基于集成算子的预测和决策方法与应用

JIYU JICHENGSUANZI DE YUCE HE JUECE FANGFA YU YINGYONG

王玉兰　陈华友　著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

基于集成算子的预测和决策方法与应用

王玉兰　陈华友 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安 徽 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

基于集成算子的预测和决策方法与应用/王玉兰,陈华友著. —合肥:安徽大学出版社,2014.7

ISBN 978-7-5664-0793-1

Ⅰ. ①基… Ⅱ. ①王… ②陈… Ⅲ. ①算子—应用—决策学—研究 Ⅳ. ①C934

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 139516 号

基于集成算子的预测和决策方法与应用 王玉兰 陈华友 著

出版发行:北京师范大学出版集团
安徽大学出版社
(安徽省合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn

印　　刷:安徽省人民印刷有限公司
经　　销:全国新华书店
开　　本:170mm×240mm
印　　张:16.5
字　　数:304 千字
版　　次:2014 年 7 月第 1 版
印　　次:2014 年 7 月第 1 次印刷
定　　价:37.00 元
ISBN 978-7-5664-0793-1

策划编辑:李　梅　张明举
责任编辑:张明举
责任校对:程中业
装帧设计:李　军
美术编辑:李　军
责任印制:赵明炎

内容简介

本书主要介绍了近年来国内外学者关于若干信息集结算子的最新研究成果，并给出在预测和决策领域的若干应用。全书共分7章，内容包括常规平均算子，有序加权平均算子，有序加权几何平均算子和诱导有序加权几何平均算子，有序加权调和平均算子和诱导有序加权调和平均算子，区间型有序集成算子，不确定型集成算子，语言信息集成算子及其在组合预测、多属性决策和偏好关系决策等方面的应用。

本书可作为高等院校应用数学、运筹与控制、管理科学与工程、系统工程等专业的高年级本科生和研究生教材或教学参考书，也可供企事业单位、科研院所从事预测和决策的分析人员参考。

序 言

在现实生活中,人们经常利用集成算子把多源输入信息变成一个输出信息,利用输出信息可以进行适当的预测和决策分析。在预测中,由于复杂的社会经济系统面临一个变化迅速的外界环境,从而预测的不确定因素显著增加,若采用传统的单个预测模型进行预测,则存在两个缺陷。一是信息源的不广泛性。实际上,由于每种预测方法利用数据的角度不同,导致利用的数据不尽相同,而不同的数据从不同的角度提供各方面有用的信息,所以在预测的过程中,如果预测误差较大的单项预测方法弃之不用,则很可能造成部分有用的信息丢失。二是模型设定形式的随意性所带来的偏差。若系统的发展趋势呈现非线性,而模型用线性形式来拟合,则以该模型来做预测显然效果不够理想。因此有必要利用集成算子把若干个单项预测模型进行组合,组合预测方法就是在此背景下被提出的。

在多属性决策问题中,也需要集成算子来集结方案在不同属性下的属性值。多属性决策就是对于事先给定的有限个决策方案,根据多个属性准则,决策者根据这些属性去衡量和判断各方案的目标属性值,然后采用某种集成算子,把这若干个属性值转化为该方案的综合评价值,通过比较综合评价值的大小,获得有限个方案的排序结果,从而确定最优方案。

可见,在预测和决策中,集成算子的使用是广泛并有效的。集成算子产生的历史较悠久,古人们已会利用最大或最小算子进行决策。比如,阿基米德证明:在给定周长的条件下,圆所包围的面积为最大,这就是欧洲古代城堡几乎都建成圆形的原因。之后,人们根据需要提出了算术平均算子、几何平均算子、调和平均算子等简单的算子来集结各种信息。随着社会的发展,信息量不断扩大,而各种信息的重要性程度不同,需要引入权重来反映各种信息的重要性程度。于是简单的平均算

子逐渐演变成更加复杂的加权算术平均算子、加权几何平均算子，既考虑信息自身重要性程度又考虑了其位置的重要性程度的组合加权算术平均算子、组合加权几何平均算子等。上个世纪80年代的末期，美国智能专家Yager提出有序加权平均集结算子的概念，并详细探讨了有序加权平均集结算子的性质及其权系数确定的方法。后来，更为广泛的诱导有序加权平均集结算子、广义的诱导有序加权平均集结算子等算子概念相继被提出，且这些算子在预测和决策方面的应用得到了更多学者的深入研究。

目前，信息集成算子的理论研究已经引起学术界的广泛关注。作者近年来一直从事信息集成算子理论及其在预测和决策中的应用研究，并且承担了国家自然科学基金项目(71071002,71371011)，教育部高等学校博士学科点专项科研基金项目(20123401110001)，2013年省学术技术带头人培养资助项目以及安徽省高等学校自然科学基金(KJ2012Z055)等项目，本书大多数内容源于这些项目研究成果，作者感谢这些基金项目对本书的资助。同时本书也引用了国内外学者的部分研究成果，在此，向这些学者一并致谢。

本书共分7章。王玉兰撰写了第1章的§1.1、§1.2、§1.4～§1.10，第2章、第3章的§3.1～§3.3，第4章的§4.1～§4.2，第7章的§7.1～§7.3，陈华友撰写了第1章的§1.3，第3章的§3.4，第4章的§4.3，第5章，第6章，第7章的§7.4～§7.5。全书由王玉兰同志负责统稿和定稿工作。

本书可作为高等学校应用数学、运筹与控制、管理科学和系统工程专业的高年级本科生和研究生的教材，也可作为工程技术人员、管理干部和相关学者的参考书。

在本书的编辑出版过程中，得到了安徽大学出版社的大力支持和帮助，作者在此表示衷心的感谢。

由于作者的学识水平有限，书中难免存在缺点和错误，欢迎同行专家和读者不吝赐教，以便今后修改和完善。

王玉兰　陈华友

2014年1月

目 录

第 1 章

常规平均算子及其应用

§ 1.1　加权算术平均(WAA)算子

1.1.1　WAA 算子的概念

加权算术平均算子(Weighted Arithmetic Averaging Operator)是最常用的一种信息集成算子,它在预测和决策领域有着广泛的应用.

定义 1.1.1　设 $WAA_W:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为 n 元函数,$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为任意数据向量,若

$$WAA_W(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}w_ia_i, \tag{1.1.1}$$

则称函数 WAA_W 是 n 维加权算术平均算子,简称为"WAA 算子",其中 $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$ 是与 WAA_W 有关的加权向量,满足 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$, $w_i\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,n$.

例如,设 $w_1=0.3$, $w_2=0.4$, $w_3=0.2$, $w_4=0.1$,则由定义 1.1.1 得

$$WAA_W(2,4,1,5)=2\times0.3+4\times0.4+1\times0.2+5\times0.1=2.9.$$

1.1.2　WAA 算子的性质

WAA 算子具有如下性质:

性质 1.1.1(单调性)　设$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和$(a_1',a_2',\cdots,a_n')$是任意两个数据向量,且有 $a_i\geqslant a_i'$, $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$,则

$$WAA_W(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geqslant WAA_W(a_1',a_2',\cdots,a_n'). \tag{1.1.2}$$

证明:由定义 1.1.1 知

$$WAA_W(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum_{i=1}^{n} w_i a_i, \tag{1.1.3}$$

$$WAA_W(a_1',a_2',\cdots,a_n')=\sum_{i=1}^{n} w_i a_i', \tag{1.1.4}$$

因为 $a_i \geqslant a_i'$, $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$,且 $w_i\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,n$,所以有

$$\sum_{i=1}^{n} w_i a_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} w_i a_i',$$

即 $WAA_W(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geqslant WAA_W(a_1',a_2',\cdots,a_n')$. 证毕.

性质 1.1.2(幂等性) 设$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是任一数据向量,若对任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, $a_i=a$,则有

$$WAA_W(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a. \tag{1.1.5}$$

证明:因为 $a_i=a$,对任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,且注意到 $\sum_{i=1}^{n} w_i=1$, $w_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$,所以有

$$\sum_{i=1}^{n} w_i a_i = a\sum_{i=1}^{n} w_i = a.$$

由式(1.1.1)知 $WAA_W(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a$. 证毕.

性质 1.1.3(介值性) 设$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是任一数据向量,则

$$\min_i\{a_i\}\leqslant WAA_W(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant \max_i\{a_i\}. \tag{1.1.6}$$

证明:因为 $\sum_{i=1}^{n} w_i=1, w_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots, n$,则有

$$\begin{aligned}\min_i\{a_i\}&=\min_i\{a_i\}\sum_{i=1}^{n} w_i=\sum_{i=1}^{n} w_i\min_i\{a_i\}\leqslant\sum_{i=1}^{n} w_i a_i\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n} w_i\max_i\{a_i\}=\max_i\{a_i\}\sum_{i=1}^{n} w_i=\max_i\{a_i\}.\end{aligned}$$

证毕.

§1.2 基于 *WAA* 算子的组合预测模型

1.2.1 *WAA* 算子的组合预测模型的建立

实际的预测对象可能是较为复杂的社会经济系统,会有多种错综复杂的因素对其产生影响. 有些是基本因素,有些是偶然因素. 预测者

常常对同一预测问题在不同的假设条件下，采用不同的单项预测方法建立多种预测模型，然后按照统计假设检验从众多的预测方法中选择结果最好的一个，而排除了其他单项预测方法. 这不是提高预测精度的最佳办法.

Bates 和 Granger[1] 首次提出一个合理的做法，即综合考虑各单项预测方法的特点，将不同的单项预测方法进行组合，提出组合预测方法的概念. 最近十几年，国内预测学界也非常重视组合预测方法的研究，取得了一系列的研究成果[2-4]. 所谓组合预测就是设法把不同的预测模型组合起来，综合利用各种预测方法所提供的信息，以适当的加权平均算子集成各个单项预测结果得到组合预测模型. 组合预测最关心的问题就是如何求出加权平均系数，使得组合预测模型更加有效地提高预测精度.

设对同一预测对象的某个指标序列为 $\{x_t, t=1,2,\cdots,N\}$，存在 m 种单项预测方法对其进行预测，设第 i 种单项预测方法在第 t 时刻的预测值为 $x_{it}, i=1,2,\cdots,m, t=1,2,\cdots,N$，称 $e_{it}=(x_t-x_{it})$ 为第 i 种单项预测方法在第 t 时刻的预测误差.

设 $l_1,l_2,\cdots,l_m$ 分别为 m 种单项预测方法的加权算术平均系数，它应满足

$$l_1+l_2+\cdots+l_m=1, \tag{1.2.1}$$

令

$$\hat{x}_t=l_1x_{1t}+l_2x_{2t}+\cdots+l_mx_{mt}, \tag{1.2.2}$$

称 $\hat{x}_t$ 为 x_t 的组合预测值.

设 e_t 为组合预测在第 t 时刻的预测误差，则有

$$e_t=x_t-\hat{x}_t=\sum_{i=1}^{m} l_ie_{it}. \tag{1.2.3}$$

设 S_1 表示组合预测误差平方和，则有

$$S_1=\sum_{t=1}^{N}\mathrm{e}_t^2=\sum_{t=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{m} l_ie_{it}\right)^2=\sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_il_je_{it}e_{jt}. \tag{1.2.4}$$

因此以预测误差平方和最小化为准则的线性组合预测模型表示为：

$$\begin{aligned}&\min S_1=\sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_il_je_{it}e_{jt},\\&\text{s. t.}\quad \sum_{i=1}^{m} l_i=1.\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

记

$$\boldsymbol{L}=(l_1,l_2,\cdots,l_m)^T,\quad \boldsymbol{R}=(1,1,\cdots,1)^T,\quad \boldsymbol{e}_i=(e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{iN})^T,$$

则 $\boldsymbol{L}$ 表示组合预测加权系数列向量,$\boldsymbol{R}$ 表示元素全为 1 的 m 维列向量,$\boldsymbol{e}_i$ 表示第 i 种单项预测方法的预测误差列向量.

令

$$E_{ij}=\boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{e}_j=\sum_{t=1}^{N}\boldsymbol{e}_{it}\boldsymbol{e}_{jt},\quad i,j=1,2,\cdots,m,$$

则当 $i\neq j$ 时,E_{ij} 表示第 i 种单项预测方法和第 j 种单项预测方法的预测误差的协方差,当 $i=j$ 时,E_{ii} 表示第 i 种单项预测方法的预测误差的平方和.

再令 $\boldsymbol{E}=(E_{ij})_{m\times m}$,$\boldsymbol{E}$ 表示 $m\times m$ 的方阵,$\boldsymbol{E}$ 称为组合预测误差信息矩阵.

定理 1.2.1 假定 $m(m<N)$种单项预测方法的预测误差向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m$ 是线性无关的,则组合预测误差信息矩阵 E 为正定矩阵.

证明:记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m)$,则

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1^T\\ \boldsymbol{e}_2^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_m^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1^T\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1^T\boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_1^T\boldsymbol{e}_m\\ \boldsymbol{e}_2^T\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2^T\boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_2^T\boldsymbol{e}_m\\ & \vdots & & \\ \boldsymbol{e}_m^T\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_m^T\boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_m^T\boldsymbol{e}_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}.$$

所以 $\boldsymbol{E}$ 为对称矩阵,记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$. 若 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. 否则,存在不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$,使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1\,e_1+x_2\,e_2+\cdots+x_m\,e_m=\boldsymbol{0}.$$

此与向量组$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m$ 是线性无关的矛盾!

当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时,二次型$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$,所以二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型. 即组合预测误差信息矩阵 $\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵. 证毕 .

定理 1.2.1 表明在预测误差向量组$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m$ 是线性无关的条件下,组合预测误差信息矩阵 $\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵.

在上述记号下,有

$$S_1=\sum_{t=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}l_il_je_{it}e_{jt}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[l_il_j\left(\sum_{t=1}^{N}e_{it}e_{jt}\right)\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}[l_il_jE_{ij}]=\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{L},\tag{1.2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m}l_i=\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{L}.\tag{1.2.7}$$

所以式(1.2.5)也可以表示成矩阵形式

$$\begin{aligned}&\min S_1 = \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{L},\\&\text{s. t. } \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{L}=1.\end{aligned}\tag{1.2.8}$$

1.2.2　*WAA* 算子的组合预测模型的解的讨论

最优线性组合预测模型有如下组合预测加权系数的计算公式.

定理 1.2.2　假定 $m(m<N)$ 种单项预测方法的预测误差向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m$ 是线性无关的,则模型(1.2.7)的最优解和目标函数最优值为

$$\boldsymbol{L}=\frac{\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{R}},\quad S_1=\frac{1}{\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{R}}.\tag{1.2.9}$$

证明:这是一个条件极值问题,构造 Lagrange 函数:

$$F(\boldsymbol{L},\lambda)=\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{L}+\lambda(\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{L}-1),$$

根据极值的必要条件,则有:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(\boldsymbol{L},\lambda)}{\partial \boldsymbol{L}}=2\boldsymbol{E}\boldsymbol{L}+\lambda\boldsymbol{R}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial F(\boldsymbol{L},\lambda)}{\partial \lambda}=\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{L}-1=0.\end{cases}\tag{1.2.10}$$

由定理 1.2.1 知,组合预测误差信息矩阵 $\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵,所以 $\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵,求解上述方程组(1.2.10),则有驻点:

$$\boldsymbol{L}=\frac{\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{R}},$$

因为模型(1.2.8)的目标函数 $S_1=\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{L}$ 的 Hesse 矩阵

$$H(\boldsymbol{L})=\left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial l_i\partial l_j}\right)_{m\times m}=\boldsymbol{E},$$

且 $\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵 . 由条件极值的问题的二阶充分条件知,模型(1.2.8)的驻点即为最优解. 再把最优解代入到目标函数中,则有:

$$S_1=\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{L}=\left(\frac{\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{R}}\right)^T\boldsymbol{E}\left(\frac{\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{R}}\right)=\frac{1}{\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{R}},$$

证毕.

若利用(1.2.9)来计算组合预测加权系数,则可能出现加权系数为负的情况. 在预测实践中,负的组合预测加权系数的解释在学术界尚未取得一致意见,因此有必要考虑非负权系数的组合预测模型. 这就要在模型(1.2.8)中增加一个非负约束条件,即为如下最优化模型

$$\min S_2 = \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{L},$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{L}=1,\\ \boldsymbol{L}\geqslant\boldsymbol{0},\end{cases} \tag{1.2.11}$$

上式(1.2.11)为一个非线性规划问题.对于该问题有如下结论.

定理 1.2.3 假定 m ($m<N$)种单项预测方法的预测误差向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m$ 是线性无关的,则非负权系数的组合预测模型(1.2.11)的可行域 $D=\{\boldsymbol{L}\,|\,\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{L}=1,\ \boldsymbol{L}\geqslant\boldsymbol{0}\}$ 为凸集.

证明:设 $\forall \boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{L}_2\in D$,由可行域的定义知

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{L}_1=1,\quad \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{L}_2=1,\quad \boldsymbol{L}_1\geqslant\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{L}_2\geqslant\boldsymbol{0}.$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^T(\lambda\boldsymbol{L}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{L}_2)&=\lambda\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{L}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{L}_2\\ &=\lambda+(1-\lambda)=1,\quad \forall\lambda\in[0,1],\end{aligned}$$

且 $\lambda\boldsymbol{L}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{L}_2\geqslant\boldsymbol{0}$,所以可行域 D 为凸集.证毕.

由于 m 种单项预测方法的预测误差向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m$ 是线性无关的,由定理 1.2.1 知组合预测误差信息矩阵 $\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵,且模型(1.2.11)的目标函数 $S_2=\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{L}$ 的 Hesse 矩阵为正定矩阵,所以目标函数 S_2 是可行域 D 上的严格凸函数.

模型(1.2.11)实际上为一个二次凸规划问题.由二次凸规划可知,Kuhn-Tucker 条件是其最优解的充要条件.模型(1.2.11)的 Kuhn-Tucker 条件可表示为

$$\begin{cases}2\boldsymbol{E}\boldsymbol{L}-\lambda\boldsymbol{R}-\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{L}=1,\\ \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{L}=0,\\ \boldsymbol{L}\geqslant\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{U}\geqslant\boldsymbol{0},\end{cases} \tag{1.2.12}$$

其中 $\boldsymbol{U}=(u_1,u_2,\cdots,u_m)^T$ 是与非负组合预测权系数向量 $\boldsymbol{L}$ 所对应的 Kuhn-Tucker 乘子,u_i 与 l_i 不能同时为基变量,λ 是与约束条件 $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{L}=1$ 所对应的 Lagrange 乘子.

由于 λ 无非负约束,可令:$\lambda=\lambda_1-\lambda_2$,其中 $\lambda_1,\lambda_2\geqslant0$,因此引入人工变量 v 可构造如下线性规划模型

$$\min v,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2\boldsymbol{E}\boldsymbol{L}-(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{R}-\boldsymbol{U}=0,\\ \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{L}+v=1,\\ \boldsymbol{L}\geqslant\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{U}\geqslant\boldsymbol{0},\\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ v\geqslant0,\end{cases} \tag{1.2.13}$$

解此线性规划模型即可获得最优的非负组合预测权系数向量.

1.2.3　实例分析

现有农村居民储蓄存款余额的数据,文献[5]采用最小二乘法和三次指数平滑法对其进行了预测,居民储蓄存款余额的实际观测值 x_t 和两种不同预测方法的预测值 x_{1t}, x_{2t},具体见表 1.2.1 所示.

表 1.2.1　农村居民储蓄存款余额实际值和两种单项预测方法的预测值

t	x_t	x_{1t}	x_{2t}
1	11.49	18.47	10.03
2	13.06	14.54	11.23
3	15.34	12.84	15.24
4	20.58	13.28	18.67
5	23.28	16.15	27.78
6	26.46	21.16	26.36
7	27.33	28.40	29.67
8	34.22	37.87	27.40
9	40.19	49.58	42.73
10	53.37	63.53	47.36
11	77.79	79.00	71.00
12	100.63	98.12	109.32

根据误差向量的计算公式,可得两种单项预测方法的预测误差列向量 e_1, e_2,具体见表 1.2.2 所示.

表 1.2.2　两种单项预测方法的预测误差列向量

t	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$
1	−6.98	1.46
2	−1.48	1.83
3	2.5	0.1
4	7.3	1.91
5	7.13	−4.5
6	5.3	0.1
7	−1.07	−2.34
8	−3.65	6.82
9	−9.39	−2.54
10	−10.16	6.01
11	−1.21	6.79
12	2.51	−8.69

根据定义，可以计算获得组合预测误差信息矩阵 $\boldsymbol{E}$ 为：

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 403.007 & -119.8892 \\ -119.8892 & 245.5785 \end{pmatrix},$$

将上述结果代入式(1.2.8)，整理后得到最优化模型如下：

$$\min S(l_1,l_2)=403.007l_1^2-239.7784l_1l_2+245.5785l_2^2,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} l_1+l_2=1, \\ l_1,l_2\geqslant 0, \end{cases} \tag{1.2.14}$$

先不考虑非负性，由定理 1.2.2 可得 *WAA* 算子的组合预测模型的最优解为：

$$\boldsymbol{L}=\frac{\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{R}}=\begin{pmatrix} 0.41139 \\ 0.58861 \end{pmatrix},$$

即：

$$l_1=0.41139,\quad l_2=0.58861.$$

显然，上述解均满足非负性，从而也是给出的模型(1.2.14)的最优解. 因此，基于 *WAA* 算子的农村居民储蓄存款余额的组合预测模型为

$$\hat{x}_t=0.41139x_{1t}+0.58861x_{2t},\quad t=1,2,\cdots,12.$$

1.2.4 预测效果评价的指标体系

预测的精确性就是预测的准确度，它与预测的误差密切相关. 为了反映组合预测效果的好坏，本节采用以下几种形式的常用的误差指标度量组合预测的准确度.

(1) 预测误差平方和(*SSE*)

$$SSE=\sum_{t=1}^{N}(x_t-\hat{x}_t)^2. \tag{1.2.15}$$

(2) 均方误差(*MSE*)

$$MSE=\frac{1}{N}\sqrt{\sum_{t=1}^{N}(x_t-\hat{x}_t)^2}. \tag{1.2.16}$$

(3) 平均绝对误差(*MAE*)

$$MAE=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}|x_t-\hat{x}_t|. \tag{1.2.17}$$

(4) 平均绝对百分比误差(*MAPE*)

$$MAPE=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left|\frac{x_t-\hat{x}_t}{x_t}\right|. \tag{1.2.18}$$

(5) 均方百分比误差($MSPE$)

$$MSPE=\frac{1}{N}\sqrt{\sum_{t=1}^{N}\left[(x_t-\hat{x}_t)/x_t\right]^2}. \qquad (1.2.19)$$

运用 WAA 算子的组合预测模型对农村居民储蓄存款余额进行组合预测,为检验组合预测效果的好坏,表 1.2.3 给出了上述的两种单项预测方法和 WAA 算子的组合预测模型的预测误差的精度分析.

表 1.2.3　两种单项预测模型和 WAA 算子的组合预测模型的误差指标

预测指标方法	最优权系数	SSE	MSE	MAE	$MAPE$	$MSPE$
最小二乘法		401.56	1.67	4.88	0.1959	0.0731
三次指数平滑法		245.58	1.30	4.59	0.0998	0.0334
组合预测模型	$l_1^*=0.41139$	94.89	0.81	2.34	0.0791	0.0283
	$l_2^*=0.58861$					

从表 1.2.3 可以看出:对于最小二乘法和三次指数平滑法来说,其 5 种预测误差指标 SSE、MSE、MAE、$MAPE$、$MSPE$ 均显著地大于 WAA 算子的组合预测模型相应的误差指标,这表明最优组合预测方法是优于单项预测方法的.

§1.3　基于 WAA 算子的多属性决策模型

多目标决策(Multiple Criteria Decision Making,简写为 MCDM)是根据多个目标准则来比较、排序多个方案,从中选择出一个或几个方案的决策过程.多目标决策可分为两类,一类是多属性决策(Multiple Attribute Decision Making,简写为 MADM),另一类是多目标优化决策(Multiple Objective Decision Making,简写为 MODM).多属性决策就是对于给定的选择方案(离散、有限),决策者根据一组目标准则去衡量和判断出各方案的目标属性值,进而采用某种决策准则比较各方案,从中得出各方案的排序(或优先等级)结果.

多属性决策包括以下基本要素:

(1) 决策者是直接或间接地比较或排序方案价值,并从中选定一方案为实施方案的人.决策者可以是一个人,也可以是一个团体.

(2) 目标准则包括目标属性、目标优化和目标达成三个方面.属性