文都教育®

2015

考研数学

接力题典1800

通关 高分 夺冠必备

Mathematics

组编◎文都考研命题研究中心

主编◎汤家凤

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- 通关题——巩固基础，深入理解
- 高分题——强化能力，灵活运用
- 夺冠题——综合提高，触及顶峰
- 经典题型与独特创新的完美结合

Mathematics

中国原子能出版社

文都教育®

2015
考研数学

接力题典1800

通关 高分 夺冠必备

组编◎文都考研命题研究中心
主编◎汤家凤

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学接力题典 1800 / 文都考研命题研究中心组编. ——北京 ：中国原子能出版社，2014.3

ISBN 978-7-5022-6180-1

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①文… Ⅲ. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 039612 号

考研数学接力题典 1800

出版发行	中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100048)
责任编辑	侯茸方
特约编辑	陈文峰
印　　刷	北京建泰印刷有限公司
经　　销	全国新华书店
开　　本	787mm × 1092mm 1/16
印　　张	26.75　　**字　数** 350 千字
版　　次	2014 年 3 月第 1 版 2014 年 3 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5022-6180-1　　**定　价** 46.00 元

网址:http://www.aep.com.cn　　**E-mail:atomep123@126.com**

发行电话:010-68452845

前　言

硕士研究生入学统考数学试卷分为三种，分别为数学一、数学二、数学三，各卷种试卷题型结构均为选择题、填空题、解答题（包括计算题、证明题、应用题等），其中客观题（选择题及填空题）占56分左右，主观题（解答题）占94分左右。由于考研数学复习内容广泛，基本概念、基本公式、基本方法多，同时强调计算能力、逻辑推理能力、抽象思维能力、空间想象能力及综合运用所学知识解决实际问题的能力，所以对于广大考生而言，要在复习过程中做到牢固掌握基础知识并且融会贯通就显得很棘手，拥有一本能够通过分层递进习题训练实现基础知识的掌握和解题的方法技巧的同步提高，帮助同学们最终取得高分的复习参考书成为广大学子的迫切要求。

本书是编者在长期进行考研数学授课和对最新数学考试大纲深入研究的基础上，根据考试命题的重点和考生的弱点，从广大考生的实际要求出发精心编写而成。全书分为高等数学、线性代数、概率统计三大部分（其中数学二对概率统计不作要求），每一部分的各个专题的题目都将知识要点系统融入问题之中，帮助考生在做题的过程中进一步加深对知识点、基本原理和基本方法技巧的理解和掌握。

本书的亮点在于：

1. 每一部分的题型设置严格依据最新考纲的规定，在题目选取方面，“通关题”融合了基本概念、原理、方法的考查，知识点覆盖面广，题型丰富新颖。考生通过这一部分习题的系统训练，能够对大纲规定的考点形成深入透彻的认识，掌握解题常用的方法和要领。

2. 每一部分挑选大量要求同学们运用综合运算能力和解决实际问题能力作答的问题，这与考纲要求考生具备一定的综合运算知识的能力、空间想象能力、计算能力、运用所学知识解决实际问题以及一定的逻辑推理的能力相符合。考生通过“高分题”部分的练习，可以显著提高计算能力、推理能力、空间想象能力和逻辑推理能力，这对数学考试取得高分起着至关重要的作用。

3. 每一部分设置一定量的难度较大、综合性较高的题目，这一部分的“夺冠题”对数学基础要求更高，有些题目具有一定的构造性，在计算复杂度和解题方法、技巧方面对同学们提出较高难度的挑战，比较适合复习最后阶段练习使用。

为方便读者使用，本书中仅对数学一考生要求的部分标有“*”记号；仅对数学二、数学三考生要求的部分相应标有“○”“△”记号；公共部分无标记（依据最新考试大纲）。

数学的复习是一个循序渐进的过程，同学们复习时一定要先把基本概念、基本公式、基本原理掌握好，然后做一些基础练习（在每年的试题中基本题型占有相当大的比例，切忌一开始就好高骛远），掌握好基础后再通过综合题型的训练进一步掌握各种方法和技巧，从而大幅度提高解题能力和应试水平，这也是本书的出发点和目的所在。

在本书的编写过程中，文都考研命题研究中心的全体同志做了大量有益的工作，在此表示衷心的感谢。

由于本书的编写过程时间仓促，错误和疏漏之处难免，欢迎广大读者和同行不吝指教。

编 者

2014年3月

目　录

第一篇 高等数学

一 函数、极限、连续

通关题

1. 设 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$ ________，定义域为________.

2. 设 $a>0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x^2}}=1$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

3. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}\sim ax^2$，则 $a=$ ________.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=$ ________.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+\ln(1+x^3)}{\tan x^3}$.

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\sin x-\cos x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x\arctan 2x}}=$ ________.

8. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin 2x}=$ ________.

9. $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\tan\dfrac{\pi}{4}x=$ ________.

10. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}=$ ________.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=$ ________.

12. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{x^2}{2}-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\sin\pi x}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=$ ________.

16. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x-\sin x)^{\frac{1}{x^2\ln(1+x)}}=$ ______.

17. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (t^2+1)e^{t^2-x^2}dt$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\cos x\,dx}{\ln(1+x^2)}=$ ______.

19. 设 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$ ______.

20. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}+x)=$ ______.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-\ln(e^2+x)}{\arctan x}=$ ______.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=$ ______.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\sqrt{4n^2+1}\pi=$ ______.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\,dt-\ln\sqrt{1+x^2}}{x^4}=$ ______.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$ ______.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right)=$ ______.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)=$ ______.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{x}{e^{x^2}-1}\right]=$ ______.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2-x\ln(1+x)}=$ ______.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+16}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4n^2}}\right)=$ ______.

31. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\dfrac{1}{n}\right)f\left(\dfrac{2}{n}\right)\cdots f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)f(1)}=$ ______.

32. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$ ______，$b=$ ______.

33. 设当 $x\to 0$ 时，$k\sin^2 x\sim\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}$，则 $k=$ ______.

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin(x-t)dt}{e^{x^2}-\cos x}=$ ______.

35. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin 2x^2+e^{ax^2}-1}{\ln(1+2x^2)}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ______.

36. 设 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{2}{x\arctan x}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ______.

37. 设 $f(x)$ 连续可导，$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$，若 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $A=$ ________.

38. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于 ( )

(A) 0 (B) 1

(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ (D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

39. 函数 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}, -\infty<x<+\infty$ 是 ( )

(A) 有界函数 (B) 单调函数

(C) 周期函数 (D) 偶函数

40. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中，哪个是比其他三个更高阶的无穷小 ( )

(A) x^2 (B) $1-\cos x$ (C) $\sqrt{1-x^2}-1$ (D) $x-\tan x$

41. 当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小中，阶数最高的是 ( )

(A) $\ln(1+x^2)-x^2$ (B) $\sqrt{1+x^2}+\cos x-2$

(C) $\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$ (D) $e^{x^2}-1-x^2$

42. 设当 $x\to 0$ 时，$(x-\sin x)\ln(1+x)$ 是比 $e^{x^n}-1$ 高阶的无穷小，而 $e^{x^n}-1$ 是比 $\dfrac{1}{x}\int_0^x(1-\cos^2 t)\mathrm{d}t$ 高阶的无穷小，则 n 为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

43. $f(x)=2^x+3^x-2$，当 $x\to 0$ 时 ( )

(A) $f(x)\sim x$ (B) $f(x)$ 是 x 的同阶但非等价的无穷小

(C) $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小 (D) $f(x)$ 是 x 的低阶无穷小

44. 设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t$，$g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 ( )

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小 (C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价的无穷小

45. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ ( )

(A) 等于 1 (B) 为 ∞

(C) 不存在但不是 ∞ (D) 等于 0

46. 当 $x\to 1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限为 ( )

(A) 2 (B) 0 (C) ∞ (D) 不存在但不是 ∞

47. 设 $f(x)$ 连续且 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$ 为 ( )

(A) a^2 (B) $a^2f(a)$ (C) 0 (D) 不存在

48. 设 $f(x)$ 一阶连续可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\arcsin x}}=$ ( )

(A) e^{-1} (B) e (C) e^2 (D) e^3

49. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ( )

(A) 连续点 (B) 第一类间断点

(C) 第二类间断点 (D) 不能判断连续性的点

50. 设 $f(x)$ 是不恒为零的奇函数,且 $f'(0)$ 存在,则 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ ( )

(A) 在 $x=0$ 处无极限 (B) $x=0$ 为其可去间断点

(C) $x=0$ 为其跳跃间断点 (D) $x=0$ 为其第二类间断点

51. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,则 $f(x)$ ( )

(A) 无间断点 (B) 有间断点 $x=1$

(C) 有间断点 $x=-1$ (D) 有间断点 $x=0$

52. 设 $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{ax+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)=b$,其中 a,b 为常数,则 ( )

(A) $a=1,b=1$ (B) $a=1,b=-1$

(C) $a=-1,b=1$ (D) $a=-1,b=-1$

53. $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续,则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的 ( )

(A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点

(C) 连续点 (D) 第二类间断点

求下列极限:

54. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\ (x\neq0)$.

55. 设 $a_n=\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)$.

57. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3+n^2+n+1}+\dfrac{2^2}{n^3+n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2+n+n}\right)$.

58. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n^2}}\right)$.

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.

60. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$.

61. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

62. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$.

63. 求 $\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x\ln(1+2x)}$.

65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\cos 2x}{x(e^x-1)}$.

66. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-A}{x-a}=K$,求$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{f(x)}-e^A}{x^2-a^2}(a\neq 0)$.

67. $\lim\limits_{x\to\infty}x^4\tan^2\dfrac{1}{x^2}$.

68. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{\arctan^2 x}=A$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.

70. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

71. 设 $f(x)=\int_0^{\tan x}\arctan t^2\,dt$,$g(x)=x-\sin x$,当 $x\to 0$ 时,比较这两个无穷小的关系.

72. 设 $f(x)$ 连续,且$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+\cos x]^{\frac{1}{x}}=e^3$,且 $f'(0)$ 存在,求 $f'(0)$.

73. 设 $f(x)$ 二阶连续可导,$f''(0)=4$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,求$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

求下列极限:

74. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\dfrac{\pi}{4}x\right)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$.

75. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x^2)^{\frac{1}{x(\sin x-\tan x)}}$.

76. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$(其中 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$)

77. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\sin x}$.

79. 求$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

80. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

81. 求$\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\ln(1+x)}$.

82. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax-a\sin x}{x(1-\cos ax)}$.

83. $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{2x-1}}-e^{\frac{1}{2x+1}}\right)$.

84. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{\pi}{n}-\arctan\dfrac{\pi}{n+1}\right)$.

85. 设曲线 $y=x^n$ 在点$(1,1)$处的切线交 x 轴于点$(\xi_n,0)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n^{2n}$.

求下列极限中的参数:

86. 确定常数 a,b,c 的值，使得当 $x\to 0$ 时，$e^x(1+bx+cx^2)=1+ax+o(x^3)$.

87. 确定常数 a,c，使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_0^x(e^{t^2}-1)dt}=c$，其中 c 为非零常数.

88. 设 $\lim\limits_{x\to 0}(x^{-3}\sin 3x+ax^{-2}+b)=0$，求 a,b.

89. 设 $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+ax+b}+cx+d)=0$，求 a,b,c,d.

90. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数，求 a,b.

91. 求常数 m,n，使得 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+mx+n}{\sin(x^2-1)}=3$.

92. 设 $a_n=\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}_{(n\text{ 重})}$，证明：$\{a_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

93. 设 $a_1=1,a_{n+1}+\sqrt{1-a_n}=0$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

94. 设 $x_1=2,x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

95. 设 $a_1=1,a_2=2,3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0,n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

96. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{e^x\sin^n x}{1+e^x}dx$.

97. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 的连续性.

98. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}(x>0)$ 的连续性.

99. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$，求 $f(x)$ 的间断点及其类型.

100. 设 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{x^2-1}$，求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

101. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)},x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$，试补充定义使得 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续.

高 分 题

102. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=$ ________.

103. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sin(x-t)^2dt}{\sin^2x\ln(1-x)}=$ ________.

104. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\sin(x^2-t^2)dt}{(1-\cos x)\ln(1+2x^2)}=$ ________.

105. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t\cos t\,dt-x-\dfrac{x^2}{2}}{(x-\tan x)(\sqrt{x+1}-1)}=$ ________.

106. 当 $x \to 0$ 时，$x - \sin x\cos 2x \sim cx^k$，则 $c =$ ________，$k =$ ________.

107. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\arctan\dfrac{1}{x}\right)^{x^2} =$ ________.

108. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(\sin t + t^2\cos\dfrac{1}{t}\right)\mathrm{d}t}{1-\cos^2 x} =$ ________.

109. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x = 8$，则 $a =$ ________.

110. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\ln^2(1+x)}-1}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}} =$ ________.

111. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(2x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\dfrac{x+1}{x-1}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} =$ ________.

112. 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln\cos(x-t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1+f^2(x)}-1} =$ ________.

113. 设 $f(x)$ 连续，且 $f(1)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^{\frac{1}{x}} f(xt)\mathrm{d}t}{x^3-1} =$ ________.

114. 设 $f(x)$ 一阶连续可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t} =$ ________.

115. 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arctan(x-t)^2\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t} =$ ________.

116. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+x)^x - 3^x}{x^2} =$ ________.

117. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{\ln(1+x)(1-\cos\sqrt{x})} =$ ________.

118. 设 $f(x)$ 可导且 $f(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+h)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}} =$ ________.

119. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f(3-x)-3}{x-1} = -1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(2,f(2))$ 处的切线方程为________.

120. 当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1 \sim \cos^2 x - 1$，则 $a =$ ________.

121. 设 $f(x) = \begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a =$ ________.

122. 设 $f(x) = \begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin x/2}, & x>0,\\ a\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a =$ ________.

123. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(1-\cos x)+2\ln(1+bx^2)}{e^x-x-1}, & x>0,\\ 3, & x=0,\\ \dfrac{2bx\sin x+\int_0^{x^2}\cos t\,dt}{x\arctan x}, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

124. 设当 $x\to 0$ 时，有 $ax^3+bx^2+cx\sim\int_0^{\ln(1+2x)}\sin t\,dt$，则 ( )

(A)$a=\dfrac{1}{3},b=1,c=0$ (B)$a=-\dfrac{1}{3},b=1,c=0$

(C)$a=\dfrac{1}{3},b=-1,c=0$ (D)$a=0,b=2,c=0$

125. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2\,dt,g(x)=x^3+x^4$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 ( )

(A) 等价无穷小 (B) 同阶但非等价无穷小

(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小

126. 设 $f(x)=\int_0^x dt\int_0^t t\ln(1+u^2)\,du,g(x)=\int_0^{\sin x^2}(1-\cos t)\,dt$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 ( )

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价的无穷小

127. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 为两个数列，下列说法正确的是 ( )

(A) 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都发散，则 $\{a_nb_n\}$ 一定发散

(B) 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都无界，则 $\{a_nb_n\}$ 一定无界

(C) 若 $\{a_n\}$ 无界且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

(D) 若 a_n 为无穷大，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，则 b_n 一定是无穷小

128. 设 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则 ( )

(A)$a>0,b>0$ (B)$a<0,b<0$

(C)$a\geqslant 0,b<0$ (D)$a\leqslant 0,b>0$

129. 设 $\alpha\sim\beta(x\to a)$，则 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}}$ 等于 ( )

(A)e (B)e^2 (C)1 (D)$e^{\frac{1}{2}}$

130. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$ 使得 ( )

(A) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$

(B) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)<f(0)$

(C) 当 $x\in(0,\delta)$ 时，$f(x)$ 为单调增函数

(D) 当 $x\in(0,\delta)$ 时，$f(x)$ 是单调减函数

131. 设 $f(x)$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=\sin 2x+2e^x$ 的满足初始条

件 $f(0)=f'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+f(x)]}{x^2}$ （　　）

(A) 不存在　　(B) 等于 0　　(C) 等于 1　　(D) 其他

132. 下列命题正确的是 （　　）

(A) 若 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

(B) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续

(C) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 的一个邻域内连续

(D) 若 $\lim\limits_{h\to 0}[f(a+h)-f(a-h)]=0$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

133. 确定常数 a,b,c，使得 $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt]=c$.

134. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，其中 $f(x)$ 连续，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

135. 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{e}\right]^x$.

136. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$.

137. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$.

138. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{x(1-\cos x)}$.

139. 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，$F(x)=\displaystyle\int_0^x tf(t^2-x^2)dt$，且当 $x\to 0$ 时，$F(x)\sim x^n$，求 n 及 $f'(0)$.

140. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 内可导，$f'(x)<0$ 且 $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=a>0$，令 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\displaystyle\int_1^n f(x)dx$. 证明：$\{a_n\}$ 收敛且 $0\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant f(1)$.

141. 设 $a>0$，$x_1>0$，且定义 $x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(3x_n+\dfrac{a}{x_n^3}\right)(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值.

142. 设 $a_1=1$，当 $n\geqslant 1$ 时，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{a_n}{1+a_n}}$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限.

143. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

(1) 存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=1-2c$；

(2) 存在 $\xi\in[0,2]$，使得 $2f(0)+f(1)+3f(2)=6f(\xi)$.

144. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，证明：数列 $\{a_n\}$ 有界.

145. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义，且 $e^x f(x)$ 与 $e^{-f(x)}$ 在 $[0,1]$ 上单调增加. 证明：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

146. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$f(a)<0$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且大于零. 证明：$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内至少有一个零点.

147. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$,求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

148. 求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的间断点并判断其类型.

149. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$,求 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

夺冠题

150. 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的反函数.

151. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.

152. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^3}$.

153. 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{\ln(n+1)}=1$.

154. 设 $f(x)=a_1\ln(1+x)+a_2\ln(1+2x)+\cdots+a_n\ln(1+nx)$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数,且对一切 x 有 $|f(x)|\leqslant|e^x-1|$. 证明:$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$.

155. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\dfrac{i^2+1}{n}}$.

156. 设函数 $f(x)$ 可导且 $0\leqslant f'(x)\leqslant\dfrac{k}{1+x^2}(k>0)$,对任意的 x_0,作 $x_{n+1}=f(x_n)(n=0,1,2,\cdots)$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且满足方程 $f(x)=x$.

157. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 证明:$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

158. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,任取 $x_i\in[a,b](i=1,2,\cdots,n)$,任取 $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,证明:存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n)=(k_1+k_2+\cdots+k_n)f(\xi).$$

答案解析

1.【解】 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$,$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

2.【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x^2}}=1$ 得 $b=1$,

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}=1$,故 $a=4$.

3.【解】 $\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}=\dfrac{1+x\arcsin x-\cos x}{\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x}}\sim\dfrac{3}{4}x^2$,则 $a=\dfrac{3}{4}$.