# 测度论与概率论基础

## 上册

（北京师范大学数学系概率教研室编）

新乡师范学院数学系翻印

一九七九年元月

# 前　　言

这份讲义是北京师范大学1962年～1965年概率论选科用的教材．它的内容与M·Loeve著的Probability Theory一书的前四节分大致相同．它将概率论的直观背景与测度理论紧密地结合起来．叙述详尽，论证严谨，对于概率论教师以及要学概率论近代基础的高年级学生说来是一份很好的学习和参考材料，因此我们翻印出来．

新乡师院数学系

1978.11

# 目 录

# 概率论的基本概念

## 第一章 概率的概念

### §1 引言

在这一章中，我们将介绍概率的概念及其基本性质，首先将说明概率这个概念的实际来源及其应该具有的性质，然后给出概率的数学定义，并引进测度的概念，作为讨论概率论的基础的工具，而在这一节，则从实际的一般现象来直观地描述概率，并且探讨它所应该具有的基本性质。

§1.1 统计数学的对象及概率概念的实际意义．人类生存于客观物质世界之中，而物质是在不断运动发展变化的，为了人类的幸福，必须认识世界，并从而改造世界。毛主席告诉我们"人类认识物质，就是认识物质的运动形式，因为除了运动的物质以外，世界上什么也没有，而物质的运动则必取一定的形式，对于物质的每一种运动形式，必须注意它和其他各种运动形式的共同点，但是，尤其重要的，成为我们认识事物的基础的东西，则必须注意它的特殊点，就是说注意它和其它运动形式的质的区别，只有注意了这一点，才有可能区别事物，任何运动形式其内部都包含着本身特殊的矛盾，这种特殊的矛盾，就构成一事物区别于它事物的特殊的本质"。又说："科学研究的区分就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性，因此对于某一现象的领域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一

门科学的对象”① 统计数学做为一门科学，有它自己的对象，概括说来，它是研究或然现象规律性的科学．下面我们来较详细地说明这一点．

一种现象的规律，大都是在一定条件（条件以后用德文花体字母$\mathfrak{S}$表示）下，某个具体事件（以后通常用英文大写字母A、B…表示）的发生发展情况．以前我们所学的各种自然科学（包括数学）的规律，绝大部分是用下列形式表达的：

“只要条件组$\mathfrak{S}$一经实现，则事件A必然发生（或必然不发生）”，数学中的定理是这样的．其它自然科学的规律也大都如此，数学中的例子我们就不多举了，我们举几个物理和化学中的例子，例如牛顿第二定律可以表达为“设有一质量为$m$的物体，当以力$f$作用于该物体时（条件$\mathfrak{S}$实现），则该物体必产生加速度$a=\frac{f}{m}$（事件A一定发生）”，又如，在一个标准大气压，温度$100^\circ C$的条件（$\mathfrak{S}$表示这两个条件的全体）下，水一定化为蒸气（事件A）”，再如“设参与某一化学反应的物质在反应前后都不与周围物质交流，则反应前后物质的总重量不变．”虽然这样的例子的确是很多的．上面所说的规律的形式是说明事件A必然发生（或必然不发生）的条件，或者是在一定条件下所必然发生的事件．我们以下称在条件$\mathfrak{S}$下必然发生的事件A为在条件$\mathfrak{S}$下的必然事件（或简称必然事件），称在条件$\mathfrak{S}$下必然不发生的事件为在条件$\mathfrak{S}$下的不可能事件（或简称不可能事件），那么上述规律的形式可以认为是表述必然事件或不可能事件的规律性的。

与必然事件不同．在客观世界中存在着另外一类事件它们不满足上述规律的形式．就是说，在客观世界中，有这样的事

① 毛泽东：矛盾论（人民出版社单行本…12页

件A存在，它在条件G实现时，可能发生也可能不发生，我们以后将在条件G实现时，可能发生也可能不发生的事件叫做条件G下的随机事件（或简称随机事件，不过应该注意当我们谈到A是随机事件时，总是指A是在某一条件G下的随机事件）。随机事件的例子是很多的，而且在生产斗争中有研究的必要。下面我们举出随机事件的一些例子。

例1. 从某工厂的某种产品中抽出一个产品，则所抽得的产品可能是合格品，也可能不是合格品，在这个例子中条件G是"从某工厂的某种产品中抽出一个产品"，事件A是"抽得的产品是合格品"，显然A是条件G下的随机事件。

又如：从某工厂的某种产品中抽出n个产品，则所得的n个产品中可能恰有k（$0 \leq k \leq n$）个合格品，也可能合格品的个数不是k，这时如果将G看成是"从某工厂的某种产品中抽n个产品"，将事件$A_k$看成是"所抽得的产品中恰有k个合格品"则事件$A_k$（$k=0,1,2,\cdots,n$）是条件G下的n+1个随机事件。

例2. 在超短波的无线电远距离通讯中，由于超短波是按直线传送的，因此需要设立通讯的中继站（例如远距离传送电视便是这样），以便将发来的通讯信号（电磁波）接收下来，并且传送出去，但是由于种种实际原因（例如机器本身发生故障，内部噪声及外部干扰等），有时一个或几个中继站工作失效，这时通讯就中断了。这种中断现象通常是具有偶然性的，因此"通讯线路中断"是"无线电中继通讯"这一条件下的随机事件。

若有n个中继站，则"有k个中继站工作失效"是"无线电中继通讯"条件下的随机事件。

例3. 对于一个公用电话系统来说，电话局收到用户的呼

叫是具有偶然性的，因此"在时间间隔（$a$, $a+t$）内，电话局收到用户的$k$次呼叫"是"这个公用电话系统在（$a$, $a+t$]内工作"的条件下的随机事件。

例4．一块放射性元素铀是由很多原子组成的，其中放射性原子经过放出质子或$\gamma$－射线而变成其他类型的元素（物理学称为蜕变），但是每个放射性原子蜕变是具有偶然性的。因此在时间（0，$t$]内，这块放射性铀中有$n$个原子蜕变是一个随机事件。

例5．（a）某一射手向一目标射击，则进行一次射击时可能击中目标也可能没击中目标．因此"射手击中目标"是"该射手向目标进行一次射击"的条件下的随机事件。

（b）又弹丸着点距目标的偏差的大小也是具有偶然性的．因此"弹丸着点距目标的偏差为$x$"及"偏差在$x_1$，$x_2$ ($x_1<x_2$)之间"都是"射手进行一次射击"的条件下的随机事件。

（c）还有"$n$个弹丸着点与目标的偏差恰有$k$次小于$x$"是"射手进行$n$次射击"的条件下的随机事件。

例6．一个在液体中悬浮着的质点，由于它受着液体中运动着的分子的撞击，而这些分子的运动方向及速度大小都具有偶然性，这个质点的位置，运动的速度，方向也就都具有偶然性，因此"悬浮质点在时刻$t$的位置（$x$, $y$, $z$）在区域 $x_1\le x<x_2$，$y_1\le y<y_2$，$z_1\le z<z_2$内"．"悬浮质点在时刻$t$的速度的绝对值小于$x$"以及"悬浮质点在时刻$t$的运动方向（$\alpha$, $\beta$, $\gamma$）（$\alpha$, $\beta$, $\gamma$分别是运动方向与坐标轴的正方向的夹角）在区域．$\alpha_1\le\alpha\le\alpha_2$，$\beta_1\le\beta\le\beta_2$，$\gamma_1\le\gamma\le\gamma_2$内"等事件都是随机事件。

例7．根据精确地测量的结果可以发现在通常的电路中的实际电压总与我们所要传送的电压有一定的偏差（这种偏差就

叫做此电路中的噪声，噪声的研究是无线电通讯技术的研究中的重要问题之一）。并且偏差（噪声）的大小具有偶然性。因此"在时刻t的噪声大于x"是"某一电路工作时"的随机事件。

上面的例子举出了一些具体的随机事件的例子。虽然我们所举的例子只是客观世界中随机事件非常少的一部分，但是已经可以看出：(1)无论在自然现象或社会现象中，都存在着大量的随机事件；(2)随机事件有深入研究的必要，而统计数学就是研究随机事件的规律性的科学。

我们现在来说明研究随机事件的基本想法，及刻划随机事件特性的基本数学概念——概率的概念——的直观意义。

为了研究随机事件，我们应该设想一下研究随机事件的途径，一种很自然的想法就是象我们研究必然事件那样，去进一步寻求随机事件发生的条件，但是只要我们对上面所举的例子分析一下，就可以发现这种做法是不可能的（或者说是几乎不可能的）而且也是不必要的，例如在例3中如果我们要想找出"在（a，a+t］内，电话局收到用户的k次呼叫"这一随机事件发生的条件，那么就必须事先调查这个电话局的所有用户将在（a，a+t］内由于何种需要而呼叫电话，并且还要了解其呼叫次数等等，显然这种调查是无法得到确切的结果的。因而要想找出它发生的确切条件也是不可能的另一方面，电话局所关心的只是大致有多少次呼叫，从而估计电话局的线路及接线员是否够用而影响服务质量或浪费电话局的物力人力，因此那种寻求确切条件的做法也是不必要的，但是从上面分析看出；电话局所关心的问题之一是"大致"有多少次呼叫，因此就出现了求出这个随机事件出现的"可能性"的想法，这种想法就是在给定的条件下寻求并研究随机事件的规律性——"发生的可

能性"。

这种考虑随机事件的规律性的想法，人们在生产实践中已经有它朴素的表现．例如人们对于工厂生产好坏的判别标准之一是它的产品的合格率——即产品中合格品个数与产品总数的比值．一种药物对某一种病的疗效用治愈率——即使用过的该病患者中治愈人数与总数之比——来判断，对于射手的技术的判别标准之一是它的命中率——射出命中次数与射击总次数之比．而对于例3中的事件，则用对时间间隔（$a, a+t$］进行$n$次统计用户的呼叫数（例如统计$n$天的上午八时至九时，此时$a=8$，$t=1$）后，求出这个$n$次统计中"有$k$次呼叫"这一事件发生的次数与$n$的比作为"在（$a, a+t$］内有$k$次呼叫"这一事件发生的"可能性"等等。从上所举出的例子可以这样概括起来：设事件$A$是条件$\mathcal{E}$之下的一个随机事件，若在$\mathcal{E}$的$n$次实现之下，事件$A$发生$\mu_A$次，则用$\frac{\mu_A}{n}$来表示$A$的特性，具体来说，它表示事件$A$在$\mathcal{E}$之下发生的可能性．以下为了叙述简单起见，我们称$\mu_A$为事件$A$在$\mathcal{E}$的$n$次实现之下的频数（或简称频数），而$\frac{\mu_A}{n}$称为事件$A$在$\mathcal{E}$实现$n$次时的频率（或简称频率），记作$\nu_A$，当我们进一步研究$A$的频率$\nu_A$时可以想象（实验也证实了这一点）$\nu_A$对于$\mathcal{E}$的不同的$n$次实现一般来说是不同的，而且$n$不同时一般来说也不相同，但是根据人类大量实践证明：对于每一个固定的$A$来说，当$n$较大时$\nu_A$有经常接近于一个常数$P(A)$的趋势，并且当$n$越大时，接近的程度也就更为显著，接近的次数也越经常，因此从理论上看，我们有理由认为这个与$A$有关的常数$P(A)$刻划了$A$的一种重要特性——出现的可能性，因而它可以作为研究$A$的一个适当的工具．为了以后叙述简单起见，我们称$P(A)$为随机事件$A$在条件$\mathcal{E}$下的概率．总结起来就是：

设事件$A$是条件$\mathfrak{S}$下的随机事件，在$\mathfrak{S}$的$n$次实现之下，事件$A$发生的次数$\mu_A$称为$A$的频数，而$\frac{\mu_A}{n}$称为事件$A$的频率，在$n$充分大时，$\frac{\mu_A}{n}$经常接近于一常数$P(A)$，并且当$n$越大时，$\frac{\mu_A}{n}$越经常接近于$P(A)$，我们称$P(A)$为$A$在条件$\mathfrak{S}$下的概率。这就是概率的实际意义（一般书籍上称为概率的统计定义）。在下节我们将给出概率的数学定义。

§1.2 概率性质的直观来源　为了研究随机事件，在上面我们引进了概率的概念，跟着一个很自然的问题是随机事件的概率应该具有哪些最基本的性质呢？现在就由上述概率的实际意义来说明概率应该具有的一些基本性质，为了说明这些性质我们还将引进关于事件之间的一些关系。

首先，对任一随机事件$A$来说，不管条件$\mathfrak{S}$实现的次数$n$如何，事件$A$的频数$\mu_A$及频率是非负的，因此由概率的实际意义知道∵$A$的概率作为$\frac{\mu_A}{n}$经常接近的常数也应该是非负的故概率应该具有：

性质1　对于任一随机事件$A$来说，$P(A)\geq 0$。

其次，由于在条件$\mathfrak{S}$下的必然事件是在条件$\mathfrak{S}$下随机事件的极端情形，因此为了以后方便起见我们认为必然事件也是一个随机事件，对于必然事件来说，条件$\mathfrak{S}$实现的次数总是与必然事件出现的次数——频数相等，因而频率总等于1，这样，由概率的实际意义知概率应该具有

性质2　必然事件的概率等于1，如果用$U$表示必然事件则有

$$P(U)=1$$

第三，为了进一步考虑概率的性质，我们要讨论在条件$\mathfrak{S}$下两个随机事件的关系，为了具体起见，我们先就一些例子来

核查一下，例如，设$A$表示例3中"在$(a,a+t]$内电话局收到用户的呼叫次数在$k_1$与$k_2$($k_1<k_2$)之间"，$B$表示"在$(a,a+t]$内电话局收到用户的呼叫次数在$k_2$与$k_3$($k_2<k_3$)之间"，而$C$表示"在$(a,a+t]$内电话局收到用户的呼叫次数在$k_1$与$k_3$之间"，则在$\mathfrak{S}$实现之下，若事件$C$发生，则事件$A$，$B$至少有一发生，反之，若事件$A$，$B$有一发生，则事件$C$发生，即在条件$\mathfrak{S}$实现之下，事件$C$发生的充分与必要条件是事件$A$，$B$之中至少有一发生，这时我们称事件$C$为事件$A$，$B$的和，一般来说，设$A$，$B$，$C$是条件$\mathfrak{S}$下的三个随机事件，若在$\mathfrak{S}$实现之下，事件$C$发生的充分与必要条件是事件$A$ $B$之中至少有一发生，则称事件$C$为事件$A$与$B$的和，并将$A$与$B$的和记作$A+B$，即$C=A+B$，由此定义，不难看出在例5中事件$C$——"弹丸着点与目标的偏差在$x_1$，$x_2$之间"为事件$A$——"弹丸着点与目标的偏差在$x_1$，$x_3$($x_1<x_3<x_2$)之间"与事件$B$——"弹丸着点与目标的偏差在$\frac{x_1+x_3}{2}$，$x_2$之间"的和，读者还不难由例1——例6举出很多这样的例子。

另一种事件的关系是在条件$\mathfrak{S}$下的随机事件$A$，$B$之间"互不相容"的关系，即设$A$，$B$是在条件$\mathfrak{S}$下的随机事件，若在条件$\mathfrak{S}$的每一次实现之下，事件$A$，$B$不同时发生(即若事件$A$发生，则事件$B$不发生，而若事件$B$发生，则事件$A$不发生)，则称事件$A$、$B$为互不相容的，例如在例3中事件$A$——"在$(a,a+t]$内电话局收到用户呼叫次数在$k_1$，$k_2$($k_1<k_2$)之间"与事件$B$——"在$(a,a+t]$内电话局收到用户呼叫次数在$2k_2$，$k_3$($2k_2<k_3$)之间"是互不相容的，类似地可以举出很多互不相容事件的例子。

现在我们来说明概率应该具有的第三个性质，设事件$A$，$B$是在$\mathfrak{S}$下两个互不相容的事件，并设在$\mathfrak{S}$的$n$次实现之下事件

$A$．$B$及$A+B$的频数各为$\mu_A$, $\mu_B$及$\mu_{A+B}$，频率各为$\nu_A$, $\nu_B$及$\nu_{A+B}$，则由$A$与$B$互不相容即知

$$\mu_{A+B}=\mu_A+\mu_B,$$

因而

$$\nu_{A+B}=\frac{\mu_{A+B}}{n}=\frac{\mu_A}{n}+\frac{\mu_B}{n}=\nu_A+\nu_B$$

故由概率的实际意义知应该具有

性质3　若$A$，$B$为互不相容的事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

除了以上三个性质以外，概率还应该具有其他的性质；并且在同一条件$\mathfrak{S}$之下，事件之间还具有其他的关系。下面我们就来讨论它们。

第四，设事件$A_1,\cdots,A_n$，$C$是同一条件$\mathfrak{S}$之下的随机事件，并且在$\mathfrak{S}$的实现之下，$C$发生的充分必要条件是$A_1,\cdots,A_n$这$n$个事件中至少有一发生，则称$C$为事件$A_1,\cdots,A_n$的和，记作$C=A_1+\cdots+A_n$，仿照性质3的说明概率应该具有

性质3′，若$A_1,\cdots,A_n$是同一条件$\mathfrak{S}$下两两互不相容的，并且$A_1+\cdots+A_n=U$，此处$U$表示必然事件　则称$A_1,\cdots,A_n$为条件$\mathfrak{S}$下的一个事件完备系，例如在例1中的$A_0$，$A_1,\cdots,A_n$作成条件$\mathfrak{S}$—"从某工厂的某种产品中抽$n$个产品"下的一个事件完备系，若$A$，$\overline{A}$是条件$\mathfrak{S}$下的一个事件完备系，则称$\overline{A}$为$A$（或$A$为$\overline{A}$）的对立事件，$A$的对立事件以后记作$\overline{A}$．于是由概率的实际意义知概率应该具有

性质4　若$A_1,\cdots,A_n$是条件$\mathfrak{S}$下的一个事件完备系，则

$$P(A_1)+\cdots+P(A_n)=1$$

若$\overline{A}$为$A$的对立事件，则

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

应该指出性质4可以由性质2及性质3推导出来。

第五，设事件$A$、$B$是同一条件$\mathfrak{S}$下的两个随机事件，在$\mathfrak{S}$的每次实现之下，若事件$A$发生，则事件$B$发生（反过来不一定成立），我们就叫事件$B$包含事件$A$，记作$A\subset B$，例如在例1中"抽调产品中合格品的个数小于100"这一事件包含"抽调产品中合格品的个数小于70"。由概率的实际意义可以看出概率应该具有

性质5，若$A$，$B$是条件$\mathfrak{S}$下的随机事件，且$A\subset B$，则

$$P(A)\leq P(B)$$

第六，设事件$A$，$B$及$C$是条件$\mathfrak{S}$下的随机事件，若在$\mathfrak{S}$的每次实现之下，事件$C$发生的充分与必要条件是$B$发生且$A$不发生，则称$C$为事件$B$与$A$的差，记作$C=B-A$，例如在例1中若事件$A$表示"抽调产品中合格品的个数小于70"，而事件$B$表示"抽调产品中合格品的个数大于60"，则$B-A$为"抽调产品中合格品的个数$\geq 70$"，应该指出$B-A$与$A-B$一般是不同的，例如在上面所举的例子中$A-B$是"抽调的产品中合格品的个数$\leq 60$"，由概率的实际意义知概率应该具有

性质6　设$A$，$B$是条件$\mathfrak{S}$下的随机事件，若$A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

第七　设事件$A$，$B$及$C$是条件$\mathfrak{S}$下的随机事件，若在$\mathfrak{S}$的每次实现之下，事件$C$发生的充分与必要条件是$A$与$B$都发生（即若$C$发生，则$A$，$B$都发生，反之若$A$，$B$都发生，则$C$发生），则$C$称为事件$A$与$B$的乘积，记作$C=AB$，例如在例1中令$n=100$，则"抽调的产品中合格品的个数小于80"（$A$）与"抽调产品中的合格品的个数大于70"（$B$）的乘积是"抽调的产品中合格品的个数大于等于70而小于80"，类似地可以定义条件$\mathfrak{S}$下的$n$个事件$A_1,\cdots,A_n$的乘积的概念（读者

试自行定义）．由概率的实际意义可以看出它应该具有

性质7　设事件A，B是条件G下的随机事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

一般来说，若$A_1,\cdots,A_n$是条件G下的n个随机事件，则

$$P(A_1+\cdots+A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\cdots$$

$$+(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n)$$

最后，我们来说明一下在讨论一个条件G下的随机事件系S时对这个随机事件系S作一些假定是合理的，我们可以认为S中有必然事件及不可能事件，假如没有的话，我们可以将它们加入到S里面去，而得到一个新的随机事件系，我们还可以认为：若A，B是S中的随机事件，则A+B，AB，A-B，$\bar{A}$（A的对立事件）都是S中的随机事件，这是因为从实际情况及关于事件的和、差、积及对立事件的定义可以看出这些事件都是条件G下的随机事件，因此如果S中事件的和、差、积及对立事件不在S中的话，那么我们可以将它们加到S中去而成为一个新的随机事件系，因此当我们谈到条件G下的随机事件系S时，我们总认为S满足下列条件：

(1) 如果事件A，B在S中，则A+B，AB，A-B，$\bar{A}$也在S中，

(2) S中含有必然事件

满足条件(1)．(2)的随机事件系，叫做一个事件体，以后经常记作$\mathfrak{F}$（英文字母F的花体）．

例8．在例1中当n=3，$A_k$表示"抽得的三个产品中恰有k个是合格品"，则在"从某工厂的某种产品中抽取三个产品"的条件G下，下列随机事件系$\mathfrak{F}_1$，$\mathfrak{F}_2$便是事件体。为

了简单起见，我们用"$A_{K_1}$或$A_{K_2}\cdots$或$A_{k_i}$"表示事件——"抽得3个产品中合格品的个数是$k_1$，或$k_2$，…或$k_i$"。

$\mathfrak{F}_1$　$A_0$，$A_1$，$A_2$，$A_3$，

"$A_0$或$A_1$"，"$A_0$或$A_2$"，"$A_0$或$A_3$"

"$A_1$或$A_2$"，"$A_1$或$A_3$"，"$A_2$或$A_3$"

"$A_0$或$A_1$或$A_2$"，"$A_0$或$A_1$或$A_3$"，"$A_0$或$A_2$或$A_3$"

"$A_1$或$A_2$或$A_3$"；

"$A_0$或$A_1$或$A_2$或$A_3$"（$=U$），$\bar{U}$（不可能事件）

此处$\bar{U}$为不可能事件可以理解为条件$\mathfrak{S}$下的任何一个不可能事件，例如$\bar{U}$可以理解为"抽得的三个产品中合格品的个数$<0$"。根据事件和、差、积、对立事件的定义不难根据(1)，(2)直接验证$\mathfrak{F}_1$是一事件体（下面我们还将介绍如何验证$\mathfrak{F}_1$是一事件体的更简单的方法）

应该注意：$\mathfrak{F}_1$中的事件是条件$\mathfrak{S}$的一切事件的全体，我们不应误会$\mathfrak{S}$下的事件体一定是$\mathfrak{S}$下的一切随机事件的全体作成的，事实上$\mathfrak{S}$下的一部分事件也可以作成$\mathfrak{S}$下的一个事件体，例如下面的$\mathfrak{F}_2$是$\mathfrak{S}$下的一个事件体，但它并不是由$\mathfrak{S}$下的一切随机事件作成的。

$\mathfrak{F}_2$：$U$，$\bar{U}$，$A_0$　"$A_1$或$A_2$或$A_3$"。

我们还举出下面的

例9．在例1中当$n$为任何给定的整数时，则

$\mathfrak{F}_n$：$U$，$\bar{U}$，"$A_{k_1}$或$A_{k_2}\cdots$或$A_{k_i}$"，$1\leq i\leq n+1$

$0\leq k_1<k_2<\cdots<k_i\leq n$

是$\mathfrak{S}$下的一个事件体（这个例子是例8中$\mathfrak{F}_1$在$n$为任何给定的正整数的情形下的一般化）．

例10，在例3中若用"$A_{k_1}$或$A_{k_2}$，…或$A_{k_n}\cdots$"表示在

$(a, a+t]$ 内，电话局收到用户的呼叫次数为 $k_1$ 或 $k_2$，…或 $k_n$，…，令

$\mathscr{F}$: $U$ = "在 $(a, a+t]$ 内电话局收到用户的呼叫次数 $\geq 0$"（必然事件）.

$\bar{U}$ = "在 $(a, a+t]$ 内电话局收到用户的呼叫次数 $< 0$"（不可能事件），

"$A_{k_1}$ 或 $A_{k_2}$…或 $A_{k_n}$，…"

其中 $k_1$，$k_2$，…，$k_n$，…为满足条件

$$0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots,$$

的有限或无限的任意整数序列，则 $\mathscr{F}$ 是"电话局在 $(a, a+t]$ 内工作"的条件 $\mathfrak{S}$ 下的一个事件体.

我们通过应用(1),(2)来验证例8—10中的 $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_n$ 及 $\mathscr{F}$ 是事件体的过程中不难发现，要判定一个随机事件总是一个事件体是很麻烦的，在下一节我们将要看到事件体 $\mathscr{F}$ 也可以用下列三个条件来定义（为了简单起见我们用符号 $A \in \mathscr{F}$ 表示 $A$ 是 $\mathscr{F}$ 中的随机事件）：

(1') $U \in \mathscr{F}$；

(2') 若 $A \in \mathscr{F}$，$B \in \mathscr{F}$，则 $A+B \in \mathscr{F}$；

(3') 若 $A \in \mathscr{F}$，则 $\bar{A} \in \mathscr{F}$.

我们会发现应用条件(1')—(3')去验证例8—例10中的 $\mathscr{F}_1$，$\mathscr{F}_n$；$\mathscr{F}$ 是事件体比应用(1).(2)来得简单；$\mathscr{F}$ 也可以用其它条件来定义，这些细节我们将在下节进行讨论.

关于概率的直观定义及其应具有的性质，以及事件之间的关系的讨论就到此为止，至于它们的数学定义及其性质的推导我们将在下节给出。