重庆市高职高专规划教材
应用高等数学系列

■总主编 曾乐辉
■总主审 龙 辉

应用高等数学（上册）

YINGYONG GAODENG SHUXUE

工科类

主 编■余 英 李坤琼
副主编■杨 俊 孟 渝 洪 川

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

重庆市高职高专规划教材

应用高等数学系列

■总主编 曾乐辉

■总主审 龙 辉

应用高等数学（上册）

YINGYONG GAODENG SHUXUE

工科类

主 编■余 英 李坤琼

副主编■杨 俊 孟 渝 洪 川

重庆大学出版社

内容提要

本书根据教育部制定的《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》的精神，贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则编写而成. 本书分上、下两册，全书共11章. 上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分；下册内容包括常微分方程与拉普拉斯变换、级数、线性代数、概率与数理统计、MATLAB 软件在高等数学中的应用. 每节均有一定量的随堂练习，同时出版有与之配套的习题册（上、下册），以供学习者巩固所学知识.

本书可供三年制高职高专工科类各专业教学使用，也可供高职专科层次的各类成人教育选用，同时也可作为“专升本”教材或参考书.

图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学：工科类. 上册/余英，李坤琼主编. —重庆：重庆大学出版社，2012.6

重庆市高职高专规划教材. 应用高等数学系列

ISBN 978-7-5624-6717-5

Ⅰ.①应… Ⅱ.①余…②李… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 088560 号

应用高等数学（工科类）（上册）

主编 余 英 李坤琼

副主编 杨 俊 孟 渝 洪 川

责任编辑：范春青 版式设计：范春青

责任校对：刘雯娜 责任印制：赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：邓晓益

社址：重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编：401131

电话：（023）88617183 88617185（中小学）

传真：（023）88617186 88617166

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn（营销中心）

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：10.75 字数：268 千

2012 年 6 月第 1 版 2012 年 6 月第 1 次印刷

印数：1—12 000

ISBN 978-7-5624-6717-5 定价：22.00 元

前言

当前，我国的高职高专教育正在进入一个长足发展的时期，从规模到质量都在不断迈上新的台阶，教材建设作为高职高专教育的一个重要组成部分也要与时俱进，适应新形势的需要.

本教材根据教育部制定的《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》精神，由一批富有高职高专教育经验的专家、教授编写而成. 本教材编写组认真总结了国家示范高职院校《高等数学》和《应用高等数学》教材编写和使用的经验，研究了高职高专教育面临的新形势和新问题，统一了编写指导思想：教材应进一步把握“必需，够用”的尺度，继续加强数学应用性的基础上，使教材能够针对高职高专生源多渠道，学生基础极差大的现状，来尝试因材施教的创新举措.

本教材具有以下特点：

1. 以生为本，结构调整，优差兼顾

为适应高职高专招生对象的多元化，本教材坚持“为了一切学生”的宗旨，对高等数学内容结构进行了合理调整. 把多元函数微积分的内容分别编在一元函数微积分对应内容的末尾作为选学内容. 数学课程一开始即可接触到多元函数微积分，这就使得所有学生都能根据自己的基础和学习能力各取所需，解决了“吃不了”和“吃不饱”的矛盾. 同时，由一元函数的微积分到多元函数的微积分只是顺理成章、举一反三的推广，极易教学.

2. 进一步准确地把握了“必需、够用”的尺度

对于高职高专工科类各专业对数学工具的需求，编写组进行了大量的调研. 横向方面，集中了全市主要高职高专高等数学教师，对所教高等数学内容进行了综合分析；纵向方面，与各专业沟通，进行了广泛的问卷调查和走访，对它们的需求面和需求重点有了进一步把握. 因此，本教材内容的选择较好地做到了“供给对准需求”，充分体现了“以服务为宗旨”的高职教育指导思想.

3. 强化了数学在实际中的应用

(1) 概念的引入均从实际问题入手，遵循从感性到理性的认知规律，同时也是为下一步理论在实际中的应用推出范例，从而增强了学生对数学的应用意识和兴趣.

(2) 选编了有实际应用背景的例题、习题，落实以应用为目的的原

则，并尽可能地向高职高专工科各专业教学内容渗透，增加了数学应用的深度和广度.

(3)贯穿了数学建模教学思想，将数学建模的实例穿插在教材中，用以提高学生应用数学的兴趣和能力.

4. 进一步降低了深奥的数学理论和计算难度

与以往的教材相比，删去了只具理论价值，在实际中用处不大的纯理论. 不少定理省去了严格的理论证明，只给出几何解释或归纳. 由于教材中使用了计算机软件进行数学运算和数值计算，因此删减了一些人工运算技巧和繁杂的计算.

5. 数学与计算机软件相结合

教材第 11 章介绍了 MATLAB 软件在高等数学中的应用. 软件的应用减少了计算的难度，运用软件演示，使得数学教学手段更加现代化，教学更加直观和动态.

6. 注重教学互动，改变学生学习方式

本教材试图体现教学的启发式，改学生的被动接受为主动参与，加强了教与学，学与学的交流互动，使学生通过积极思维，相互启发，发挥主观能动性，提高学习效率.

本教材内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分.

本教材由重庆航天职业技术学院余英与重庆工业职业技术学院李坤琼任主编，重庆航天职业技术学院杨俊、重庆工业职业技术学院孟渝、重庆建筑工程职业学院洪川任副主编.

第 1 章由重庆青年职业技术学院周凤杰、杨欢、杜峰编写；第 2 章由重庆工业职业技术学院李坤琼、孟渝、简辉春、汤华丽、孙婷雅、刘双编写；第 3 章由重庆机电职业技术学院李春梅编写；第 4 章由重庆航天职业技术学院余英，重庆海联职业技术学院卓中伟、邓礼君编写；第 5 章由重庆建筑工程职业学院谢孝权、洪川、蒋燕编写；第 6 章由重庆航天职业技术学院杨俊编写.

本教材上册基本学时数为 76 学时，下册基本学时数为 62 学时，标 * 号的需另外安排学时. 使用者可根据专业需求适当增删.

本教材在编写过程中得到了重庆市数学学会高职高专专委会的指导，得到了在渝主要高职高专院校以及一些举办了高职、高专教育的各级各类学校领导及教师的大力支持和帮助，在此表示诚挚的感谢.

由于本教材的编写是具有创新模式的尝试，且编者水平有限，因此难免有缺点和错误，恳请读者批评指正.

《应用高等数学系列教材》编审委员会

2012 年 3 月

目录

1 函　数

在永恒发展的客观世界和不断进化的人类社会，人们都辩证地意识到：变是绝对，不变是相对. 纵观数学的发展历史，函数就侧重于分析、研究事物运动、变化过程的数量特征、数量关系，并揭示其量变的规律性. 函数是近代数学的基本概念之一，是微积分研究的基本对象. 极限是微积分学研究的重要思想和基本推理工具. 微积分学所研究的函数的连续、导数、微分、积分等概念是从不同的侧面量化出函数的性态. 本章将简单介绍一元函数、二元函数的概念和性质，为学习微积分知识打下必要的基础.

1.1　函数及其性质

1.1.1　函数的概念

1）函数的定义

引例 1　投掷同一铅球数次，可以观察到铅球的质量、体积每次都保持不变，若用 m 和 v 分别表示质量、体积，则在每次投掷中两者都为确定的常数；而投掷距离、上抛角度、用力大小每次均发生变化.

通常我们将在研究过程中保持不变的量称为常量；将发生改变的量称为变量. 常量与变量是相对而言的，同一量在不同场合下，可能是常量，也可能是变量，要以研究的过程为条件.

引例 2　以 r 为半径的圆面积为：$s=\pi r^2\ (r>0)$，其中 π 为常量，r 为变量，并且 r 每取定一个值，通过关系式 $s=\pi r^2$ 都有确定的面积 s 与之对应，这种关系就是下面给出的函数关系.

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一值时，通过一个对应法则 f 总有确定的 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x)\quad (x\in D)$$

式中，x 称为自变量，y 称为因变量或函数，非空数集 D 称为函数的定义域. 相对应的函数值的集合称为函数的值域.

对于任取 $x_0\in D$，函数 $y=f(x)$ 与之对应数值 y_0 称为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记为

$$y_0=f(x_0)\text{ 或 } y\Big|_{x=x_0}$$

例如，函数 $y=2x+1$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=(-\infty,+\infty)$，其图形是一条直线，如图 1.1 所示. $x_0=2$ 时，对应的函数值 $y_0=2\times2+1=5$.

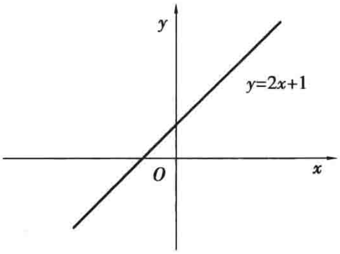

图 1.1

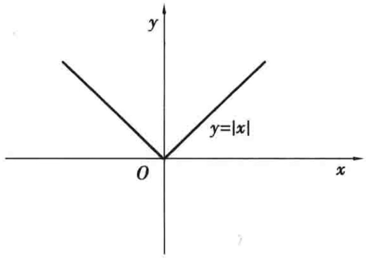

图 1.2

函数 $y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$,其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$,其图形如图 1.2 所示.

从函数的定义中不难看出,函数是由定义域与对应法则两要素确定的,与表示变量的字母符号无关. 因此,两个函数相同的充分必要条件是定义域和对应法则都分别相同. 例如 $y=e^x$ 也可以写成 $y=e^\lambda$.

2)函数的表示法

通常用表格法、图像法和解析法(公式法)来表示一个函数.

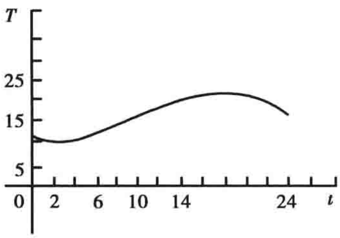

图 1.3

(1)表格法:将自变量的值与对应的函数值列成表的方法.

(2)图像法:在坐标系中用图像来表示函数关系的方法. 如图 1.3 给出了某一天的气温变化曲线,它表现了时间 t 与气温 T 之间的关系.

(3)解析法:将自变量和因变量之间的关系用数学式子来表示的方法. 我们以后学习的函数基本上都是用解析法表示的.

【例 1.1】 判断 $f(x)=\frac{x}{x}$ 和 $g(x)=1$ 是否相同.

【解】 两个函数的对应法则相同. 但第一个函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,第二个函数的定义域为 $\mathbf{R}$. 两个函数的定义域不同,故两个函数不是相同函数.

【例 1.2】 判断 $f(x)=\lg x^2$ 和 $g(x)=2\lg x$ 是否相同.

【解】 因 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,两个函数的定义域不同,故两个函数不是相同函数.

注 意

判断函数相同与否,必须同时满足两个条件,但只要先确定其中有一个条件不满足就不需再检查另一个条件.

3)函数定义域的求法

对于代表有实际意义的函数,其定义域应该由研究的实际问题决定. 例如:$s=\pi r^2$,在实际问题中该函数表示圆的面积,自变量 r 表示圆的半径,故定义域为$(0,+\infty)$.

对于纯数学上的函数关系,其定义域是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

【例 1.3】 求函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{(x-1)\ln(x+3)}$的定义域.

【解】 要使函数有意义,必须满足:

$$\begin{cases}x-2\geqslant 0\\x-1\neq 0\\\ln(x+3)\neq 0\\x+3>0\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}x\geqslant 2\\x\neq 1\\x\neq -2\\x>-3\end{cases}$$

所以此函数的定义域为$[2,+\infty)$.

【例 1.4】 求函数 $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$的定义域.

【解】 要使函数有意义,必须满足$\begin{cases}\left|\dfrac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1\\1+x\neq 0\end{cases}$,故 $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$的定义域为

$$D=\left[-\frac{1}{3},1\right]\quad 或\quad D=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1\right\}$$

注 意

求定义域时需注意到以下 3 点:

(1)对于分式函数,分母不能为 0;

(2)对于开偶次方根的根式函数,被开方式应大于等于 0;

(3)对于对数函数,真数应大于 0.

4)函数符号$f(x)$的使用

函数 $y=f(x)$中的“f”表示函数关系中的对应法则,即对每一个 $x\in D$,按法则 f 有唯一确定的 y 值与之对应.

【例 1.5】 若$f(x-1)=\dfrac{1}{x+1}$,求$f(1)$,$f(3)$.

【解】 法 1:$f(x-1)=\dfrac{1}{(x-1)+2}$,所以$f(x)=\dfrac{1}{x+2}$.

法 2:令 $x-1=t$,则 $x=t+1$,于是得$f(t)=\dfrac{1}{t+1+1}=\dfrac{1}{t+2}$,即$f(x)=\dfrac{1}{x+2}$.

所以$f(1)=\dfrac{1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$,$f(3)=\dfrac{1}{3+2}=\dfrac{1}{5}$.

【例 1.6】 设$f(x)=3x^2-e^x$,求$f(0)$,$f\left(\frac{1}{x}\right)$,$f(\sin x)$.

【解】 $f(0)=3\cdot 0^2-e^0=-1$

再分别用$\frac{1}{x}$,$\sin x$去替换$f(x)$中的x,得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=3\left(\frac{1}{x}\right)^2-e^{\frac{1}{x}}=\frac{3}{x^2}-e^{\frac{1}{x}}$$

$$f(\sin x)=3(\sin x)^2-e^{\sin x}=3\sin^2 x-e^{\sin x}$$

事实上,$f\left(\frac{1}{x}\right)$和$f(\sin x)$已经不是普通意义上的函数值，而是一个比$f(x)$更复杂的函数，是在后续内容中将要介绍的复合函数.

5)分段函数

将一个函数的定义域分成若干部分，在各部分内的对应法则用不同的解析式来表示，这种函数称为分段函数.

如图 1.4 所示的就是一个分段函数,其定义域$D=(-\infty,+\infty)$,该函数也叫做符号函数.表达式如下：

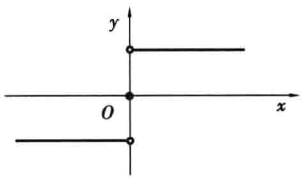

图 1.4

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

一般而言,分段函数仍然表示一个函数,不要把分段函数的几个表达式看作几个函数;分段函数的函数值用自变量所在的区间相对应的公式计算.分段函数的定义域是所有分段解析式的定义域的并集.

例如:$y=\begin{cases}x^2 & 0<x\leqslant 1\\ \frac{1}{2} & x=0\\ 1-x & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 的定义域为$[-1,1]$,$f(0)=\frac{1}{2}$,$f(1)=1^2=1$.

1.1.2 函数的性质

1)函数的单调性

定义 1.2 如果对于(a,b)内的任意两个数值x_1,x_2,若当$x_1<x_2$时,都有$f(x_1)<f(x_2)$,则称函数$y=f(x)$在区间(a,b)内单调递增；若当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$,则称函数$y=f(x)$在(a,b)内单调递减. 函数在区间(a,b)内单调递增或单调递减,统称为区间(a,b)内的单调函数,区间(a,b)称为函数的单调区间.

单调函数的几何意义:区间(a,b)内的单调增函数,其曲线是沿x轴正方向逐渐上升的,如图 1.5 所示;区间(a,b)内的单调减函数,其曲线是沿x轴正方向逐渐下降的,如图 1.6 所示.

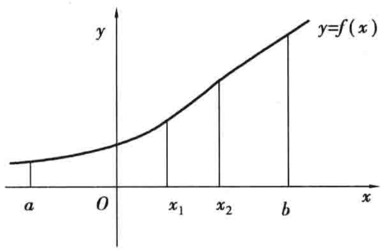

图 1.5

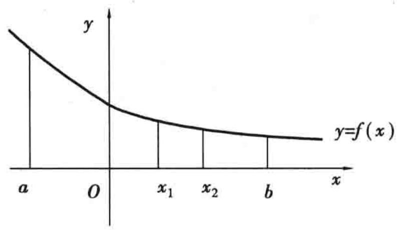

图 1.6

【例 1.7】 验证函数 $f(x)=x^3-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的单调性.

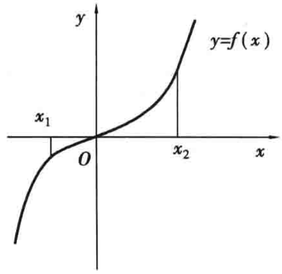

图 1.7

【证明】 在 $(-\infty,+\infty)$ 内任意取两点 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$,

$$
\begin{aligned}
f(x_2)-f(x_1)&=(x_2^3-1)-(x_1^3-1)\\
&=x_2^3-x_1^3\\
&=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)\\
&=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]>0
\end{aligned}
$$

即 $f(x_2)>f(x_1)$,根据定义 1.2 知 $f(x)=x^3-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增,如图 1.7 所示.

2)函数的奇偶性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是关于原点对称的区间 I,如果对任意的 $x\in I$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为奇函数;如果对任意的 $x\in I$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为偶函数;既不是奇函数也不是偶函数的函数,称为非奇非偶函数.

例如,$f(x)=x^2$ 是偶函数,因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$;而 $f(x)=x^3$ 是奇函数,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

奇偶函数的几何特征:奇函数的图像关于坐标原点对称,如图 1.8 所示;偶函数的图像关于 y 轴对称,如图 1.9 所示.

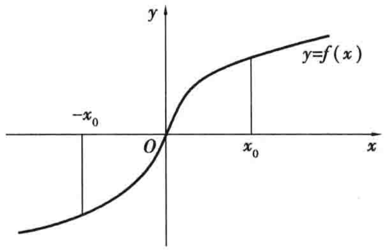

图 1.8

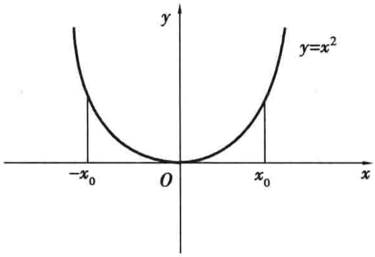

图 1.9

奇偶函数的性质:

(1)奇函数的代数和仍是奇函数,偶函数的代数和仍是偶函数.

(2)奇数个奇函数的乘积是奇函数,偶数个奇函数的乘积是偶函数.

(3)偶函数的乘积仍是偶函数.

(4)奇函数和偶函数的乘积是奇函数.

【例 1.8】 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x\sin x$ (2) $y=x^3+\tan x$

【解】 (1)因 $y=x$ 和 $y=\sin x$ 均为奇函数,由奇偶函数的性质(2)知 $y=x\sin x$ 为偶函数.

(2)因 $y=x^3$ 和 $y=\tan x$ 均为奇函数,由奇偶函数的性质(1)知函数 $y=x^3+\tan x$ 为奇函数.

3)函数的有界性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果存在一个正数 M,对于所有的 $x\in I$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界；否则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

【例 1.9】 判断下列函数是否有界.

(1) $f(x)=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$ (2) $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\in(0,1)$

【解】 (1)因为对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $|\sin x|\leqslant 1$,所以 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

(2)对于任意给定的正数 $M(M>1)$,只要 $0<x<\dfrac{1}{M}$ 时,有 $|f(x)|=\dfrac{1}{x}>M$,因此 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

注 意

(1)如果函数 $y=f(x)$ 在 I 上有界,则 $y=f(x)$ 在 I 上的界点是不唯一的. 例如 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,只要分别取 $M=1, M=2$ 就有

$$|\sin x|\leqslant 1=M,\ |\sin x|<M=2$$

(2)有界性是依赖于区间的,例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 无界,而在区间 $(1,2)$ 内是有界的.

4)函数的周期性

定义 1.5 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,如果存在正数 T 使 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立,则称函数为周期函数,且称满足这个等式的最小正数 T 为函数的周期.

例如,正弦函数 $\sin x$,余弦函数 $\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数.

三角函数是常见的周期函数,现将三角函数的周期小结如下:

(1) $y=\sin x, y=\cos x, T=2\pi$.

(2) $y=\tan x, y=\cot x, y=|\sin x|, y=|\cos x|, T=\pi$.

(3) $y=A\sin(\omega x+\varphi), y=A\cos(\omega x+\varphi), T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

(4) $y=\tan(\omega x+\varphi), y=\cot(\omega x+\varphi), T=\dfrac{\pi}{|\omega|}(\omega,\varphi\in\mathbf{R}$,且 $\omega\neq 0)$.

周期函数的运算性质：

(1)若函数$f(x)$的周期为T,则函数$f(ax+b)$的周期为$\frac{T}{|a|}(a,b\in\mathbf{R}$,且$a\neq0)$.

(2)若函数$f(x)$和$g(x)$的周期为T,则$f(x)\pm g(x)$的周期也为T.

(3)若函数$f(x)$和$g(x)$的周期分别为T_1,T_2,且$T_1\neq T_2$,则$f(x)\pm g(x)$的周期为T_1,T_2的最小公倍数.

【例 1.10】 判断下列函数的周期.

(1)$y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$　　(2)$y=\sin x-\cos x$

【解】 (1)由周期函数的运算性质可知:$y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$的周期$T=\frac{2\pi}{3}$.

(2)由周期函数的运算性质可知:$y=\sin x-\cos x$的周期$T=2\pi$.

5)反函数

定义 1.6 设函数$y=f(x)$的定义域为D,值域为W. 若对于W中的每一个y值,在D内有唯一的满足$f(x)=y$的x值与之对应,则x也是y的函数,称它为函数$f(x)$的反函数,记作$x=\varphi(y)$,或$x=f^{-1}(y)$,$y\in W$.

由定义可知,$x=f^{-1}(y)$与$y=f(x)$互为反函数. 习惯上,用x表示自变量,y表示因变量,所以反函数常习惯性地表示成$y=f^{-1}(x)$的形式.

给出一个函数$y=f(x)$,若要求反函数,只要把x用y表示出来,再将x与y的符号互换即可. 切记$y=f(x)$的定义域和值域分别是反函数$y=f^{-1}(x)$的值域和定义域.

注 意

$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图像关于$y=x$对称.

【例 1.11】 求$y=\sqrt[3]{x+1}$的反函数.

【解】 由$y=\sqrt[3]{x+1}$解得$x=y^3-1$,交换x与y,得$y=x^3-1$,即为所求反函数.

可以证明,$y=f^{-1}(x)$的图像与$y=f(x)$的图像关于直线$y=x$对称.

习题 1.1

1. 设$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant1\\ -2 & 1<x\leqslant2\end{cases}$,求函数$f(2x)$的定义域.

2. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\lg\sin x$　　(2)$y=\sqrt{x^2-4x+3}$

3. 求下列函数的值域.

(1) $y=x^2+2x-4$

(2) $y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$

(2) $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$

5. 判断下列函数的周期.

(1) $f(x)=|\sin 3x|$

(2) $f(x)=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

1.2 基本初等函数与初等函数

1.2.1 基本初等函数

微积分研究的是函数,而涉及的函数主要是我们在初等数学中学习过的常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数以及它们的复合. 为满足后续课程需要,有必要把上述 6 类函数系统地整理在一起. 这 6 类函数统称为基本初等函数.

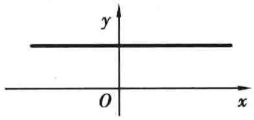

图 1.10

1)常量函数

$$y=C \qquad (C\text{ 为常数})$$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,在几何上函数 $y=C$ 表示一条平行于 x 轴的直线,如图 1.10 所示.

2)幂函数

$$y=x^\alpha \qquad (\alpha\in\mathbf{R})$$

幂函数的定义域随 α 的不同而不同,但其图形均过点(1,1). 例如 $y=x^2$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$;$y=x^{\frac{1}{2}}$的定义域是$[0,+\infty)$;$y=x^{-1}$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 幂函数的图形也随 α 的不同而不同,如图 1.11 所示.

在$(0,+\infty)$上,对 α 的不同情况,$y=x^\alpha$ 的图形大致如图 1.11(d)所示.

3)指数函数

$$y=a^x \qquad (a>0,a\neq 1)$$

指数函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域$(0,+\infty)$,图形均通过点(0,1),如图 1.12 所示. 其中函数 $y=\mathrm{e}^x$($\mathrm{e}=2.718\ 28\cdots$)是一个非常重要的指数函数.

4)对数函数

$$y=\log_a x \qquad (a>0,a\neq 1)$$

对数函数是指数函数 $y=a^x$ 的反函数. 对数函数的定义域为$(0,+\infty)$,值域为

$(-\infty,+\infty)$,其图形均通过点$(1,0)$,如图 1.13 所示. 其中以 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$ 称为自然对数,简记为 $y=\ln x$,而以 10 为底的对数函数称为常用对数,简记为 $y=\lg x$.

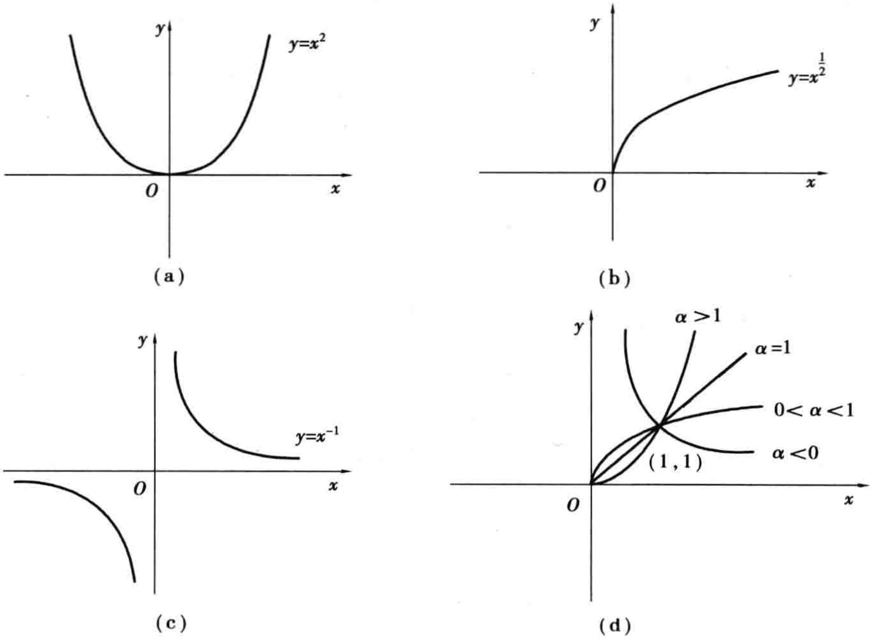

图 1.11

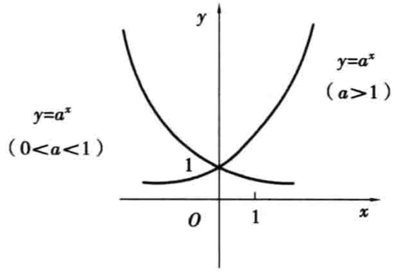

图 1.12

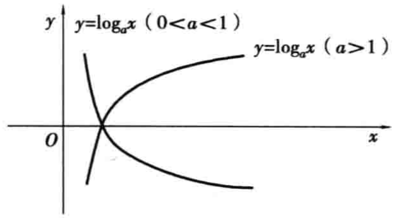

图 1.13

5)三角函数

正弦函数:$y=\sin x, x\in(-\infty,+\infty), y\in[-1,1]$.

余弦函数:$y=\cos x, x\in(-\infty,+\infty), y\in[-1,1]$.

正切函数:$y=\tan x$, $\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\cdots\}$,值域为 $\mathbf{R}$.

余切函数:$y=\cot x$, $\{x\mid x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$,值域为 $\mathbf{R}$.

正割函数:$y=\sec x$, $\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$.

余割函数:$y=\csc x$, $\{x\mid x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$.

函数 $\sin x,\cos x,\sec x,\csc x$ 是以 2π 为周期,$\tan x,\cot x$ 是以 π 为周期;$\sin x,\cos x$是有界函数,其他都是无界函数;$\cos x,\sec x$ 是偶函数,其他都是奇函数.

6)反三角函数

反正弦函数:$y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,奇函数且单调递增,有界.

反余弦函数:$y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$,偶函数且单调递减,有界.

反正切函数:$y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,单调递增的有界函数.

反余切函数:$y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty), y\in(0,\pi)$,单调递减的有界函数.

1.2.2 复合函数

在前面函数的定义中我们知道两个变量 x,y 之间的函数关系用 $y=f(x)$ 表示.符号"f"既表示两变量间的对应法则,更广泛的意义是建立了两个集合之间的映射关系.函数 $y=f(x)$ 中的自变量 x 可以用一个函数 $g(x)$ 去替代而得到一个较 $f(x)$ 更复杂的函数 $f[g(x)]$.例如,$f(x)=e^x, g(x)=\sqrt{x}, f[g(x)]=e^{\sqrt{x}}$.如果用变量 u 表示 e^x 中的 x 得:$y=e^u$,令 $u=\sqrt{x}$ 即为两个基本初等函数.上述过程就是将函数 $u=\sqrt{x}$ 代入 $y=e^u$ 得 $y=e^{\sqrt{x}}$.函数之间的这种代入或迭代的关系称为复合关系,所得到的函数称为复合函数.比如:$y=\ln\sin x$,就是由两个简单函数 $y=\ln u$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的复合函数.

定义 1.7 设 $y=f(u), u=\varphi(x)$.如果 $u=\varphi(x)$ 的值域全部或部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域内,则 y 通过中间变量 u 成为 x 的函数,称该函数为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中,x 是自变量,u 称为中间变量.

函数的复合关系有两个方面.一方面是由简单函数复合成复合函数,例如,由 $y=\sin u$,$u=(x^3+1)$ 复合而成的复合函数为 $y=\sin(x^3+1)$.复合函数可以由两个以上的函数复合构成,例如 $y=2^u, u=\sqrt{v}, v=3x$ 构成复合函数 $y=2^{\sqrt{3x}}$,其中 u,v 均为中间变量.另一方面就是将复合函数分解成简单函数.充分理解定义 1.7 就会明白,并不是任意两个函数都能复合成复合函数.例如 $y=\sqrt{u}, u=-x^2-2$ 就不能复合,因为 $y=\sqrt{u}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$,而 $u=-x^2-2$ 的值域为 $(-\infty,-2]$,不在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域内.

【例 1.12】 下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1)$y=\sin(x^3+4)$　　　　(2)$y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$

【解】 (1)$y=\sin(x^3+4)$ 是由 $y=\sin u, u=x^3+4$ 复合而成.

(2)$y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$ 是由 $y=\ln u, u=1+v, v=\sqrt{w}, w=1+x^2$ 复合而成.

一般而言,所谓把一个复合函数分解成若干个简单函数,就是由外到里,逐层分析复合函数是由哪些简单函数(基本初等函数或基本初等函数经简单运算而得)复合而成,即每个层次都应是一个简单函数.

初等函数 基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算,并且能用一个解析式表示的函数,称为初等函数.

初等函数是微积分学研究的主要对象.例如 $y=\sin\ln\sqrt{x^2-1}$,$y=\sqrt[5]{\ln\cos^3 x}$,$y=e^{\operatorname{arccot}\frac{x}{3}}$