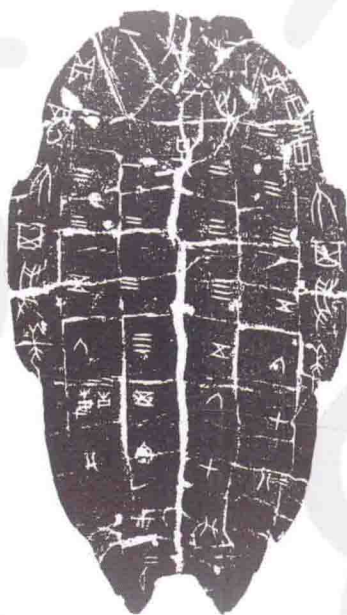


中国科协三峡科技出版资助计划

商周数算四题

张图云 著



合9775正



中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

中国科协三峡科技出版资助计划

商周数算四题

张图云 著

中国科学技术出版社

· 北 京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

商周数算四题/ 张图云著. —北京: 中国科学技术出版社, 2013. 12

(中国科协三峡科技出版资助计划)

ISBN 978-7-5046-6517-1

I. ①商… II. ①张… III. ①古算经-中国-商周时代
IV. ①O112

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 320145 号

总 策 划 沈爱民 林初学 刘兴平 孙志禹
项 目 策 划 杨书宣 赵崇海
出 版 人 苏 青
编辑组组长 吕建华 许 英 赵 晖

责任编辑 李 红 余 君
责任校对 赵丽英
印刷监制 李春利
责任印制 张建农

出 版 中国科学技术出版社
发 行 科学普及出版社发行部
地 址 北京市海淀区中关村南大街 16 号
邮 编 100081
发行电话 010-62103349
传 真 010-62103166
网 址 <http://www.cspbooks.com.cn>

开 本 787mm×1092mm 1/16
字 数 345 千字
印 张 17
版 次 2014 年 2 月第 1 版
印 次 2014 年 2 月第 1 次印刷
印 刷 北京华联印刷有限公司

书 号 978-7-5046-6517-1/O · 175
定 价 72.00 元

(凡购买本社图书, 如有缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责调换)

总 序

科技是人类智慧的伟大结晶，创新是文明进步的不竭动力。当今世界，科技日益深入影响经济社会发展和人们日常生活，科技创新发展水平深刻反映着一个国家的综合国力和核心竞争力。面对新形势、新要求，我们必须牢牢把握新的科技革命和产业变革机遇，大力实施科教兴国战略和人才强国战略，全面提高自主创新能力。

科技著作是科研成果和自主创新能力的重要体现形式。纵观世界科技发展历史，高水平学术论著的出版常常成为科技进步和科技创新的重要里程碑。1543年，哥白尼的《天体运行论》在他逝世前夕出版，标志着人类在宇宙认识论上的一次革命，新的科学思想得以传遍欧洲，科学革命的序幕由此拉开；1687年，牛顿的代表作《自然哲学的数学原理》问世，在物理学、数学、天文学和哲学等领域产生巨大影响，标志着牛顿力学三大定律和万有引力定律的诞生；1789年，拉瓦锡出版了他的划时代名著《化学纲要》，为使化学确立为一门真正独立的学科奠定了基础，标志着化学新纪元的开端；1873年，麦克斯韦出版的《论电和磁》标志着电磁场理论的创立，该理论将电学、磁学、光学统一起来，成为19世纪物理学发展的最光辉成果。

这些伟大的学术论著凝聚着科学巨匠们的伟大科学思想，标志着不同时代科学技术的革命性进展，成为支撑相应学科发展宽厚、坚实的奠基石。放眼全球，科技论著的出版数量和质量，集中体现了各国科技工作者的原始创新能力，一个国家但凡拥有强大的自主创新能力，无一例外地反映到其出版的科技论著数量、质量和影响力上。出版高水平、高质量的学术著

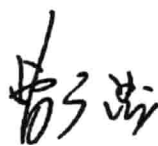
作，成为科技工作者的奋斗目标和出版工作者的不懈追求。

中国科学技术协会是中国科技工作者的群众组织，是党和政府联系科技工作者的桥梁和纽带，在组织开展学术交流、科学普及、人才举荐、决策咨询等方面，具有独特的学科智力优势和组织网络优势。中国长江三峡集团公司是中国特大型国有独资企业，是推动我国经济发展、社会进步、民生改善、科技创新和国家安全的重要力量。2011年12月，中国科学技术协会和中国长江三峡集团公司签订战略合作协议，联合设立“中国科协三峡科技出版资助计划”，资助全国从事基础研究、应用基础研究或技术开发、改造和产品研发的科技工作者出版高水平的科技学术著作，并向45岁以下青年科技工作者、中国青年科技奖获得者和全国百篇优秀博士论文获得者倾斜，重点资助科技人员出版首部学术专著。

我由衷地希望，“中国科协三峡科技出版资助计划”的实施，对更好地聚集原创科研成果，推动国家科技创新和学科发展，促进科技工作者学术成长，繁荣科技出版，打造中国科学技术出版社学术出版品牌，产生积极的、重要的作用。

是为序。

中国长江三峡集团公司董事长



2012年12月

前 言



从中国已有的考古材料和文字记录来看，在历史悠久传承不绝的华夏文明中，商周时期的文化知识已有相当程度的发展，对中国古代传统文化的形成有着极为深远的影响。学者们从社会生活的各个方面对商周文化展开了广泛的研究，取得了很多成果，本书则关注于这段历史时期中数学知识的一些实际应用。从数学知识的传承积累与应用形态的层面上来看，商周时期仍处于比较早的发展阶段。当时生产和社会活动的规模有限，社会生活的内容没有后世那样丰富，发展演变的速度也不像后世那样迅速；相应地，商周先民对数学知识的掌握及应用还没有太高的要求，人们所具有的数学知识也相对简单，因而在研究中国古代数学史的不少论著中，与商周时期数学发展状况有关的内容并不复杂，通常只涉及正整数下最基本的四则运算，从而留下了一些有待探讨的空间。

作为先秦数学的一部分，出现于商周时期的数学知识虽然大体上处于一个发展层次相对较低的状态，但是，要想展开全面的或具体的研究却并不容易。由于年代久远，得以保存下来且有断代或考证依据的与商周时期的数学知识有关材料过于稀少和零散，这就给学者们的研究带来了具体的困难。借助于甲骨文的发现与释读，殷商时期的情况要好一些，相比之下，西周时期的材料就显得很少，从而对一些可能出现的进展难以做出合理的判断。事实上，在先秦数学中，关于商周时期数学发展及应用状况的

研究成果虽已颇多，但仍存在不少尚待解决的问题。这种局面的改变，除了有待更多考古材料的发现之外，还寄望于对已有材料做进一步的梳理、挖掘和研讨。

以学者们的研究成果为基础，通过对考古发现和古籍文献中相关材料的观察与解读，笔者发现，商周时期人们掌握的数学知识尽管相对简单，却已经在承续积累的基础上取得了一定的进展。而且，在几个数算应用实例之中，确实存在着一些与先秦数学有关且值得探讨的问题，有的还可以做相应的延伸。于是，便有了本书述及的种种想法与结果。

本书的内容主要是围绕着殷墟甲骨文中的记数和历纪，以及《周易》占筮术中使用的卦象和揲算而展开，笔者便将它们分设为四个数算方面的课题。这里的“数算”是将数量记录、组合排序、求数计算和算法创制合在一起的简称，与中国古代的“数术”、“术数”、“历术”、“推步”、“周易数理”等都不是一回事。考虑到这四个课题出现于商周时期，涉及一些古代数学知识的具体应用，不妨将它们合在一起称为“商周数算四题”，本书的书名也因此而得。

大致说来，在对这四个课题展开研讨的过程中，会遇到与这四个课题多少有点关联的题目或者分支课题，于是形成了不同的处理方式。一是从数算的角度对部分材料进行观察和整理；二是将部分与数算有关的题目搜寻出来试做释读解算或分析讨论；三是以部分材料或数算题目为背景，对相关的分支课题作了具有延伸性质的探讨。

从这些题目或分支课题中得到的结果也许能够有一点用处：为先秦数学补充数算实例、为殷历研究增加数算参考、为《周易》研究再添数算视角。

应当说明，由于引以为据的主要是殷墟甲骨文中的材料和《周易》占筮术中使用的卦象和揲算，从历史跨度上看，这四个课题大体上形成于从殷商到西周这一段，并非完整的商周时期。因此，所谓“商周数算四题”，实际上是“殷商和西周时期的四个数算课题”的简化说法。

还应当说明，本书使用了若干形成于后世的词汇、概念、方法和理论，然而并无商周先民已经具有了这些认识或能力的含义。比如，在商周时期尚无“数学”、“组合数学”、“十进制记数法”、“算法创制”、“全举验证”之类的理论、方法及词汇；甲骨文中也没有“干支”、“重月”、“闰月”之类的词语；而在讨论揲算结果数出现机会的多少时用到了“随机”、“均衡”、“概率”等西周时期尚未形成的概念和算法。但是，本书全然没有殷周古人已在用这类词汇和方法，或建立了这些概念和理论的意思。尤其是在涉及殷历和揲算的题目中，用到了一些天文学和数学中的数据和理论，但本书都是将它们用作讨论的依据，绝对不是想要说明古人曾经掌握了这些知识。

本书的观察与讨论虽以商周时期的几个数算课题为主，但也涉及中国古代文化方面的部分内容。特别是关于甲骨文和《周易》的研究，以及关于中国古代数学和历法的研究，从来都是专门的学问，时至今日，已经累积了大量的文献和著作，其中的不少结论已成学界共识，可以为本书的撰写提供丰富的材料。但是笔者学力甚浅，阅读面也非常有限，即便囿于“数算四题”一隅，仍有许多有关的论文及原著未能一一习读，因而对学者们所作的贡献，即使有知，往往也只是触及一些片段而缺乏全面的了解。由此可见，本书对已有材料和成果的引用并不完备，对一些相关背景情况的介绍也谈不上综述。尽管如此，仍然要说，正是学者们丰硕的研究成果，为笔者的学习和思考提供了基本的条件。

另一方面，由于在史学研究中存在着用今日的观点来编织历史的现象，因而对于涉及数学史的内容，笔者将依循目前确认的考古证据和学者们的研究成果展开讨论，希望不会形成类似的歧解。实际上，恰当地应用一些后出的知识、方法和理论来观察讨论本书所涉及的课题，通过具体数算实例的解读，从而对商周时期的数学发展状况和应用形态获得相应的了解，进而获得一些启发，并提出新的或可供参考的见解，正是笔者尝试着去做的事情。当然，鉴于能力有限，错谬之处在所难免，衷心希望得到读者的指正。

二

本书把要探讨的四个数算课题按四个章次逐一展开，各章的主要内容如下：

第1章“从甲骨文看殷商时期的记数与计算”。在这一章中，笔者对殷墟甲骨文中的记数文字进行了梳理和分类，发现这些数字符号的基本功能是用以记录事物的数量和排序，尤其是在记录多位数时，虽然遵循了十进制表数法的基本规律，可以无歧义地表数，但存在着没有表示数“0”的字符，以及尚无规范的表数方式等缺乏数学规范性的问题，因而不能顺利地将这样的表数形式用于笔算中的记数。这种应用形态表明，刻辞中的数字应当属于记录数量或排序的文字符号。作为一种表数方式，可以认为这些数字是至迟形成于商代的数学成果，但不宜直接地视之为数学符号。这就引出了殷人用什么方式计数的问题。也许，除了点数和心算之外，殷人使用笔算的可能性很小，而采用早期筹算的可能性则较大。这样看来，殷商时期很有可能并行使用着两套功能不同的十进制下的记数符号，一套是形如甲骨金石文字中的数字，它们是用以记录事物数量或排序的文字符号，另一套是早期筹算中用于表数的筹符数码，这些筹符应当具有数学符号的性质。

第2章“关于甲骨文所载殷历的数算观察”。在这一章中，笔者在介绍一些学者对殷历的研究成果时，也对他们在殷历解读中的一些结论和推测提出了自己的计算结果和看法。当然，与学者们对殷历的大量研究相比，本书所涉非常有限，只是对年月日这三种基本的时序对象作了点滴的观察与讨论。结果表明，年月日这三种各自独立的时间计量单位在殷历中的协调配置、时序安排和时长计算诸方面都体现了数学知识的应用，而干支序列则是组合排序方面的一项发明。可以说，殷历的形成不仅是商代的天文历法成就，同时也是商代的数学成就。

以学者们的研究为基础，若再从数算的角度探讨刻辞中的历纪关系，既便于解读殷历，又利于观察数算知识在殷历中的应用形态，因而本书用一些简单的数算方法对刻辞历纪的某些细节作了核算。例如，在殷人用于支纪日的方式下引入“顺序同于日”的概念之后，在某些方面将更便于历日的分析计算和作出相应的判断。本书在 2.3.5.4 和 2.4.4.2 分别指出，有的学者依据《甲骨文合集》第 26682 片、第 37893 片以及第 26643 片甲骨上记录的辞文，得出殷历中可能存在“连小月”及“年中连闰”的结论，都与历日错算有关，因而由此得出的结论并不成立。笔者还从系统误差的角度讨论了一些较为特殊的历纪，得出在观象授时框架下，殷历中可能出现了早期历算的判断；不过，殷人的计算能力有限，他们所能预设的历序需要依据观象结果进行适时的调校，因而商王所颁殷历覆盖的年数不会太多。笔者估计，殷人已能使殷历的置月和置年在一二十年内大致合于天象，但是还达不到在更长的时段或数十年内稳定使用的程度。就发展状况而言，殷历处于由观象授时发展演化到历算置历的过渡阶段，可称为“观象置历”阶段（参看本书 2.4.5）。

第 3 章“关于《周易》卦象的数算观察”中，在这一章中，笔者就定型于西周时期的六十四卦做了观察与讨论，认为与殷历中的干支序列类似，《周易》卦象的构建也是中国古代关于组合问题的应用例证。从数学的角度观察，用递推方式描述八卦的构成和用八卦相重的方式描述六十四卦的构成，以及相重成卦时用“两之”描述卦象画数的加法计算，用“生”与“重之”描述卦象卦数的乘法计算，都是符合数学规律的做法，体现出古代占筮家们所具有的独特的数学智慧。包括传统数学在内，在中国古代传统文化的形成过程中，《周易》卦象是一项具有不可忽视的影响的发明。

第 4 章“关于《周易》揲算的数算观察”。在这一章中，笔者对《周易》占筮术用于起卦的揲算进行了探讨，发现《周易》揲算不仅是一则没有数学瑕疵的特殊真命题，而且是一套通过经验归纳构建而成的非常完整的程序化的专用算法。就数学思想的演进而言，专用算法的创制，是西周

占筮家们（他们还称得上是当时的数学家）在殷商时期积累起来的数学知识的基础上作出的重要发展。在西周时期的社会生活中，《周易》占筮术是一种很重要的占测人事吉凶的方法，因而《周易》揲算及卦象的发明，是我们目前所知的在西周时期有着一定影响的数学成果。

如果将《周易》揲算视为数学上的一则特殊真命题，便可以延伸出揲算模式下一般性命题的构建问题。笔者对这个有着久远渊源或古老背景的数学命题做了一些讨论。得到的结果表明，尽管表述的形式也许并不唯一，但一般性的揲算命题的确是存在的。当然，除了《周易》揲算这一特殊命题来源于西周之外，关于一般性揲算命题的探讨已与西周数算没有直接的联系。不过，在流行于中国古代的传统数学中，这样的命题却与著名的“大衍求一术”有关，而且被有的学者认为是一则长期以来“悬而未决的难题”^[1]。

对于这个命题的构建与证明，本书给出的是最近的结果。其中，关于一般性的参揲策数计算公式（即揲算定理1）的建立，笔者采用了函数构造法，其正确性则是依据多元函数的数学归纳法给出的证明。此外，值得一提的是对同余理论在该命题中的应用做了一些具体的讨论（参看本书4.2.3）。当然，这些努力也不是最后的成果。在学习与探讨的过程中，若能得到读者的指导和帮助，是最令人高兴的事情。

中国科协三峡科技出版资助计划 2012 年第一期资助著作名单

(按书名汉语拼音顺序)

1. 包皮环切与艾滋病预防
2. 东北区域服务业内部结构优化研究
3. 肺孢子菌肺炎诊断与治疗
4. 分数阶微分方程边值问题理论及应用
5. 广东省气象干旱图集
6. 混沌蚁群算法及应用
7. 混凝土侵彻力学
8. 金佛山野生药用植物资源
9. 科普产业发展研究
10. 老年人心理健康研究报告
11. 农民工医疗保障水平及精算评价
12. 强震应急与次生灾害防范
13. “软件人”构件与系统演化计算
14. 西北区域气候变化评估报告
15. 显微神经血管吻合技术训练
16. 语言动力系统与二型模糊逻辑
17. 自然灾害与发展风险

中国科协三峡科技出版资助计划 2012 年第二期资助著作名单

(按书名汉语拼音顺序)

1. BitTorrent 类型对等网络的位置知晓性
2. 城市生态用地核算与管理
3. 创新过程绩效测度——模型构建、实证研究与政策选择
4. 商业银行核心竞争力影响因素与提升机制
5. 品牌丑闻溢出效应研究——机理分析与策略选择
6. 护航科技创新——高等学校科研经费使用与管理务实
7. 资源开发视角下新疆民生科技需求与发展
8. 唤醒土地——宁夏生态、人口、经济纵论
9. 三峡水轮机转轮材料与焊接
10. 大型梯级水电站运行调度的优化算法
11. 节能砌块隐形密框结构
12. 水坝工程发展的若干问题思辨
13. 新型纤维素系止血材料
14. 商周数算四题
15. 城市气候研究中德城市规划中的整合途径比较
16. 管理机理学——管理学基础理论与应用方法的桥梁
17. 心脏标志物实验室检测应用指南
18. 现代灾害急救
19. 长江流域的枝角类

发行部

地址：北京市海淀区中关村南大街 16 号
邮编：100081
电话：010-62103354

办公室

电话：010-62103166
邮箱：kxsxcb@ cast. org. cn
网址：<http://www.cspbooks.com.cn>

目 录

第 1 章 从甲骨文看殷商时期的记数与计算	1
1.1 殷墟甲骨文中的基本数字和进位数字	1
1.2 殷墟甲骨文中的基本数字	3
1.2.1 基本数字的构形	3
1.2.2 关于基本数字的一些观察	4
1.3 殷墟甲骨文中的进位数字	15
1.3.1 进位数字的构形	15
1.3.2 关于进位数字的一些观察	17
1.4 殷墟甲骨文中常见的表数形式	23
1.4.1 表数的析书形式	23
1.4.2 表数的合书形式	24
1.4.3 组合表数方式的多样性	29
1.4.4 小结	38
1.5 殷商时期的计算	39
1.5.1 从殷墟甲骨文中观察到的计算	39
1.5.2 殷商时期可能已经出现早期筹算	47
1.5.3 关于殷商时期的数字和筹符的讨论	52
第 2 章 关于甲骨文所载殷历的数算观察	58
2.1 甲骨文中的殷商历法	58
2.2 殷墟甲骨文中的纪日	61
2.2.1 殷历用昼夜定日长	61

2.2.2	殷历用干支法纪日	68
2.2.3	殷墟甲骨文中的日数计算	74
2.3	殷墟甲骨文中的纪月	80
2.3.1	殷历的纪月方式	81
2.3.2	顺序同干日与月长日数的关系	83
2.3.3	关于月长日数的讨论	85
2.3.4	殷人对月相变化周期的观测	92
2.3.5	关于连大月和连小月的讨论	95
2.4	殷墟甲骨文中的纪年	101
2.4.1	殷人观星象置年并用数序纪年	101
2.4.2	殷历属于阴阳合历的类型	105
2.4.3	殷历的年长日数和一年之内的时段划分	109
2.4.4	殷历的十三月、十四月和重月	118
2.4.5	关于殷历中可能引入了早期历算的讨论	131
2.5	殷商历法中的数算	135
2.5.1	殷历中的记数和计数	135
2.5.2	关于干支序列的讨论	139
2.5.3	干支模式下组合数的计算及组合方案的比较	141
2.5.4	一种求取最小公倍数的方法	145
第3章	关于《周易》卦象的数算观察	146
3.1	《周易》占筮术简介	146
3.1.1	《周易》是一种占筮方法	147
3.1.2	《易经》和《易传》	151
3.2	对《易经》中所用数字的观察	154
3.2.1	由卦象和爻题构成的编码排序体系是一种双重标识	155
3.2.2	《易经》经文中使用的数字	156
3.3	《周易》卦象的构成及排序	159
3.3.1	八卦和六十四卦的卦形和卦名	160

3.3.2	六十四卦的排序	160
3.4	从数学的角度观察卦象	164
3.4.1	中国古代组合数学思想的应用	164
3.4.2	一些数学理论与伏羲先天卦序的联系	168
3.4.3	《周易》卦象在三维空间中的一种点阵形式	173
3.4.4	与卦象有关的几则讨论	177
3.5	河图洛书与揲算和八卦	183
3.5.1	圆点河图与揲算	184
3.5.2	圆点洛书与八卦	186
第4章	关于《周易》揲算的数算观察	190
4.1	《周易》揲算简介	190
4.1.1	《易传·系辞上》记载的《周易》揲算	191
4.1.2	孔颖达和朱熹对揲算的疏注	196
4.2	揲算研究概况	198
4.2.1	关于特殊性揲算命题的研究	199
4.2.2	关于一般性揲算命题的研究	201
4.2.3	由同余理论得到的分揲定理1和分揲定理2	205
4.3	一般性揲算命题的构建	209
4.3.1	用函数构造法建立的揲策定理1和揲算定理1	209
4.3.2	用函数构造法建立的揲策定理2和揲算定理2	215
4.3.3	揲算实例和算例	218
4.3.4	用函数构造法建立的不挂1的揲算命题	221
4.3.5	一般性揲算命题的扩展形式	222
4.4	揲算结果数及爻符和卦象的出现概率	224
4.4.1	揲算结果数6、7、8、9的出现概率	224
4.4.2	爻符和卦象的出现概率	229
4.5	西周时期已经出现程序化的专用算法设计	234
4.5.1	《周易》揲算是程序化的专用算法设计	234

4.5.2 《周易》揲算体现的数学思想与数学方法	238
结语	244
参考文献	246
索引	249
后记	252

第1章 从甲骨文看殷商时期的记数与计算

基于学者们对殷墟甲骨刻辞中各种文字符号的识读，本章对其中的表数文字做了一些梳理、观察和探讨。

1.1 殷墟甲骨文中的基本数字和进位数字

在对西安半坡和姜寨等新石器时期遗址出土的一些陶器上的刻画符号进行研究之后，学者们认为形如 X A + X I II 的符号应是当时的数字，并释为五、六、七、八、十和二十^[2]（其中“A”见于文献[4]第130页）。类似地，学者们还将青海乐都柳湾新石器时期遗址出土的彩陶上形如 — = ≡ ≡ ≡ A + X I II 卍 的彩绘符号释为数字一、二、三、四、五、六、七、八、十、二十和四十^[3]。学者们对这类数字的识读表明，流行于中国古代的十进制记数法很可能初创于这段历史时期。

结合甲骨文中的数字，学者们进一步地指出：“从西安半坡、姜寨到青海柳湾、山东城子崖等新石器时代中晚期遗址中都出土了数字符号，最后基本上和后来甲骨文中的数目字衔接，大体上能看出字形演变的脉络。”^[4]

大约从1899年（清光绪二十五年）开始，引起近代学者们关注和研究的殷墟甲骨文被陆续地发现和著录。研究的结果表明，这些契刻着文字符号的龟版骨片是商王盘庚将都城迁殷之后的遗物。按照2000年11月9日公布的夏商周断代工程阶段成果，公元前1600～公元前1046年为商代。其中，公元前1600～公元前1300年为商前期，而从公元前1300年盘庚迁殷时起，到公元前1046年周武王战胜商纣王止，为商后期，史称殷商时期。所以，河南安阳殷墟出土的有字甲骨是殷商时期大约250余年内的文化遗存。

占卜术在殷商时期极为流行，这是一种依据甲骨片材上因炙灼坼裂而成的纹理占测天意的做法。殷人还将与占卜事宜有关或无关的一些内容刻记于卜甲、卜骨之上并窖藏起来，结果给今人留下了丰富的辞文记录。百余年来，学者们在殷墟甲骨文的发