\rho(x,z)&=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)+y(t)-z(t)|\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|y(t)-z(t)|\\&=\rho(x,y)+\rho(y,z).\end{aligned}$$

因此 $(C[a,b,],\rho)$ 为度量空间.

例 1.1.3　平方可积函数空间 $L^2[a,b]$.

定义 $L^2[a,b]=\left\{f:\int_a^b|f(x)|^2\,dx<\infty\right\}$, 它是 $[a,b]$ 上的平方可积函数全体, 记

$$\|f\|_{L^2}=\left(\int_a^b|f|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

$\forall x,y\in L^2[a,b]$, 定义 $\rho(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$, 则 $(L^2[a,b,],\rho)$ 是度量空间.

证　(i) $\rho(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\geqslant 0$,

(ii) $\rho(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\,dt\right)^{1/2}=\left(\int_a^b|y(t)-x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}=\rho(y,x)$,

(iii) 利用积分形式的 Hölder 不等式:

$$\left|\int_a^b fgdx\right|\leqslant\left(\int_a^b|f|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b|g|^2dx\right)^{1/2},\quad\forall f,g\in L^2[a,b],$$

有下列关系式:

$$\int_a^b|f|\,|f+g|\,dx\leqslant\|f\|_{L^2}\left(\int_a^b|f+g|^2\,dx\right)^{1/2},$$

$$\int_a^b |g|\,|f+g|\,dx \leqslant \|g\|_{L^2}\left(\int_a^b |f+g|^2\,dx\right)^{1/2},$$

两式相加即得 $\|f+g\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}$. 所以

$$\begin{aligned}
\rho(x,z) &= \left(\int_a^b |x(t)-z(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_a^b |x(t)-y(t)+y(t)-z(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \\
&=||(x(t)-y(t))+(y(t)-z(t))||_{L^2} \\
&\leqslant||(x(t)-y(t))||_{L^2}+||(y(t)-z(t))||_{L^2} \\
&=\rho(x,y)+\rho(y,z).
\end{aligned}$$

即满足度量空间的条件. 证毕.

在度量空间上作分析运算时, 会涉及无穷序列的极限问题, 空间的完备性是极限运算能否封闭的条件.

定义 1.1.2 度量空间 (X,ρ) 上的点列 $\{x_n\}$ 称为收敛到 x_0, 是指当 $n\to\infty$ 时, 有 $\rho(x_n,x_0)\to 0$, 简记为 $x_n\to x_0$.

定义 1.1.3 度量空间 (X,ρ) 上的点列 $\{x_n\}$ 称为基本列, 是指当 $n,m\to\infty$ 时 $\rho(x_n,x_m)\to 0$. 即 $\forall\varepsilon$, $\exists N(\varepsilon)$, 使得当 $m,n\geqslant N(\varepsilon)$ 时, 则有 $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$.

若空间中的每个基本列都是收敛列, 那么称该空间是完备的.

由 Cauchy 收敛原理, 欧氏空间 (R^n,ρ) 是完备的.

例 1.1.4 度量空间 $(C[a,b],\rho)$ 是完备的.

设 $\{x_n\}$ 是基本列, 即 $\forall\varepsilon$, $\exists N(\varepsilon)$, 当 $m,n\geqslant N(\varepsilon)$ 时,$\max\limits_t|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon$, 因此 $\forall t$, $\forall m,n\geqslant N(\varepsilon), |x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon$.

所以 $\forall t$, $\{x_n(t)\}$ 是基本列, 由 Cauchy 收敛原理, $(C[a,b],\rho)$ 是完备的.

空间 $C[a,b]$ 按 $\rho(x,y)=\left(\displaystyle\int_a^b |x(t)-y(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$ 定义的距离不是完备的.

1.1.2 压缩映射原理

压缩映射原理在许多问题的解的存在唯一性的研究中有非常重要的作用, 特别是在微分与积分方程的研究中的应用.

定理 1.1.1 设 (X,ρ) 是完备的度量空间. T 是 $X\to X$ 的映射, 并且 $\forall x,y\in X$, 下式成立

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant\theta\rho(x,y), \tag{1.1.1}$$

其中 $0 \leqslant \theta < 1$, 那么 T 在 X 中存在唯一的不动点, 即存在 $\tilde{x}$, 满足

$$T\,\tilde{x} = \tilde{x}.$$

证　可以利用迭代的方法证明.

$\forall x_0 \in X$, 令

$$\begin{aligned} x_1 &= Tx_0, \\ x_2 &= Tx_1, \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= Tx_n. \end{aligned}$$

下面证明 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本列.

按条件 (1.1.1),

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant \theta\rho(x_{n-1}, x_n) \leqslant \cdots \leqslant \theta^n \rho(x_0, Tx_0),$$

故

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+p}) &\leqslant \left(\theta^n + \theta^{n+1} + \cdots + \theta^{n+p-1}\right)\rho(x_0, Tx_0) \\ &= \frac{\theta^n(1-\theta^p)}{1-\theta}\rho(x_0, Tx_0) \\ &\leqslant \frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_0, Tx_0). \end{aligned}$$

令 $n \to \infty, \rho(x_n, x_{n+p}) \to 0$, 可知 $\{x_n\}$ 为基本列.

又由 X 的完备性, $\exists \tilde{x}, T\,\tilde{x} = \tilde{x}$.

再证明不动点的唯一性. 设另有 $\tilde{y}$, 使 $T\,\tilde{y} = \tilde{y}$, 则

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho(T\,\tilde{x}, T\,\tilde{y}) \leqslant \theta\rho(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

由于 $0 \leqslant \theta < 1$, 故 $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$, 即 $\tilde{x} = \tilde{y}$. 证毕.

例 1.1.5　微分方程解的存在唯一性.

考察方程与初条件:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y\big|_{x_0} = y_0, \tag{1.1.2}$$

其中 $y = y(x)$, $f(x, y)$ 满足 Lipschitz 条件:

$$|f(x, y) - f(x, y')| \leqslant k\,|y - y'|, \quad \text{其中} k > 0 \text{ 为常数}.$$

则该方程存在唯一解.

证 事实上, 取 δ, 使 $k\delta<1$, 定义 $C\left[x_0-\delta, x_0+\delta\right]$ 上的映射:

$$Ty(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) dt, \quad x \in\left[x_0-\delta, x_0+\delta\right],$$

利用条件得到

$$\begin{aligned}
\rho\left(T y_1, T y_2\right)= & \max_{\left|x-x_0\right|<\delta} \int_{x_1}^{x}\left[f\left(t, y_1(t)\right)-f\left(t, y_2(t)\right)\right] dt \\
\leqslant & \max_{\left|x-x_0\right|<\delta} \int_{x_1}^{x} k\left|y_1(t)-y_2(t)\right| dt \\
\leqslant & k \delta \rho\left(y_1, y_2\right).
\end{aligned}$$

由压缩映射原理可得, 存在唯一连续函数 $y(x)$, 使得 $Ty=y$, 即

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) dt,$$

即 (1.1.2) 存在唯一的解.

例 1.1.6 积分方程解的存在唯一性.

设有积分方程:

$$x(t)=f(t)+\lambda \int_{a}^{b} k(t, s) x(s) ds, \tag{1.1.3}$$

其中 f 为一给定平方可积函数, 即 $f(t) \in L^2[a, b]$, λ 为参数, $k(t, s)$ 是定义在 $[a, b] \times [a, b]$ 上的平方可积函数, 满足

$$\int_{a}^{b} \int_{a}^{b}|k(t, s)|^2 dtds<\infty.$$

那么, 当 λ 充分小时, 方程 (1.1.3) 存在唯一解 $x \in L^2[a, b]$.

证 令 $Tx(t)=f(t)+\lambda \int_{a}^{b} k(t, s) x(s) ds$, 利用 Hölder 不等式, 则

$$\begin{aligned}
\rho(Tx, Ty)= & |\lambda|\left(\int_{a}^{b}\left|\int_{a}^{b} k(t, s)[x(s)-y(s)] ds\right|^2 dt\right)^{1/2} \\
\leqslant & |\lambda|\left(\int_{a}^{b} \int_{a}^{b}|k(t, s)|^2 dtds\right)^{1/2}\left(\int_{a}^{b}|x(s)-y(s)|^2 ds\right)^{1/2} \\
= & |\lambda|\left(\int_{a}^{b} \int_{a}^{b}|k(t, s)|^2 dsdt\right)^{1/2} \rho(x, y) \\
\equiv & \theta \rho(x, y).
\end{aligned}$$

当 λ 充分小时, 可使 $0 \leqslant \theta<1$, 故 T 为压缩映射. 得证.

习题 1.1

1. 设 (X,ρ) 是距离空间, 令 $\tilde{\rho}(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$, 证明 $\tilde{\rho}$ 也是 (X,ρ) 上的一个距离.

2. 设 $C^k[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上具有到 k 阶连续导数的全体函数组成的集合. 对 $x,y\in C^k[a,b]$, 令

$$\rho(x,y)=\sum_{i=0}^{k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)\right|,$$

其中 $x^{(i)},y^{(i)}$ 分别为其 i 阶导数, 规定 $x^0=x$, $y^0=y$, 证明 $C^k[a,b]$ 是度量空间.

3. 设 F 是 n 维欧氏空间的有界闭集, T 是 F 到自身的映射, 并适合如下条件: 对任何 $x,y\in F$, 都有

$$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y).$$

求证: 映射在 F 中有唯一的不动点.

4. 设 $K(t,s)$ 是定义在三角形区域 $a\leqslant t\leqslant b$, $a\leqslant s\leqslant t$ 上的连续函数, 则 Volterra 型积分方程

$$x(t)=\lambda\int_a^t K(t,s)x(s)ds+f(t),$$

对任何 $f\in C[a,b]$ 及任何常数 λ, 存在唯一解 $x_0\in C[a,b]$.

1.2 Hilbert 空间

度量空间上只有距离的概念, 为了研究与角度有关的性质, 需要定义新的结构, 线性空间上的内积就是这样的结构. 有了内积, 就可以定义角度, 这样就可以定义正交的概念, 正交性无论在数学还是物理等学科中都有广泛应用.

1.2.1 内积

欧氏空间中两个向量的夹角是通过内积定义的, 在无限维空间中也可以引入相应的概念.

定义 1.2.1(内积空间)　设 X 是数域 K 上的线性空间, 若 $\forall x,y\in X$, 对应 K 中的一个数, 记为 (x,y), 若满足

(i) $(ax,y)=a(x,y)$, $a\in K$,

(ii) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$,

(iii) $(x,y)=\overline{(y,x)}$,

(iv) $(x,x)\geqslant 0$, 且 $(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$,

那么 X 称为内积空间, $(\ ,\ )$ 称为内积.

注: 条件 (i) 称为关于第 1 变元的齐次性, (ii) 称为线性, (iii) 称为共轭性, (iv) 称为非负性.

由 (i), (iii) 可知内积关于第二变元为共轭线性.

例 1.2.1 R^n, C^n 是内积空间, 其内积分别定义为

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x,y\in R^n,$$
$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i, \quad x,y\in C^n.$$

容易证明这样定义的内积满足 (i)~(iv).

例 1.2.2 设 Ω 为 R^n 中有界区域, $L^2(\Omega)$ 是区域 Ω 上的平方可积函数空间, 其内积定义为

$$(u,v)=\int_{\Omega} u(x)\bar{v}(x)dx, \quad \forall u,v\in L^2(\Omega).$$

则 $L^2(\Omega)$ 是内积空间.

证 (i)(ii) 由积分的线性可得, (iii)(iv) 是显然的.

例 1.2.3 l^2 是内积空间, 其中 $l^2=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots), \sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty\right\}$, 其内积定义为

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\bar{y}_i, \quad \forall x,y\in l^2.$$

它是离散形式的平方可积函数空间.

利用内积可以诱导范数, 它的基础是 Schwartz 不等式, Schwartz 不等式在分析数学中是一个非常基本的工具, 在抽象的内积空间中同样成立.

设 X 是内积空间, $\forall x,y\in X$, 都有

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)\cdot(y,y), \tag{1.2.1}$$

该不等式称为 Schwartz 不等式.

事实上, $\forall\lambda\in K$, 设 $y\neq 0$, 有 $(x+\lambda y, x+\lambda y)\geqslant 0$, 即

$$(x,x)+\bar{\lambda}(x,y)+\lambda(y,x)+|\lambda|^2(y,y)\geqslant 0.$$

令 $\lambda=-\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$, 则有

$$(x,x)-2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}+\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)^2}(y,y)\geqslant 0,$$

故 $(x,x)(y,y)\geqslant|(x,y)|^2$. 证毕.

定义 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$, 利用 Schwartz 不等式 (1.2.1) 可知

$$\|x+y\|^2=|(x+y,x+y)|$$

$$\leqslant |(x+y,x)|+|(x+y,y)|$$
$$\leqslant \|x+y\|\cdot\|x\|+\|x+y\|\cdot\|y\|,$$

所以 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

因此, 在内积空间中可定义范数: $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$, 从而可以定义距离, 成为赋范线性空间.

1.2.2 Hilbert 空间

完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

例 1.2.4　复空间 C^n, 在 C^n 内定义内积

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_k\bar{y}_k,\quad \text{其中 } x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)\in C^n.$$

可以验证, 它满足内积的定义, 并且由复空间的完备性, 可知它是一个 Hilbert 空间.

Hilbert 空间可以定义正交的概念, 它是一种特殊的角度, 这使得它有更丰富的结构, 它为研究算子的谱理论提供了合适的框架, 这里只讨论一些基本的性质.

(1) Hilbert 空间的正交性

设 X 为 Hilbert 空间, $\forall x,y\in X$, 若 $(x,y)=0$, 则称 x,y 正交.

若 X 中的元素 $x_1,\cdots,x_n$ 相互正交, 令 $x=x_1+x_2+\cdots+x_n$, 则

$$\|x\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_n\|^2.$$

定理 1.2.1　设 M 是 Hilbert 空间 X 的闭子空间, 则对 X 中的任一元素 x, 有下列唯一的正交分解:

$$x=y+z,\quad y\in M, z\in M^{\perp}.$$

其中 $M^{\perp}=\{x|(x,y)=0,\forall y\in M\}$, 即 M 的垂直补空间. y 称为 x 在 M 中的正交投影.

证　先证存在性.

设 y 是 x 在 M 中的最佳逼近, 即

$$\|x-y\|=\inf_{z\in M}\|x-z\|.$$

记 $\alpha=\|x-y\|$, 则 $\forall\lambda$ 以及 $n\in M$, 有 $y+\lambda n\in M$, 故

$$\alpha^2\leqslant\|x-(y+\lambda n)\|^2=(x-y-\lambda n,x-y-\lambda n)$$
$$=\|x-y\|^2-\bar{\lambda}(x-y,n)-\lambda(n,x-y)+|\lambda|^2\|n\|^2.$$

取 $\lambda = \dfrac{(x-y,n)}{\|n\|^2}$, 则得

$$\alpha^2 \leqslant \alpha^2 - \frac{|(x-y,n)|^2}{\|n\|^2},$$

所以, $(x-y,n)=0$, 故 $(x-y)\perp M$, 令 $z=x-y$, 则有

$$x = y + z, \quad \text{其中 } y \in M, z \in M^{\perp}.$$

存在性得证.

再证唯一性.

设另有分解 $x = y' + z', y' \in M, z' \in M^{\perp}$, 则

$$\begin{gathered} y + z = y' + z', \quad y - y' = z - z', \\ y - y' \in M, \quad z - z' \in M^{\perp}, \\ (y-y', y-y') = (y-y', z-z') = 0, \end{gathered}$$

所以 $y = y'$, 从而 $z = z'$, 即 x 的分解是唯一的. 证毕.

(2) Hilbert 空间的正交系

定义 1.2.2 设 $\{e_n\}, n=1,2,\cdots$ 是 X 中的元列, 若满足

$$(e_m, e_n) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

则称 $\{e_n\}$ 是 X 中的规范正交系.

例 1.2.5 l^2 中的元列 $\{e_n\}$, $e_n = (0,\cdots,0,1,0,\cdots), n=1,\cdots$ 是一个规范正交系. 容易验证 $\{e_n\}$ 满足上述正交性条件.

例 1.2.6 $L^2[0,2\pi]$ 内的函数族 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\}, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 是 $L^2[0,2\pi]$ 中的一个规范正交系. 且 $u = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n$, 其中 $c_n = (u, e_n) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(t)e^{-int}dt$, $\forall u \in X$ 称为 u 的 Fourier 系数.

(3) Parseval 公式

先证一个基本的不等式: 设 $\{e_n\}$ 是内积空间 X 中的一个规范正交系, $\forall x \in X$, 不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x,e_n)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

成立, 它称为 Bessel 不等式.

证 令 $c_n = (x, e_n)$, 利用正交性,

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \left\| x-\sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 &= \left(x-\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, x-\sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right) \\
&= \|x\|^2-\sum_{k=1}^{n} c_k(e_k,x)-\sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k(x,e_k)+\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \\
&= \|x\|^2-\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2,
\end{aligned}
$$

得 $\sum\limits_{k=1}^{n}|c_k|^2 \leqslant \|x\|^2$, 令 $n\to\infty$ 得证.

定理 1.2.2(Parseval 公式) 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间的一个规范正交系, 数列 $\{c_n\}\in l^2$, 那么存在 X 中的唯一元素 x, 使 $\{c_n\}$ 是关于 $\{e_n\}$ 的 Fourier 系数, 即 $c_n=(x,e_n)$, 且

$$
\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2, \tag{1.2.2}
$$

它称为 Parseval 公式.

证 令 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$, 不妨设 $m>n$, 则

$$
\|x_m-x_n\|^2=\left\|\sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k\right\|^2=\sum_{k=n+1}^{m}|c_k|^2.
$$

由于当 $m,n\to\infty$ 时, $\sum\limits_{k=n+1}^{m}|c_k|^2\to 0$, 故

$$
\|x_m-x_n\|\to 0.
$$

由完备性, 存在 $x\in X$, 使 $\{x_n\}\to x$, 又由内积的连续性: $(x_n,e_k)\to(x,e_k)$. 利用正交性, $\|x_n\|^2=\sum\limits_{k=1}^{n}|c_k|^2$, 两边取极限, 考虑到 $\|x_n\|\to\|x\|$, 故

$$
\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2.
$$

证毕.

Parseval 公式成立的等价条件是如下的定理:

定理 1.2.3(完备性) 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 X 中的一个规范正交系, 则下列性质等价:

(i) $S=\{e_n, n\in A\}$ 是完备的, 即在 X 中不存在非零元与 S 正交, 亦即 $S^{\perp}=0$.