

Weibo Bujian Sheji

微波部件设计下

北京邮电学院微波专业编

人 民 邮 电 出 版 社

微波部件设计

下 册

北京邮电学院微波专业 编

人 民 邮 电 出 版 社

目 录

第四章 晶体三极管放大器与振荡器	1
§ 1 微波晶体三极管	1
§ 2 微波晶体三极管放大器	18
§ 3 放大器噪声的分析计算	34
§ 4 微波晶体三极管振荡器	53
第五章 参量放大器	78
§ 1 绪言	78
§ 2 参量放大器的基本概念	80
§ 3 门雷-罗威关系式	87
§ 4 参量放大器电路分析	96
§ 5 参量放大器噪声分析	113
§ 6 参量放大器的宽频带问题	131
§ 7 参量放大器电路设计计算举例	150
第六章 变容管上变频器与倍频器	163
§ 1 变容二极管	163
§ 2 上变频器的分析	174
§ 3 发信上变频器的设计	200
§ 4 倍频器基本概念	205
§ 5 阶跃恢复变容二极管倍频器	209
§ 6 倍频器的工程设计与实际调整	218

第四章 晶体三极管放大器 与振荡器

微波晶体三极管已得到广泛应用。由于其性能稳定、使用方便，在固体微波器件中放大性能优越、可靠等特点，日益受到重视。微波晶体三极管器件的分析一般需用 S 参数法进行，本章将着重介绍 S 参数法分析设计放大器与振荡器的方法。

§ 1 微波晶体三极管

在微波波段广泛使用的无论是双极性（由多数载流子与少数载流子原理构成的一般晶体三极管）或者是场效应晶体三极管，在原理上都与低频率时使用的晶体三极管是一样的。只是在应用到微波波段时，在低频率应用时可以忽略的一些参量变化，成为影响显著的因素，因而晶体管的结构需要有显著的变化。这主要表现在晶体三极管的有效作用区域体积要大大缩小，而管座结构的寄生电容、电感也要大大减小。以较常用的双极性晶体三极管为例，其管心组成情况如图 4-1 所示，其发射极与基极都作成细长条，互相交错成交叉指状的排列，再各自并连于发射极与基极的欧姆接触。晶体管工作电流的大小由并连的条数多少控制，因而制造时并联条数多则电流大，从而晶体管的功率也大，一般低噪声放大晶体管发射极用 1—2 条，基极用 2—3 条，功率管所用的条数较多，例如发射极用 9 条，基极用 10 条等等。细条的尺寸是管子能否工作到微波

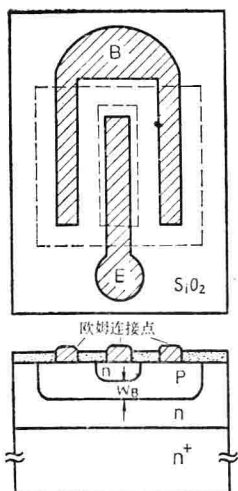


图 4-1 微波晶体管管心组成图

其工作原理与一般场效应晶体管一样，也只是有着管心有效工作区域体积大大减小，以及管座结构支架寄生电感、电容数量减小的特点。这类晶体管管心的结构示意图如图 4-2 所示。为了达到在微波波段工作，主要要求控制栅长度大大缩短，例如控制栅长度缩小到 $0.5\ \mu\text{m}$ ，其他如控制栅宽度(控制栅圆周长度)为 $200\ \mu\text{m}$ ，沟道厚度为 $0.15\ \mu\text{m}$ 上下，其管子振荡频率可达到 $80\ \text{GHz}$ 数量级。

不管是双极性晶体三极管，或者是场效应晶体管，由于这些晶体管在微波波段与一般低波段时的工作原理是一样，因而在微波波段的分析计算也可作出其等效电路从而按一般的电路原则进行计算。当然由于在微波波段需要考虑的寄生参量增多，晶体管电路的各个参数值确定困难，等效电路方法常常也就不大能采用，常用等效于四端网络的方法来进行计算分析，此时不精确求得其等效电路，而用测量方法确定等效四端网络

波段的关键，其中主要是发射极条的宽度 S ，以及基区厚度 W_B 。要求此两尺寸大大缩小，例如 S 应作到 $1\ \mu\text{m}$ 以下， W_B 作到 $0.1\ \mu\text{m}$ 以下。同时对管座的封装支架寄生电感、电容，要求尽量减小。此种结构的基本工作原理很显然与一般常用的晶体管是一样的。除双极性晶体三极管外，微波波段目前更趋向于采用场效应晶体三极管，这类晶体管表现出比双极性晶体管具有更高的工作频率，更好的低噪声性能，但其

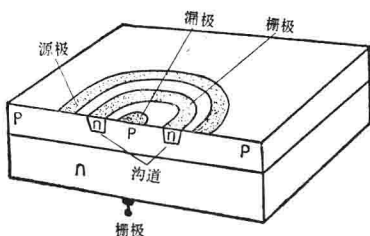


图 4-2 场效应晶体管管心组成图

的四个参数，从而进行计算。由于微波波段测量上的原因，表征四端网络特性的四个参量常采用 S 参量数值。目前分析计算微波晶体三极管电路中虽然最常用的是 S 参量方法，但等效电路的办法在一定情况下也必需采用，因而两种计算分析方法常是互相补充的。

1.1 微波晶体三极管的等效电路

微波晶体三极管等效电路是由晶体管管心部分与管座支架寄生电感、电容的等效电路组合而成。管座支架的等效电路可示于图 4-3，图中晶体管有效作用部分用示意符号代表， L_1 、 L_6 代表由测量参考面到支架结构的引线电感， L_2 、 L_5 为管座支架到晶体管管心金属引线间的引线电感， C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 为相应的各个部分寄生电容， C_5 为输入输出间的支架结构寄生耦合电容， L_3 、 L_4 、 L_7 则为管心基极、发射极、集电极的金属引线电感。 L_1 、 L_2 、 C_1 、 C_2 等参量可用去掉管心后的空管座进行测量求得。加上晶体管本身的等效电路后，整个微波晶体三极管的等效电路如图 4-4 所示，虚线内部为晶体管本身的等效电路，原则上来讲与一般晶体管等效电路一样，但其参量在微波波段数量上有很大变化。其中 C_6 为管子本身发射极与基极间

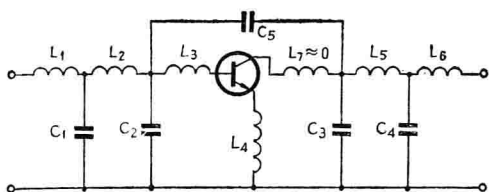


图 4-3 微波晶体三极管座支架等效电路

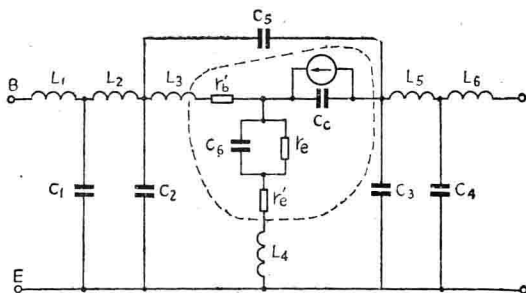


图 4-4 微波晶体管等效电路

的扩散电容与势垒电容之和, r_e 为发射极的正向电阻, C_c 为集电极到基极的势垒电容, r_b 为基极损耗电阻。这是发射极接地的等效电路, 也是小信号情况下适用的等效电路。通常图 4-4 所示电路的参量数值是随管子不同而大不相同的, 例如对于一般小功率晶体管其通常参考数值为: $L_1 + L_2$ 约为 $(0.3-1)\text{nH}$ 数量级, L_3 为 $(0.2-0.3)\text{nH}$ 数量级, L_4 为 $(0.1-0.5)\text{nH}$ 数量级, $L_5 + L_6$ 为 $(0.7-1.3)\text{nH}$ 数量级, $C_1 + C_2$ 为 0.1 pF 数量级, $C_3 + C_4$ 为 0.01 pF 数量级, C_5 为 0.05 pF 数量级。对于晶体管本身的等效电路参数, 则随管子的制造不同, 频段不同, 功率不同差别更大。例如对于在 4 GHz 频段

左右工作的小功率晶体三极管, C_5 可为 $0.15-0.2$ pF 数量级, C_c 为 0.4 pF 数量级, r_b 为 $(10-20) \Omega$ 数量级。以上这些数据都只是供参考的数量级数字, 较精确的数据只能由实测来决定。图 4-4 的等效电路对晶体管本身等效电路来说有一些简化, 有时还需要精确一点的电路形式。这种等效电路模型对于 10 GHz 波段也是有效的, 但是困难的问题还是如何由实测决定各个参量的数值。由于这些参量都由管座、管心结构在一起形成的, 不能分别单独测量, 而我们能方便测得的是整个等效电路的四端网络等效 S 参量数值。因此为了决定等效电路的各个参量, 通常假定参量的数值计算出其等效 S 参量, 再与实测的 S 参量比较。为了得出正确的等效电路各参量, 需用电子计算机反复进行这种假定, 再计算然后再比较, 直到按假定的数值计算出的 S 参量与实测的 S 参量相近, 这时才确定最后所假定的参量数值为我们所要决定的参量数值。当然这种计算比较过程是非常麻烦的, 只有借助于计算机才能得到较好后果。各种参量数值一经确定后, 微波晶体三极管电路就与一般电路一样进行分析。当然由于参数较多计算很麻烦, 所以在一定具体条件下常常把参数合并简化, 以便于具体解决问题。

1.2 S 参量分析法

一般晶体三极管在小信号情况下可看成一线性四端网络, 只要知道此线性网络的参量值便可进行分析计算, 通常网络采用 Z 参量法与 Y 参量法。在一般低频率电路中常采用 h 参量法, 众所周知, Z 参量、 Y 参量和 h 参量等等是可经过换算公式互相变换的, 因而采用哪种参量法在原则上是没有区别的。但是在微波波段很难测量出 h 参量或者 Z 参量这类参数值。因为这些参数值都是由四端网络输出端或输入端短路或者开路

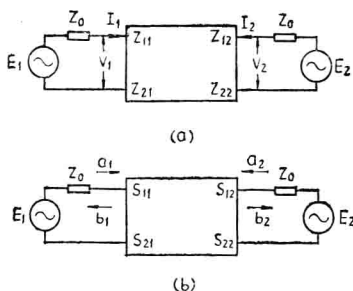


图 4-5 四端网络 Z 参量与 S 参量示意图

时，求其相对应的电流电压比所决定，例如在 Z 参数情况：

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (4-1)$$

利用输出端短路 ($V_2=0$) 的条件，由此时的 I_1 与 V_1 之比求得 Z_{11} ，亦即：

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

其他参数 Z_{12} 、 Z_{21} 、 Z_{22} 都类似求得。但这类方式不能用在微波波段的晶体三极管等效电路上，这是由于在微波波段时，晶体三极管输出、输入端不接负载工作在短路与开路时都很容易自激，同时在微波波段便于测量的只是驻波、波长和功率这类沿传输线易于测试的特性，根本不再用一般的电流、电压集中参量概念。因为在微波波段确定与测定电流电压都很困难，所以在微波波段不用一般常用的 Z 参量或 h 参量法，而是用下述的 S 参量法。

由图 4-5 a 可见，当一个四端网络外接输入、输出负载为特性阻抗 Z_0 值时，我们可由 V_1 、 I_1 、 V_2 、 I_2 、 Z_0 定义一套新参量 a_1 、 b_1 、 a_2 、 b_2 如下：

$$a_1 = \frac{V_1 + Z_0 I_1}{2 \sqrt{Z_0}} \quad (4-2)(a)$$

$$b_1 = \frac{V_1 - Z_0 I_1}{2 \sqrt{Z_0}} \quad (4-2)(b)$$

$$a_2 = \frac{V_2 + Z_0 I_2}{2 \sqrt{Z_0}} \quad (4-2)(c)$$

$$b_2 = \frac{V_2 - Z_0 I_2}{2 \sqrt{Z_0}} \quad (4-2)(d)$$

由数学来看，通过(4-2)式，不过把原来表征网络的物理参量 V 、 I 用 a 、 b 参量来表示。由于在 Z_0 给定时， a 、 b 参量与 V 、 I 参量是一一对应的，我们不使用 V 、 I 参量数值来表征网络的特性，改用 a 、 b 参量的数值也是一样。因为当 a 、 b 参量值知道后，我们可由(4-2)式唯一的确定 V_1 、 I_1 参量值，因而在数学上改用 a 、 b 参量表征网络的物理性能其效果也是一样。同时 a 、 b 参量是有其确切物理意义的，这由下列表示式可以明确看到。输入端 a_1 的平方值为：

$$|a_1|^2 = \frac{1}{4Z_0} |V_1 + Z_0 I_1|^2 = \frac{|E_1|^2}{4Z_0} \quad (4-3)$$

同样输入端 $|a_1|^2 - |b_1|^2$ 的值为：

$$\begin{aligned} |a_1|^2 - |b_1|^2 &= \frac{1}{4Z_0} (V_1 + Z_0 I_1)(V_1^* + Z_0 I_1^*) \\ &\quad - \frac{1}{4Z_0} (V_1 - Z_0 I_1)(V_1^* - Z_0 I_1^*) \\ &= \frac{1}{4Z_0} 2Z_0 (V_1^* I_1 + V_1 I_1^*) \\ &= R_e(V_1^* I_1) \end{aligned} \quad (4-4)$$

上式中 V_1^* 、 I_1^* 代表 V_1 、 I_1 的共轭复数值, $R_e(V_1^* I_1)$ 为输入端输入四端网络的功率值。当图 4-5 的四端网络用一段特性阻抗为 Z_0 的传输线联接到输入源 E_1 与输出源 E_2 , 而 E_1 与 E_2 的内阻为 Z_0 值时(实际情况通常就是这样), 则 $|a_1|^2$ 代表传输线上的入射波功率, 而 $|b_1|^2$ 代表传输线上的反射波功率, 因而他们两者之差就为输入端进入四端网络的输入功率值。对于输出端 a_2 、 b_2 参量亦可得到一样的结论。因而 a_1 、 b_1 代表传输线上入射波与反射波电压值。由上面分析可见: 无论在数学上或者物理意义上, 我们都可用 a 、 b 参量来代替原来网络的 V 、 I 参量。四端网络输入端的 V_1 、 I_1 与输出端的 V_2 、 I_2 是由 Z 参数(或 Y 参数, h 参数等等)形成相互线性关系的, 因而输入端的 a_1 、 b_1 与输出端的 a_2 、 b_2 亦必然有类似的线性关系, 由此我们可定义其关系式如下:

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \quad (4-5)(a)$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \quad (4-5)(b)$$

由上式就得到所谓 S 参数的定义, 因而一个四端网络亦可用 S 参量示于图 4-5 b 。需要注意 S 参量数值不仅是由四端网络本身确定的, 而且也与外接输入、输出负载值有关, 这一点是与一般 Z 参数值、 Y 参数值仅由网络本身决定是不相同的。通常取最常用的传输线特性阻抗值(例如 50Ω)为负载值时来测定网络的 S 参数。

测定 S_{11} 与 S_{22} 值是比较容易的, 当令图 4-5(b)中 $E_2 = 0$, 则:

$$a_2 = \frac{V_2 + Z_0 I_2}{2 \sqrt{Z_0}} = 0$$

因而由(4-5)(a)式得:

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad (4-6)$$

上式表明 S_{11} 为传输线上反射波电压与入射波电压之比，这就是一般的反射系数，因而 S_{11} 就是四端网络输出端接特性阻抗 Z_0 时的输入端反射系数，这当然是好测量的。同样 S_{22} 就是在输入端接上特性阻抗， $E_1=0$ 时，输出端测得的反射系数。在此情况下的 S_{21} 为：

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad (4-7)$$

也就是输入端传输线上的反射波电压值与输出端传输线上的入射波电压值之比。当然这个比值有相位关系，因而要用一些能测相位的仪表来进行测试。但在测量其绝对值时，由于：

$$|S_{21}|^2 = \left| \frac{b_2}{a_1} \right|^2 = \frac{P_L}{P_a}$$

亦即输出功率 P_L 与入射功率 P_a 之比为 $|S_{21}|^2$ ，而 P_L 与 P_a 都可由功率测量法求得。同样也可测量求得 $S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0}$ ，以及 $|S_{12}|^2$ 的数值。由上面分析可见：在微波波段 S 参数值是可用微波测量手段求得的，但是这都是在四端网络外接负载（或者微波源内阻）为特性阻抗 Z_0 时的结果，正如我们上面所指出， S 参量值是与外接阻抗有关，因而所测得的 S 值只是在外接阻抗为 Z_0 时适用。一般情况下外接负载完全可能是不同于 Z_0 的数值，此时 S 参数的求法尚应另作分析解决。

由(4-2)与(4-5)式可见，各个 S 参数事实上也是把 V_1, I_1 与 V_2, I_2 联成一定的关系式，因而 S 参量应与 Z 参量、 Y 参量这类常用参量数值有一定转换关系。也就是在实验求得 S 参量值后，我们也可变换求得相应的 Z 参量值，然后按一般网络法求解，为此我们下面求解 S 参数与 Z 参数的变换式。

为了运用矩阵方式进行推算，我们定义下列矩阵表示式：

$$[a] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad [b] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad [I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad [S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} [1]$$

$$[G] = \begin{bmatrix} Z_0 & 0 \\ 0 & Z_0 \end{bmatrix} = Z_0 [1]$$

上列表示式中 $[1]$ 为一般单元矩阵，由(4-1)，(4-2)与(4-5)式并运用上列表示式，我们可求得如下的矩阵方程：

$$[V] = [Z][I] \quad (4-8)(a)$$

$$[a] = [F][V + GI] \quad (4-8)(b)$$

$$[b] = [F][V - GI] \quad (4-8)(c)$$

$$[b] = [S][a] \quad (4-8)(d)$$

上列表示式中，为了简便， $[V + GI]$ 与 $[V - GI]$ 式可为：

$$[V + GI] = [V] + [G][I]$$

$$[V - GI] = [V] - [G][I]$$

以下矩阵加减乘除混合时都沿用上列类似表示式。

代(4-8)(b)与(4-8)(c)式入(4-8)(d)式，消去 $[a]$ 与 $[b]$ 矩阵，并再利用(4-8)(a)式消去 $[V]$ 矩阵，则得下列矩阵方程：

$$[F][Z - G][I] = [S][F][Z + G][I] \quad (4-9)$$

以 $[I]^{-1}$ 乘(4-9)式, 消去 $[I]$, 我们得到下列恒等式:

$$[F][Z-G]=[S][F][Z+G] \quad (4-10)$$

考虑 $[F]$ 相当于单元矩阵, 因而交换定律适用, 故由上式可得:

$$[S]=[Z-G][Z+G]^{-1} \quad (4-11)$$

(4-11)式表示: 当 $[Z]$ 为已知时(亦即四端网络的 Z 参数已知时), S 参数可计算求得, 当 $[S]$ 参数为已知时, 由(4-10)式可得:

$$[Z]-[S][Z]=[S][G]+[G]$$

亦即:

$$[1-S][Z]=[S+1][G]$$

由上式得到:

$$[Z]=[1-S]^{-1}[1+S][G] \quad (4-12)$$

由于:

$$[1-S]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-S_{22}}{\Delta_1} & \frac{S_{12}}{\Delta_1} \\ \frac{S_{21}}{\Delta_1} & \frac{1-S_{11}}{\Delta_1} \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

上式中 $\Delta_1 = (1-S_{11})(1-S_{22}) - S_{12}S_{21}$, 代(4-13)式入(4-12)式, 并展开, 则可得各 Z 参数值表示式为:

$$Z_{11} = Z_0 \frac{(1+S_{11})(1-S_{22}) + S_{12}S_{21}}{\Delta_1} \quad (4-14)(a)$$

$$Z_{12} = Z_0 \frac{2S_{12}}{\Delta_1} \quad (4-14)(b)$$

$$Z_{21} = Z_0 \frac{2S_{21}}{\Delta_1} \quad (4-14)(c)$$

$$Z_{22} = Z_0 \frac{(1+S_{22})(1-S_{11}) + S_{12}S_{21}}{\Delta_1} \quad (4-14)(d)$$

利用 Z 参量与 Y 参量的变换式, 我们很容易求得用 S 参数表示的 Y 参数表示式:

$$Y_{11} = Y_0 \frac{(1 + S_{22})(1 - S_{11}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}} \quad (4-15)(a)$$

$$Y_{12} = Y_0 \frac{-2S_{12}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}} \quad (4-15)(b)$$

$$Y_{21} = Y_0 \frac{-2S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}} \quad (4-15)(c)$$

$$Y_{22} = Y_0 \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}} \quad (4-15)(d)$$

其他 h 参数值的表示式也可用一般 h 参数与 Z 参数的变换式求得, 根据推得的表示式, 我们在解决微波晶体三极管问题时, 常常也可用一般 Z 参数或 Y 参数的计算方法, 但此时需由测得的 S 参数值, 经由(4-14)或(4-15)式求得所需的 Z 参数或 Y 参数值。但常常由于 S 参数已测得, 此时直接由 S 参数进行

计算很方便, 因而我们需探求直接由 S 参数进行计算的方式方法, 在此种情况下我们需解决在任意负载时的 S 参数表示式。

在一般情况下, 四端网络外接负载为任意阻抗 Z_1 与 Z_2 时, 此

时式(4-1)中的 Z_{11} 、 Z_{12} 、 Z_{21} 、 Z_{22} 不变, 但对 S 参量来讲, 式(4-2)的定义应变化为下列形式:

$$a'_1 = \frac{V_1 + Z_1 I_1}{2 \sqrt{R_e(Z_1)}} \quad (4-16)(a)$$

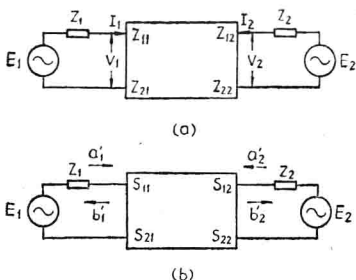


图 4-6 四端网络外接任意负载时的 Z 参量与 S 参量示意图

$$b'_1 = \frac{V_1 - Z_1^* I_1}{2 \sqrt{R_e(Z_1)}} \quad (4-16)(b)$$

$$a'_2 = \frac{V_2 + Z_2 I_2}{2 \sqrt{R_e(Z_2)}} \quad (4-16)(c)$$

$$b'_2 = \frac{V_2 - Z_2^* I_2}{2 \sqrt{R_e(Z_2)}} \quad (4-16)(d)$$

上式中 $R_e(Z_1)$ 与 $R_e(Z_2)$ 代表 Z_1 与 Z_2 阻抗的实部, Z_1^* 与 Z_2^* 代表 Z_1 与 Z_2 的复数共轭值。很显然当 Z_1 与 Z_2 为实数值时, 公式(4-16)转化为公式(4-2), 因而公式(4-16)是更广义的定义, 根据公式(4-16)可求得 $|a'_1|^2$ 、 $|b'_1|^2$ 与 $|a'_1|^2 - |b'_1|^2$ 的表示式如下:

$$|a'_1|^2 = \frac{E_1^2}{4R_e(Z_1)} \quad (4-17)(a)$$

$$|a'_1|^2 - |b'_1|^2 = R_e(V_1^* I_1) \quad (4-17)(b)$$

由上式可见, $|a'_1|^2$ 代表功率源 E_1 的最大交换功率(E_1 源内阻为 Z_1 时, 四端网络得到的最大输入功率); $|a'_1|^2 - |b'_1|^2$ 仍为输入四端网络的功率值, 但在此时情况下, a'_1 与 b'_1 不等于联结功率源与四端网络的传输线上一般情况时的入射波与反射波, 因而虽然我们可以下式定义此时的 S' 参数:

$$b'_1 = S'_{11}a'_1 + S'_{12}a'_2 \quad (4-18)(a)$$

$$b'_2 = S'_{21}a'_1 + S'_{22}a'_2 \quad (4-18)(b)$$

此时的 S'_{11} 、 S'_{12} 、 S'_{21} 、 S'_{22} 的参数值已不能像测量 S_{11} 、 S_{12} 、 S_{21} 、 S_{22} 那样容易用微波测量方法求得, 但是我们可由测得的 S 参数换算求得 S' 参数, 其换算式可如下推算求得。

为了用矩阵进行计算, 我们再定义下列矩阵表示式:

$$[a'] = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} \quad [b'] = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix}$$

$$[S'] = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} \\ S'_{21} & S'_{22} \end{bmatrix} \quad [F'] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{R_e(Z_1)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{R_e(Z_2)}} \end{bmatrix}$$

$$[G'] = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix} \quad [G'^*] = \begin{bmatrix} Z_1^* & 0 \\ 0 & Z_2^* \end{bmatrix}$$

上式中 $[G'^*]$ 代表 $[G']$ 的共轭矩阵, 根据上列表示式, 以及(4-16), (4-18)与(4-1)式, 我们得到下列矩阵方程式:

$$[V] = [Z][I] \quad (4-19)(a)$$

$$[b'] = [S'][a'] \quad (4-19)(b)$$

$$[a'] = [F'] [V + G'I] \quad (4-19)(c)$$

$$[b'] = [F'] [V - G'^*I] \quad (4-19)(d)$$

将(4-19)(c)及(4-19)(d)式代入(4-19)(b)式, 则可得:

$$[F'] [Z - G'^*] [I] = [S'] [F'] [Z + G'] [I] \quad (4-20)$$

由于 I_1, I_2 为任何值时, 上式均成立, 因而得到:

$$[F'] [Z - G'^*] = [S'] [F'] [Z + G'] \quad (4-21)$$

由上式得到 $[S']$ 的表示式为:

$$[S'] = [F'] [Z - G'^*] [Z + G']^{-1} [F']^{-1} \quad (4-22)$$

将(4-12)式 $[Z]$ 的表示式代入上式则可以得到以 S 参数表示的 S' 参数的矩阵表示式为:

$$[S'] = [F'] \{ (1-S)^{-1} (S+1) [G] - [G'^*] \} \\ \{ (1-S)^{-1} (S+1) [G] + [G'] \}^{-1} [F']^{-1} \quad (4-23)$$

经过一定的简化推算手续 (推算过程见附录一), 可得到