十二五

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数习题集

XIANXING DAISHU XITIJI

主编 詹小旦 熊显萍 刘 琛

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数习题集

主　编　詹小旦　　熊显萍　刘　琛
副主编　努恩吉雅　刘国壁　于　雪
　　　　王洪涛　　魏　娟

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS
镇　江

内 容 提 要

线性代数习题集与《线性代数》教材配套使用。本书共分6章，包括行列式、矩阵、向量组与向量空间、线性方程组、相似矩阵和二次型、线性空间与线性变换。每一章都包括知识要点、典型习题精解、阶段练习题和测试题4个模块。

本书可供普通高等院校工科类、理科类（非数学专业）及经济管理类专业的学生进行线性代数习题的练习，也可供学生考研参考。

图书在版编目（C I P）数据

线性代数习题集 / 詹小旦，熊显萍，刘琛主编. -- 镇江 ：江苏大学出版社，2014.7
ISBN 978-7-81130-729-0

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①詹… ②熊… ③刘… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－习题集 Ⅳ. ①O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第116799号

线性代数习题集
Xianxing Daishu Xitiji

主　　编 / 詹小旦　熊显萍　刘　琛
责任编辑 / 张小琴
出版发行 / 江苏大学出版社
地　　址 / 江苏省镇江市梦溪园巷30号（邮编：212003）
电　　话 / 0511-84446464（传真）
网　　址 / http://press.ujs.edu.cn
排　　版 / 北京金企鹅文化发展中心
印　　刷 / 北京忠信印刷有限责任公司
经　　销 / 江苏省新华书店
开　　本 / 787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张 / 10.5
字　　数 / 243千字
版　　次 / 2014年7月第1版　2014年7月第1次印刷
书　　号 / ISBN 978-7-81130-729-0
定　　价 / 19.50元

编者的话

线性代数是大学数学的一门重要基础课程，也是自然科学和工程技术各领域中广泛应用的数学工具。随着现代科技的飞速发展和计算机的广泛应用，线性代数在理论和应用上的重要性更加突出，这对线性代数的教学内容也提出了更高的要求。

通过多年的教学实践，编者深刻体会到，学好线性代数的关键是理清概念，掌握解题方法，而达到这一目的的最有效措施就是大量演练习题。为此，我们编写了这本线性代数习题集。

本书每一章都分为 4 个模块：知识要点、典型习题精解、阶段练习题和测试题。

知识要点主要是对每章所学的重要知识点进行总结，以帮助学生复习。

典型习题精解是从配套教材每章课后自测题中摘取部分典型习题进行精解，以帮助学生学习、了解解题思路。

阶段练习题是根据每章的主要内容进行分阶段练习，让学生能够在每一节课后能对所学内容进行巩固练习。

测试题是针对整章内容的测试，可让学生学完一章后进行自我测试。

本书由詹小旦、熊显萍、刘琛任主编，由努恩吉雅、刘国壁、于雪、王洪涛、魏娟任副主编。

本书在编写过程中参考了大量相关的教材及其他相关资料，在此向有关作者表示衷心的感谢。由于时间仓促，加之编写人员水平有限，书中不足和考虑不周之处在所难免，期望得到广大专家、同行和读者的批评指正，使其在教学实践中不断完善。

另外，本书配有丰富的教学资源包，读者可登录北京金企鹅文化发展中心的网站（www.bjjqe.com）下载。

编　者

2014 年 6 月

目　录

第 1 章 行列式

知识要点

1. 排列与对换

(1)由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的 n 元有序数组称为一个 n 级**排列**.

(2)在一个 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,如果较大的数 p_t 排在较小的数 p_s 的前面($p_s<p_t$),则称 p_t 与 p_s 构成一个逆序.一个 n 级排列中逆序的总数称为**逆序数**,记作$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

(3)如果排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$是奇数,则称此排列为**奇排列**;如果其逆序数是偶数,则称此排列为**偶排列**.

(4)在一个 n 级排列 $p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n$ 中,如果将其中某两个数 p_s 与 p_t 对调位置,其余各数位置不变,则得到另一个新的 n 级排列 $p_1\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n$.这样的变换称为一个**对换**,记作对换$(p_s,p_t)$.

(5)任意一个排列经过一次对换后,其奇偶性改变.

2. 行列式的定义

由排成 n 行 n 列的 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n **阶行列式**,它是 $n!$ 项的代数和,其每一项都是取自不同行和不同列的 n 个元素的乘积,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

二阶和三阶行列式的计算适用对角线法则.

3. 行列式的性质

(1)行列式与它的转置行列式相等.

(2)交换行列式中任意两行(列),行列式的符号改变.

(3)把行列式的某一行(列)的所有元素同乘以数 k,等于以数 k 乘以该行列式.

(4)如果行列式中有两行(列)的元素对应成比例,则该行列式的值为零.

(5)如果行列式某一行(列)的元素为两组数的和,则该行列式可以分为两个行列式之和,这两个行列式除这一行(列)以外的其他元素与原行列式的对应元素一样.

(6)把行列式某一行(列)的所有元素乘以数 k 加到另一行(列)的对应元素上去,所得行列式的值不变.

4. 行列式按行(列)展开

(1)在 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中,划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列,余下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排列构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij}. 在 M_{ij} 前面加上符号 $(-1)^{i+j}$ 后,得到 $(-1)^{i+j}M_{ij}$,它称为 a_{ij} 的**代数余子式**,记作 A_{ij},即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

(2)n 阶行列式 D 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

(3)设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=d$,$A_{ij}$ 是元素 a_{ij} 的代数余子式,则有

① $$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} d, k=i, \\ 0, k\neq i \end{cases} \quad (i,k=1,2,\cdots,n);$$

② $$a_{1k}A_{1i}+a_{2k}A_{2i}+\cdots+a_{nk}A_{ni}=\begin{cases} d, k=i, \\ 0, k\neq i \end{cases} \quad (i,k=1,2,\cdots,n).$$

(4)**拉普拉斯定理** 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$, $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$,

$D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$,则 $D=D_1D_2$.

5. 克莱姆法则

设含有 n 个未知量和 n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时，上述方程组称为齐次线性方程组；否则称为非齐次线性方程组.

(1)**克莱姆法则** 若上述 n 元线性方程组的系数行列式 $D\neq0$，那么此方程组有唯一解，且

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中，$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式 D 的第 j 列元素用方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 替换而得到的 n 阶行列式.

(2)若齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq0$，则方程组有唯一零解；若方程组有非零解，则系数行列式 D 必为零.

(3)齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是 $D=0$.

典型习题精解

A 类

2. $1274n56m9$ 成偶排列，确定 n 和 m 的值.

解 在排列 $1274n56m9$ 中缺数码 3 和 8，于是

令 $n=3,m=8$，得

$$\tau(127435689)=4+1=5;$$

令 $n=8,m=3$，得

$$\tau(127485639)=4+1+3+1+1=10.$$

所以，当 $n=8,m=3$ 时成偶排列.

注：对于含参数的排列，要对参数进行讨论来确定前后数的大小关系.

6. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix}2&-1\\5&3\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}x&y\\-1&x^2\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}0&x&0\\y&0&z\\0&k&0\end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix}1&a&a\\a&2&a\\a&a&3\end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix}2&-1\\5&3\end{vmatrix}=2\times3-5\times(-1)=11.$

(2) $\begin{vmatrix}x&y\\-1&x^2\end{vmatrix}=x^3+y.$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & z \\ 0 & k & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} y \begin{vmatrix} x & 0 \\ k & 0 \end{vmatrix} = -y \cdot 0 = 0.$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - ar_1]{r_2 - ar_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 2-a^2 & a-a^2 \\ 0 & a-a^2 & 3-a^2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2-a^2 & a-a^2 \\ a-a^2 & 3-a^2 \end{vmatrix}$

$= (2-a^2)(3-a^2) - (a-a^2)^2 = 2a^3 - 6a^2 + 6.$

注:第(3)、(4)两题也用对角线法则来解,读者可以尝试一下.

7. 证明下列等式.

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$;

(2) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a_1+ka_2+la_3 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2+lb_3 & b_2+mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2+lc_3 & c_2+mc_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

证 (1)左式 $\xlongequal[c_2 - c_3]{c_1 - c_3} \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2(a-b) & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 - 2c_2} \begin{vmatrix} (a-b)^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 0 & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a-b)^3 =$ 右式.

(2)将左式按第 1 列拆开得

$$左式 = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = D_1 + D_2.$$

其中,

$$D_1 = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3 - c_1} \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ b_1 & c_1+a_1 & a_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2 - c_3} \begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3-c_2}\begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2\leftrightarrow c_3]{c_1\leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

于是

$$左式=D_1+D_2=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=右式.$$

(3)$左式\xlongequal[c_1-lc_3]{c_2-mc_3}\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & a_2 & a_3 \\ b_1+kb_2 & b_2 & b_3 \\ c_1+kc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\xlongequal{c_1-kc_2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=右式.$

10. 用克莱姆法则解下列方程组.

(1)$\begin{cases} 2x+5y=1, \\ 3x+7y=2; \end{cases}$　　(2)$\begin{cases} x_2+2x_3=1, \\ x_1+x_2+4x_3=1, \\ 2x_1-x_2=2. \end{cases}$

解 (1)$D=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=14-15=-1;$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=7-10=-3; \qquad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4-3=1,$$

由克莱姆法则得

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-3}{-1}=3, \quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{-1}=-1.$$

(2)$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_1}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -8 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_3+3r_2}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=2;$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-1\times(-3)\times 2=6;$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_1}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}=8;$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_1}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-3,$$

由克莱姆法则得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{6}{2}=3, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{8}{2}=4, \quad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{3}{2}.$$

B 类

5. 设含参数 λ 的方程组 $\begin{cases}\lambda x+\ \ y+z=0,\\ x+\lambda y+z=0,\\ x+\ \ y+z=0\end{cases}$ 只有零解，则 λ 应满足________.

解 若要使方程组只有零解，则 $D\neq 0$，即

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2}-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\neq 0,$$

解得 $\lambda\neq 1$.

7. 证明 $D_n=\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1\end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

证 用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，$D_1=x+a_1$；当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}x & -1\\ a_2 & x+a_1\end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$，结论成立.

假设 $D_{n-1}=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1}$ 成立. 现在来看 D_n，将 D_n 按第一列展开，得

$$D_n=xD_{n-1}+a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}\text{，即 }D_n=xD_{n-1}+a_n.$$

将归纳假设 D_{n-1} 代入得

$$\begin{aligned}D_n&=x(x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1})+a_n\\&=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n.\end{aligned}$$

结论成立.

阶段练习题（一）

一、选择题

1. 在下列构成 6 阶行列式的展开式的各项中，取“+”的是(　　).

A. $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$　　B. $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$

C. $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{64}a_{35}$　　D. $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{25}a_{66}$

2. 设 $a_{62}a_{k5}a_{33}a_{l4}a_{46}a_{21}$ 是 6 阶行列式 $|a_{ij}|$ 的一项，则(　　).

A. $k=5,l=1$，取正号　　B. $k=5,l=1$，取负号

C. $k=1, l=5$，取负号　　　　D. $k=1, l=5$，取正号

3. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=(\quad)$.

A. $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　　　B. $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

C. $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4+b_3b_4)$　　　　D. $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

二、填空题

1. 当 $i=$______，$j=$______时，排列 $31i5j4987$ 为奇排列.

2. 五阶行列式 $|a_{ij}|$ 的项 $a_{23}a_{42}a_{55}a_{14}a_{31}$ 的符号是______.

3. 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix}=0$，则 $x=$______.

4. 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ b & b \end{vmatrix}=$______.

三、解答题

1. 求行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

2. 求下列排列的逆序数.

(1)217986354；　　　　(2)134782695；　　　　(3)987654321.

3. 选择 i 和 j，使

(1)$1245i6j97$ 成为奇排列；　　　　(2)$1i25j4897$ 成为偶排列.

4. 选择 i 和 j，使 $a_{1i}a_{32}a_{4j}a_{25}a_{53}$ 成为五阶行列式中一个带负号的项.

5. 求 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 的系数.

6. 试用行列式定义证明 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$.

7. 利用定义计算下列行列式，

(1) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$；

(2) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$.

阶段练习题（二）

一、选择题

1. 如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$，则 $D_1=$(　　).

A. $2D$　　B. $-2D$　　C. $8D$　　D. $-8D$

2. 如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=d$，则行列式 $\begin{vmatrix} -3a_{31} & -3a_{32} & -3a_{33} \\ -2a_{21} & -2a_{22} & -2a_{23} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \end{vmatrix}=$(　　).

A. $-6d$　　B. $6d$　　C. $4d$　　D. $-4d$

3. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^{+}1 \end{vmatrix}=$(　　).

A. $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

B. $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & ab & ac \\ 0 & b^2+1 & bc \\ 0 & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$

D. $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & ab & ac \\ ab & 1 & bc \\ ac & bc & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ($　　$)$.

A. 2　　　B. -3　　　C. -4　　　D. 4

二、填空题

1. 若 $D_n = |a_{ij}| = a$，则 $D_n = |-a_{ij}| =$ ______.

2. 若 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 8$，则 $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -2b_1 & -2b_2 & -2b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} =$ ______.

3. $\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ -6a_{31} & -6a_{32} & -6a_{33} \end{vmatrix} =$ ______ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$ ______.

5. $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & a \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} =$ ______.

三、解答题

1. 计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;