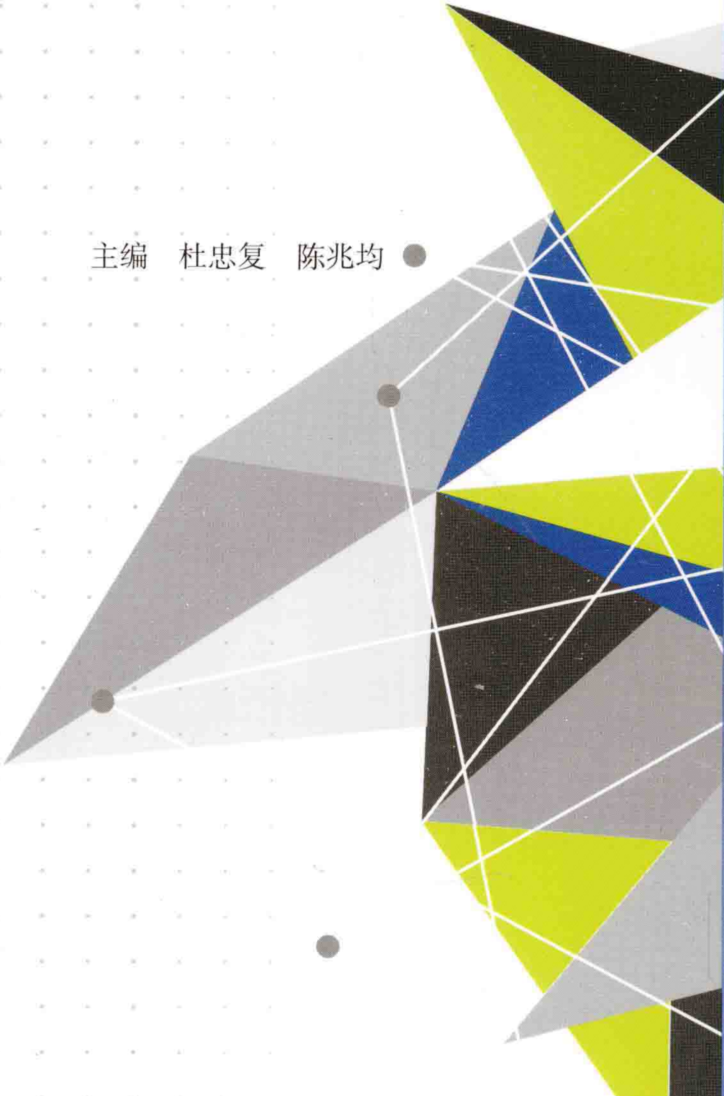
高等学校教材

离散数学（第 2 版）



主编　杜忠复　陈兆均

高等教育出版社

高等学校教材

离散数学（第2版）

LISAN SHUXUE

主编　杜忠复　陈兆均

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是教育科学"十五"国家规划课题"21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践"数学类子课题项目成果之一的修订版。

全书内容包括:集合论、关系、代数系统、图论和数理逻辑。本书避免先从数理逻辑开始,用逻辑联结词来处理各段内容,全书以集合论作为出发点,突出研究集合中元素与元素间的相互结构。简单介绍了图论网络的实际应用问题。叙述上力求简单、直观易懂,选择大量且较为典型的例题、习题,以便于学生理解、消化。

本书可作为应用型院校计算机专业及相关专业的学生使用,也可供科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/杜忠复,陈兆均主编.—2版,—北京:高等教育出版社,2014.6

ISBN 978-7-04-039900-4

Ⅰ.①离… Ⅱ.①杜…②陈… Ⅲ.①离散数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第103702号

策划编辑 杨 波　责任编辑 杨 波　封面设计 李小璐　版式设计 余 杨
插图绘制 尹文军　责任校对 刘 莉　责任印制 赵义民

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	北京印刷一厂		http://www.landraco.com.cn
开　本	787mm×960mm 1/16		
印　张	12	版　次	2004年4月第1版
字　数	210千字		2014年6月第2版
购书热线	010-58581118	印　次	2014年6月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	19.30元

物 料 号 39900-00

第二版前言

本书的修订原则是:1. 整体上,在内容、体系、结构方面未动,在局部上,针对一些概念、结论、习题等问题作了适当改动及完善;2. 这次修订,在使用本书上,突出强调研究集合中元素间的各种结构,以对集合中元素的结构讨论为核心。第二条原则是作者多年在离散数学教学中的一点经验与体会。

本书的修订工作由杜忠复,陈兆均完成,杜忠复统一定稿。

作者借此机会感谢十年来使用本书,并关心本书的兄弟院校的同行。

由于学识所限,本次修订后仍可能存在不妥之处,敬请同行指正。

作者

2013 年 10 月于北华大学

第一版前言

离散数学是描绘一些离散量与量之间的相互逻辑结构及关系的学科。它的思想方法及内容已渗透到计算机科学的各个领域中。因此它成为计算机及相关专业的一门重要专业基础课。

本书是针对大学本科应用型人才培养目标及要求,适用于应用型本科计算机及相关专业的教材。在编写过程中,考虑到这一层次学生的特点及其培养要求,我们在内容上本着必需够用、突出思想方法的原则,选取了离散数学的主要内容:集合论、关系、代数系统、图论和数理逻辑五个部分。在教学实践中我们体会到:结构上,先从集合论入手,后介绍数理逻辑。这样做比先介绍数理逻辑,而只通过逻辑联结词,贯穿全书这种体系更便于学生学习。文字处理上力求简洁、通俗、直观易懂。为使学生能很好地消化理解书中内容,书中列举了大量的较为典型、易于接受、说明问题的例题,配备了相当数量的习题,也列举了部分实际应用问题。

本书由杜忠复、陈兆均主编,其中杜忠复编写第一～四章,陈兆均编写第五章。全书最后由杜忠复统一定稿。全国高等教育研究会数学学科专业委员会副主任委员、吉林大学数学科学院博士生导师李辉来教授,详细的审阅了本书,提出了一些中肯的意见,作者向他表示衷心的感谢。

高等教育出版社数学策划编辑李艳馥同志,多年来在工作中从各方面给予作者大力的支持和帮助;我校的冯莹女士、赵宏伟老师在本书的编排工作中,也做了许多的工作。作者在这里也一并向她们表示真诚的谢意。

本书是作者在多年从事离散数学教学、总结教学经验的基础上编写而成,由于学识有限,不妥之处必定难免,敬请同行指正。

作者

2003 年 10 月于北华大学

目　录

第一章 集 合 论

集合论简称集论.这一数学分支是在19世纪初开始发展起来的.德国数学家康托尔(Cantor)是集合论的奠基人.现在,集合论的概念和方法已经渗透到所有的数学分支,并且改变了它们的面貌,因而各数学分支的完整体系,都是在所取集合上,设定其元素及子集的性质和运算的公理而构成.所以,不熟悉集合论的原理就不可能对近代数学正确的理解.本章就是先对集合论做一下简单介绍.其中,主要突出集合中元素的形式结构与集合中元素的"数量"结构.

第一节 集合的概念

一、集合的概念

数学中的概念有两种定义形式.其中,一种概念可以用严格的数学逻辑形式来定义,叫做可定义概念.另一种则不能用严格形式来定义,而只能用语言对它进行大致的描述,叫做不可定义概念.集合便属于后一种概念.虽然我们不能给集合以确切的定义,但是一提到一个集合,我们便都清楚所指的是什么;这是因为所提集合中的事物都具有某种共同的性质.为此我们有:

定义1 把具有某种共同属性的事物的全体称为一个**集合**.

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots,M$ 等表示集合.集合中的每一事物叫做集合的**元素**.常用小写字母 a,b,c 等表示集合中的元素.

以上只是对集合进行了一些描述,在研究具体问题时,还需把它具体表示出来.集合的常用表示法有三种:

(1)列举法:把集合中的元素一一列举出来,两端用花括号括之.

例1 小于5的所有自然数集合.

$$A=\{0,1,2,3,4\}.$$

全体正奇数集合.

$$B=\{1,3,5,7,9,\cdots\}.$$

(2)描述法:若集合中元素 x 具有某种性质 $P(x)$,可在花括号内用语言叙述之,或可表示成 $\{x|x$ 具有性质 $P(x)\}$,简记 $\{x|P(x)\}$.

例2 ① 全体有理数的集合.

$$A = \{x \mid x \text{ 是有理数}\}.$$

② 方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解的集合.

$$B = \{x \mid x \text{ 是 } x^2 - 1 = 0 \text{ 的解}\}.$$

(3)图示法:用图形表示集合的方法.例子略.

注意

1.所谓给出一个集合,就是规定了这个集合是由哪些元素组成的.并且,对于任意一个元素都能判定它是否是这个集合的元素,是这个集合的元素,或者不是这个集合的元素,二者必居其一.

2.集合里若干个相同的元素,只能算作一个,也只用一个符号表示出来.比如,$M = \{1,1,1,2\}$,元素 1 在集合 M 中虽出现三次,但元素 1 只能算作集合 M 的一个元素,通常写成 $M = \{1,2\}$,即集合里的元素是不重复出现的.

3.集合里不考虑元素的顺序.如 $\{a,b,c\}$,$\{b,c,a\}$,$\{a,c,b\}$ 似不相同,但从元素看来都认为是同一个集合.

一个元素 a,或者是集合 A 的元素,或者不是集合 A 的元素,二者必居其一.元素与集合的这种关系叫做**从属关系**.

若 a 是集合 A 中的元素,就说 a 属于 A,记为 $a \in A$."$\in$"读作"属于".若 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A,记为 $a \notin A$ 或 $a \in A$."$\notin$"或"$\in$"读作"不属于".

例 3 $A = \{x \mid x \text{ 是自然数}\}$,则

$$3 \in A, 10 \in A, 0 \in A, \text{而 } -5 \notin A.$$

二、集合间的关系

一个集合,如果它能包括我们所考虑的对象之内的全体元素.则称此集合为**全集合**,简称**全集**,记为 E(或 X).

例 4 在有理数集合内,讨论它的一些元素所成的集合.像自然数集合,整数集合,奇数集合,方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集等,都是一些有理数组成的集合.而全体有理数构成的集合,包含了我们所考虑对象的全体元素,故在这里全体有理数集合便是一个全集合.

与全集相对应的,不包含任何元素的集合,则称为**空集**,记作 $\varnothing$ 或 $\{\ \}$.

例 5 方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实数解的集合便是空集.

定义 2 如果集合 A 与 B 之元素相同,则称这两个集合是相等的.记为 $A = B$,否则称这两个集合为不相等,记为 $A \neq B$.

定义 3 设有集合 A, B,如果对于任一 $a \in A$,都有 $a \in B$,则称集合 A 是集合 B 的**子集合**,或者说 B 包含 A.记为 $B \supseteq A$ 或 $A \subseteq B$,"$\supseteq$"读作"包含","$\subseteq$"读作

"包含于". 若 $B\supseteq A$ 且有 $b\in B$ 但 $b\notin A$,则称 A 是 B 的**真子集**,或者说 B 真包含 A,记为 $B\supsetneqq A$ 或 $A\subsetneqq B$,"$\supsetneqq$"读作"真包含","$\subsetneqq$"读作"真包含于".

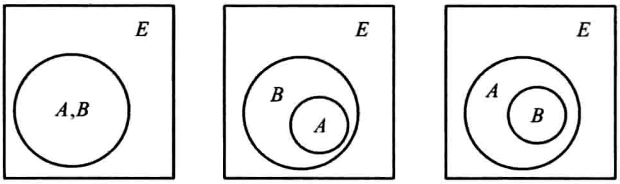
A 不被 B 包含或 B 不包含 A,记作 $A\not\subseteq B$ 或 $B\not\supseteq A$.

例 6　① 设 $A=\{a,b,b,c\}$,$B=\{a,b,c\}$,则 $A=B$.

② 设 $A=\{1,2,3,\cdots,100\}$,$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$,则 $A\subseteq\mathbf{N}$ 且有 $A\subsetneqq\mathbf{N}$.

③ 设 $A=\{x\mid x\geqslant 5\}$,$B=\{x\mid x\geqslant 0\}$,则 $A\subseteq B$ 且有 $A\subsetneqq B$.

关于集合的一些属性,直观上可用图示法,即所谓的文氏(Venn)图来描述. 用矩形表示全集合,用圆表示集合. 子集合的概念,可用图 1-1 直观表示出来.



$A=B$　　$B\supseteq A$或$B\supsetneqq A$　　$A\supseteq B$或$A\supsetneqq B$

图 1-1

关于集合还有下述定理.

定理 1　对任意集合 A,都有 $E\supseteq A$.

定理 2　对任意集合 A,必有 $\varnothing\subseteq A\subseteq E$.

定理 3　设有集合 A,B,则 $A=B$ 充要条件是 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$.

证　充分性　设 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$. 假设 $A\neq B$,由定义 2 至少有一元素属于其中之一,而不属于另一集合. 令其为 x,且令 $x\in A$,而 $x\notin B$;但由于 $A\subseteq B$,故当 $x\in A$ 时必有 $x\in B$,与 $x\notin B$ 矛盾;同理对于 $x\in B$ 且 $x\notin A$ 亦可产生矛盾. 这表明必有 $A=B$.

必要性　设 $A=B$ 且假设 $A\supseteq B$,$B\supseteq A$ 至少有一个不成立;不妨设 $B\supseteq A$ 不成立,则必至少存在一个 $x\in A$ 且 $x\notin B$ 这与 $A=B$ 是矛盾的. 故 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$ 成立. 证毕.

练习题 1-1

1. 下列所述是否能组成集合? 为什么?

(1) 某本书所有的插图.

(2) 所有小于 9 的自然数.

(3) 太阳系所有的行星.

(4) 平面上所有的圆.

(5)某次考试平均80分以上的人.

(6)所有高个人的全体.

(7)数学中的所有难题.

2. 令 $S=\{2,a,\{3\},b\}$, $M=\{\{a\},3,\{b\},1\}$,指出下列关系正确否?

(1) $\{a\}\in S$. (2) $3\notin S$. (3) $\{a\}\in M$. (4) $3\in M$. (5) $b\in M$.

3. 举出下述两个集合:

(1)一个集合是另一个集合的子集合.

(2)一个集合是另一个集合的真子集合.

(3)两个集合相等.

4. 集合 A,B,C 有 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$,证明:$A\subseteq C$,并举例说明.

5. 试问:集合 A 与集合 B 在什么条件下有 $B\subsetneq A$ 和 $B\subseteq A$,同时成立?

*6. 证明:空集是惟一的.

第二节 集合的运算

一、集合的基本运算

定义1 由集合 A,B 之所有元素合并组成之集合,叫做集合 A 与 B 的**并集**,记作 $A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

例1 若 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,e,f\}$,则

$$A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}.$$

例2 $A=\{x\mid x \text{ 是有理数}\}$, $B=\{x\mid x \text{ 是无理数}\}$,则 $A\cup B=\{x\mid x \text{ 是实数}\}$.

注意 两个集合的公共元素在并集中只能出现一次.

定义2 由集合 A,B 所有的公共元素所组成的集合,叫做集合 A 与 B 的**交集**,记作 $A\cap B$. 即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

例3 若 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,4,6,8\}$,则 $A\cap B=\{2,4\}$.

例4 若 $A=\{x\mid x\geqslant 3\}$, $B=\{x\mid x\leqslant 7\}$,则 $A\cap B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 7\}$.

定义3 集合 A,B 若满足 $A\cap B=\varnothing$,则称 A,B 是分离的.

例5 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$,则 $A\cap B=\varnothing$,即 A 与 B 是分离的.

定义4 由集合 A,B 中所有属于 A,而不属于 B 的元素所组成之集合,叫做 A 与 B 的**差集合**,记作 $A-B$. 即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}.$$

例 6　$A=\{a,b,c,d\}$ 和 $B=\{b,c,e\}$，则 $A-B=\{a,d\}$，$B-A=\{e\}$.

定义 5　集合 A 之**补集**，记作 $\complement A$. 定义为 $\complement A=E-A$.

例 7　设 $E=\{0,1,2,3,\cdots\}$，$A=\{0,2,4,6,\cdots\}$，则

$$\complement A=E-A=\{1,3,5,7,\cdots\}.$$

定义 6　集合 A,B 之**对称差**，记作 $A\oplus B$. 定义为

$$\begin{aligned}A\oplus B&=(A-B)\cup(B-A)\\&=\{x\mid(x\in A\text{ 且 }x\notin B)\text{或}(x\in B\text{ 且 }x\notin A)\}.\end{aligned}$$

例 8　$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则 $A\oplus B=\{1,2,5,6\}$.

前面，我们定义了交集，那里集合中的元素是定义中两个集合中的公共元素，交集是由这些公共元素做成的集合，而对称差与之正好相反，它恰是去掉二集合中的所有公共元素，由剩下的所有元素组成的集合. 以上我们定义了集合中的六种基本运算均可通过文氏图，清楚地表示出来. 如图 1－2.

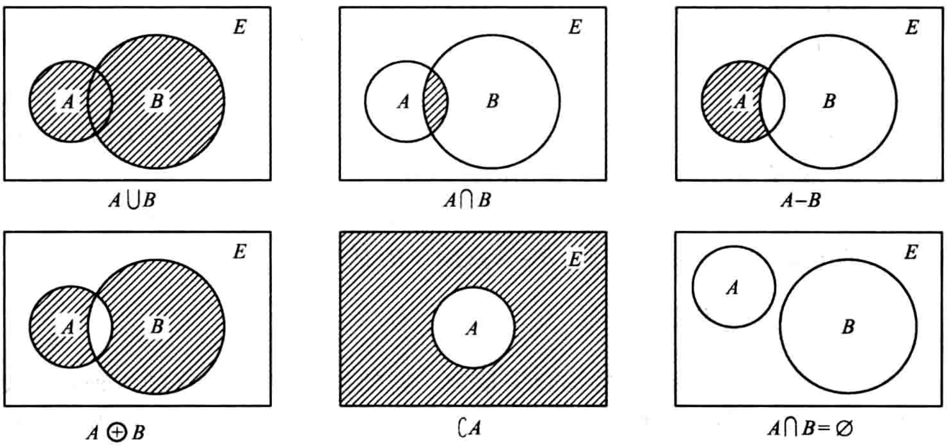


图 1－2

下面介绍几个集合运算的重要公式.

定理 1　对于任意的集合 A,B，有

$$A\cap B\subseteq A,\quad A\cap B\subseteq B,\quad A\subseteq A\cup B,\quad B\subseteq A\cup B.$$

证　$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$ 显然成立. 其次，如果 $x\in A\cap B$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$，故 $A\cap B\subseteq A$ 且 $A\cap B\subseteq B$. 证毕.

定理 2　若 $A\subsetneq B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$.

证　设 $x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$. 若 $x\in A$，则由 $A\subsetneq B$，可知 $x\in B$，总之有 $A\cup B\subseteq B$. 由定理 1，有 $B\subseteq A\cup B$，故 $A\cup B=B$. 同理 $A\cap B=A$. 证毕.

定理 3　设 A,B 为任意集合，则有

(1) $A-B=A\cap\complement B$.

(2) $A-B=A-A\cap B$.

证 (1)略.

(2)设 $x\in A-B$,即 $x\in A$ 且 $x\notin B$. 故必有 $x\notin A\cap B$,因此 $x\in[A-(A\cap B)]$,即

$$A-B\subseteq[A-(A\cap B)].$$

又设 $x\in[A-(A\cap B)]$,则 $x\in A$ 且 $x\notin(A\cap B)$,即 $x\in A$ 且 $x\in\complement(A\cap B)$;$x\in A$ 且$[x\in\complement A$ 或 $x\in\complement B]$.(注:$\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B$ 后面将介绍.)但 $x\in A$ 且 $x\in\complement A$ 是不可能的,故只能有 $x\in A$ 且 $x\in\complement B$. 由(1)即 $x\in A-B$,从而得到 $A-(A\cap B)\subseteq A-B$. 因此 $A-B=A-(A\cap B)$. 证毕.

定理 4 设 A,B 为两个集合,若 $A\subseteq B$,则

(1) $\complement B\subseteq\complement A$;

(2) $(B-A)\cup A=B$.

证 (1)若 $x\in A$,则 $x\in B$,因此 $x\notin B$ 必有 $x\notin A$,故 $x\in\complement B$,必有 $x\in\complement A$,即 $\complement B\subseteq\complement A$.

(2)设 $x\in(B-A)\cup A$,则 $x\in B-A$ 或 $x\in A$. 若 $x\in B-A$,则 $x\in B$;若 $x\in A$,由已知 $A\subseteq B$,应有 $x\in B$. 因此,$(B-A)\cup A\subseteq B$.

反之,设 $x\in B$,由 $A\subseteq B$ 有,或者是 $x\in A$,或者是 $x\in B-A$,总之有 $x\in(B-A)\cup A$,即 $B\subseteq(B-A)\cup A$. 因此 $(B-A)\cup A=B$. 证毕.

二、集合的运算律

集合上的运算是用给定的集合去指定一新的集合. 如上定义的六种运算便是如此. 它们之间各种运算还可以混合进行,且运算遵循一定的规律,其中一些运算律如下:

(1)幂等律	$A\cup A=A$.
	$A\cap A=A$.
(2)结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.
	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.
(3)交换律	$A\cup B=B\cup A$.
	$A\cap B=B\cap A$.
(4)分配律	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.
	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
(5)	$A\cup\varnothing=A$.
	$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(6) $A\cup E=E.$

$A\cap E=A.$

(7) $A\cup\complement A=E.$

$A\cap\complement A=\varnothing.$

(8)吸收律 $A\cup(A\cap B)=A.$

$A\cap(A\cup B)=A.$

(9)德摩根(De Morgan)律 $\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B.$

$\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B.$

(10) $\complement\varnothing=E.$

$\complement E=\varnothing.$

(11) $\complement\complement A=A.$

以上共介绍了二十一个恒等式,除最后一个外,其他的都是成对出现的.我们现在来证其中的公式(9)德摩根律,其他从略.

现证$\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B$($\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B$ 同理).设 $x\in\complement(A\cup B)$,则 $x\notin A\cup B$,因此 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,从而 $x\in\complement A$ 且 $x\in\complement B$,即 $x\in\complement A\cap\complement B$,从而$\complement(A\cup B)\subseteq\complement A\cap\complement B$.

反之,设 $x\in\complement A\cap\complement B$,则 $x\in\complement A$ 且 $x\in\complement B$,从而 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,还有 $x\notin A\cup B$,于是必有 $x\in\complement(A\cup B)$,即$\complement A\cap\complement B\subseteq\complement(A\cup B)$.故$\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B$.证毕.

三、例题

上面两段,我们介绍了集合的运算及运算律,现在通过几个例子,我们来观察一下,集合的运算律在运算过程及实际中的应用.

例 9　化简$(A\cup B)\cap(A\cup\complement B)$.

解　$$(A\cup B)\cap(A\cup\complement B)\xlongequal{\text{分配律}}A\cup(B\cap\complement B)\xlongequal{\text{公式(7)}}A\cup\varnothing\xlongequal{\text{公式(5)}}A.$$

例 10　化简$(A\cup B)\cup(\complement A\cap B)$.

解　$(A\cup B)\cup(\complement A\cap B)$

$$\xlongequal{\text{分配律}}[(A\cup B)\cup\complement A]\cap[(A\cup B)\cup B]$$

$$\xlongequal{\text{结合律}}[A\cup B\cup\complement A]\cap[A\cup B\cup B]$$

$$\xlongequal{\text{交换律、(7)、幂等律}}(E\cup B)\cap(A\cup B)$$

$\overset{(6)}{=\!=\!=} E\cap(A\cup B)$

$\overset{(6)}{=\!=\!=} A\cup B.$

例 11 证明若 $A\cup B=A\cap B$,则 $A=B$.

证 $A \xlongequal{\text{吸收律}} A\cup(A\cap B) \xlongequal{\text{已知条件}} A\cup(A\cup B) \xlongequal{(2)} (A\cup A)\cup B \xlongequal{(1)} A\cup B.$

而 $B \xlongequal{\text{吸收律}} B\cup(B\cap A) \xlongequal{\text{已知条件}} B\cup(B\cup A) \xlongequal{(2)} (B\cup B)\cup A \xlongequal{(1)} A\cup B.$

故得 $A=B$. 证毕.

例 12 某图书馆有藏书 100 万册,有一读者前往查阅,他希望了解 19 世纪法国的以描写农民生活为题材的长篇小说,以及 1979 年出版的,我国的,不是描写“文化大革命”的长篇小说之书名. 请将此读者所要了解之书名用集合论的方法描述之.

解 令 E 表示该图书馆全体藏书之集合;

A:所有法国图书之集合;

B:所有 19 世纪的书组成的书名集合;

C:所有描写农民生活题材长篇小说的书组成的书名集合;

D:所有长篇小说所组成的书名集合;

F:所有 1979 年出版的书的书名集合;

G:所有中国的书之书名集合;

H:所有描写“文化大革命”长篇小说的书之书名集合,

则此读者所要了解之书可用集合方式描述为

$$D\cap[(B\cap A\cap C)\cup(F\cap G\cap \complement H)].$$

例 12 只是集合论在实际中的一个简单应用,它的应用绝不止于此,这里我们不再一一赘述.

练习题 1-2

1. 设 $A=\{x\mid x<5, x\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x\mid x<7, x$ 是正偶数$\}$,求:$A\cup B, A\cap B, A-B, B-A, A\oplus B$.

2. 设 $A=\{x\mid x$ 是 book 中的字母$\}$, $B=\{x\mid x$ 是 black 中的字母$\}$ 求:$A\cup B, A\cap B, A-B, B-A, A\oplus B$.

3. 证明:(1) $\complement\varnothing=E$. (2) $\complement E=\varnothing$.

4. 简化下列集合运算:

(1) $(A\cup B)\cap(A\cup B)$.

(2) $(A\cup B)\cup(A\cup B)$.

(3) $(A\cup B)\cup(A\cap C\cap B)$.

(4) $(A\cap\complement B)\cup(B\cap\complement A)\cup(A\cap B)$.

(5) $(A\cup B\cup\complement C)\cap(\complement A\cap\complement B\cap C)$.

5. 设 A,B,C 为三个集合，则 $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$.

6. 应用集合的运算证明：

(1) $A-(B\cup C)=(A-B)-C$.

(2) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

(3) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$.

(4) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$.

(5) $(A\cup B)\cup(B-A)=A\cup B$.

7. 设 A,B 为任一集合，证明 $A\subseteq B$ 的充要条件为 $A\cap\complement B=\varnothing$.

8. 设全集 $E=\{x\mid x$ 是自然数$\}$，如下是它的子集：

$A=\{1,2,7,8\}$，$B=\{x\mid x^2<50\}$，

$C=\{x\mid x$ 可被 3 整除，$0\leqslant x\leqslant 30\}$，

$D=\{x\mid x=2^k$，k 是正整数 $0\leqslant k\leqslant 6\}$.

求下列集合：

(1) $A\cup[B\cup(C\cup D)]$.　　(2) $A\cap[B\cap(C\cap D)]$.

(3) $B-(A\cup C)$.　　(4) $(\complement A\cap B)\cup D$.

9. (1) 已知 $A\cup B=A\cup C$ 是否必须 $B=C$?

(2) 已知 $A\cap B=A\cap C$ 是否必须 $B=C$?

(3) 已知 $A\oplus B=A\oplus C$ 是否必须 $B=C$?

第三节　幂集合与笛卡儿积

一、幂集合

定义 1　设 A 是一集合，A 的幂集合 $\rho(A)$，是指 A 的所有子集作元素所组成的集合（其中包括空集 $\varnothing$ 及 A 自身）.

例 1　设 $A=\{a,b,c\}$，则 A 有子集：

$A_1=\varnothing$，$A_2=\{a\}$，$A_3=\{b\}$，$A_4=\{c\}$，$A_5=\{a,b\}$，$A_6=\{a,c\}$，

$A_7=\{b,c\}$，$A_8=\{a,b,c\}$.

因此 A 的幂集合为

$$\rho(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}.$$

一个给定集合的幂集合是惟一的，因此求一个集合的幂集合是以集合为运

算对象的一元运算.

从上面例子我们看到,求一个集合的幂集,关键是把它的所有子集全部找到,然而一个集合究竟有多少个子集呢?下面的定理便回答了这一问题.

定理 1 若集合 A 为由 n 个元素所组成之有限集合,则 $\rho(A)$ 为有限且由 2^n 个元素组成. 即 A 有 2^n 个子集.

证 我们将 $\rho(A)$ 中之每个元素(即 A 之子集)与一个二进制数建立一一对应关系. 设 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$,我们建立一个 n 位二进制数:$b_1,b_2,\cdots,b_n$,当 A 的某一子集出现有 a_i 时,则对应之 b_i 为 1,当不出现 a_i 时,则对应之 b_i 为 0. 这样,任一个 A 的子集就与一个二进制数建立一一对应关系:给一个二进制数可得到一个 A 的子集,反之,给一个 A 的子集可得到一个二进制数,而 n 位二进制数共有 2^n 个数,因此可知 $\rho(A)$ 之元素共为 2^n 个. 证毕.

例 2 设集合 $A=\{a,b,c\}$,则 $\rho(A)$ 共有 $2^3=8$ 个元素. 若 $A=\varnothing$,则 $\rho(A)$ 共有 $2^0=1$ 个元素,即 $\rho(A)=\{\varnothing\}$.

显见,即使 A 为空集,$\rho(A)$ 与 A 也是不同.

例 3 $A=\{a\}$,则 $\rho(A)=\{\varnothing,\{a\}\}$.

以上我们只介绍了有限个元素的集合情形,对集合为无限个元素时,仍有幂集之说,若 A 是无限元素之集,则 $\rho(A)$ 也含有无限元素,细节从略.

二、笛卡儿积

在实际生活中,有许多事物是成对出现的,而这种成对出现的事物. 具有一定的顺序. 例如,上、下;左、右;$2<7$;平面上点的坐标. 一般的有:

定义 2 两个按一定顺序排列之客体 a,b 组成一个有序列,我们叫做序偶,并记作 (a,b).

如上面我们所说的便可记为(上、下),(左,右),$(2,7)$,(x,y). 序偶反映了两个客体之间的顺序,当顺序不同时,序偶也是不同的. 如:$(x,y)\neq(y,x)$,$(2,7)\neq(7,2)$.

定义 3 两个序偶相等:$(a,b)=(c,d)$,如果 $a=c,b=d$.

注意 序偶中的二元素(客体)不一定来自同一个集合,它们可以来自不同的集合. 如 a 代表自然数,b 代表人的身高,则 a,b 也可作成序偶 (a,b) 或 (b,a);但上述两种约定,一经确定,序偶的顺序就不能再变化了. 在序偶 (a,b) 中,a 称为第一客体,b 称为第二客体.

以上序偶的概念,可以推广到任意 n 元组上去,即所谓的 n 重有序组. 一般的有:

定义 4 n 个 $(n>1)$ 按一定顺序排列之客体 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成一个有序序