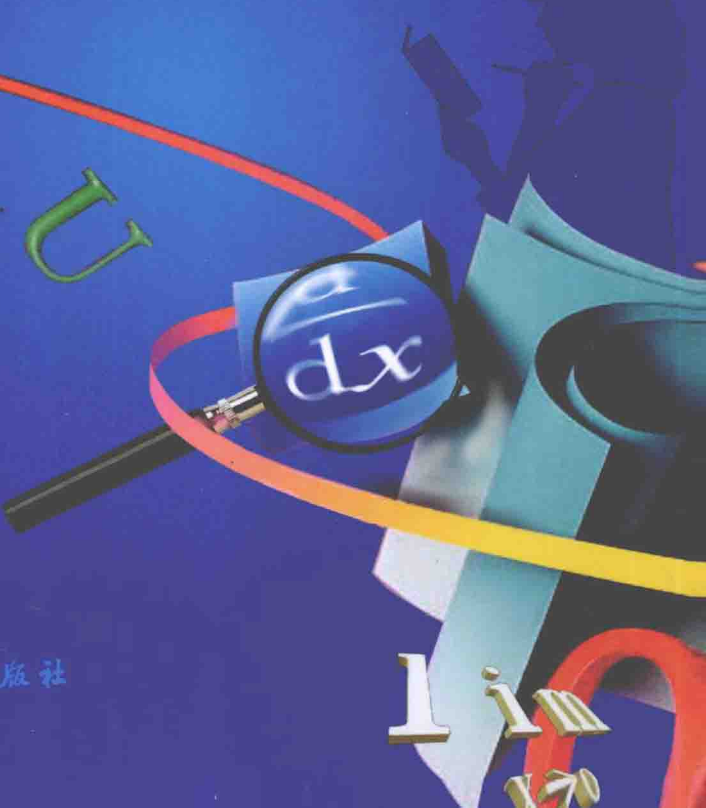
卢兴江 钱 春 蔡燧林 编著

研究生入学考试数学阅卷手记

——典型错误及解题技巧



浙江大學出版社

研究生入学考试数学阅卷手记
——典型错误及解题技巧

卢兴江　钱　春　蔡燧林　编著

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

研究生入学考试数学阅卷手记：典型错误及解题技巧／卢兴江，钱春，蔡燧林编著．—杭州：浙江大学出版社，2003.7
ISBN 7-308-03339-2

Ⅰ．研… Ⅱ．①卢…②钱…③蔡… Ⅲ．高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 039621 号

责任编辑 徐素君
出版发行 浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 浙江大学印刷厂
开　　本 850mm×1168mm 1/32
印　　张 10
字　　数 260 千
版　　次 2004 年 11 月第 2 版
印　　次 2004 年 11 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 7-308-03339-2/O・292
定　　价 17.00 元

序

自1987年全国硕士研究生入学实行统一考试以来，浙江大学数学系一直承担浙江省硕士研究生数学入学试卷的阅卷任务。每次阅卷工作结束之后，都要对整套试卷作试题分析和典型错误总结。经十余年的辛勤工作，已积累了丰富的资料，对考生答题过程中的常见问题了如指掌。随着全国招收硕士生规模的不断扩大，考研人数的迅猛增加，竞争越演越烈。为满足广大考生复习的需求，特将最近五年的全国硕士研究生入学试题及典型错误分析和解题技巧编写成书。本书能让你站在高处看考研，使你在较短的时间内提高考研的数学成绩，考出自己真实的水平，真正达到事半功倍的效果。

本书虽然只分析了数学一和数学二的试卷，但对数学三和数学四的考生有同样的参考价值。

卢兴江博士长期从事微积分、线性代数、概率论的教学工作，又是浙江大学考研复习班和硕士研究生入学数学试题阅卷组的主要成员。卢兴江博士是深受学生称赞的好教师，是辅导考研的数学专家。

钱春老师现任浙江工商大学统计学院副教授，自1991年研究生毕业后一直担任高等数学的教学工作，其深入浅出、有条不紊的讲课深受学生的欢迎。近几年皆为

浙江省研究生入学试题阅卷工作的骨干成员。并担任了部分考研课程的辅导工作,取得良好效果。

蔡燧林教授曾任浙江大学应用数学系副主任,原教育部(国家教委)1992年至2000年硕士研究生入学考试命题组组长,精通教育部的命题原则,并具有丰富的命题、阅卷和教学经验,是全国考研辅导中最有影响力、最受欢迎的人员之一。

金蒙伟

2004年10月

目　　录

一、数学(一)试题分析及答卷典型错误评析与解题技巧

§1　2000年

2000年的数学(一)与1999年相比较，题量一样，难度大致相当．其中选择、填空难度有所降低，高等数学部分计算量减少，相应地，线性代数有一道应用题，面孔陌生；概率统计中也有一生疏题．所以，两者总体无甚差异．现将数学(一)的试卷及答卷典型错误分析于后．

一、填空题

(1) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x = \underline{\dfrac{\pi}{4}}$.

本题考查　定积分的简单计算．

解　$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{x=1+\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = \underline{\frac{\pi}{4}}.$$

评注　这是一道计算定积分的基本题，因为是一道填空题，不必列出计算过程，所以也可以由定积分的几何意义来获得结果．此定积分表示圆 $x^2+y^2-2x=0$ 所围成的面积的 $\dfrac{1}{4}$，此圆半径为1，故得 $\dfrac{\pi}{4}$．这种利用几何意义来获得结果的题，在二重积分、三重积分中也会出现．

(2) 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 的法线方程为 $\underline{\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}}$.

本题考查 曲面的法向量与法线方程.

解 命 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$. 曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 $(1,-2,2)$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{2x,4y,6z\}_{(1,-2,2)}=\{2,-8,12\}$. 由直线方程的点向式得法线方程如上.

典型错误 不少考生填了切平面方程:$(x-1)-4(y+2)+6(z-2)=0$,粗心大意而失分.

(3) 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为 $y=\underline{C_1+C_2x^{-2}}$.

本题考查 二阶可降阶微分方程的解法.

解 命 $y'=p$,有 $xp'+3p=0$,分离变量解之得 $p=\dfrac{C}{x^3}$,即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{C}{x^3}$,再分离变量积分得 $y=-\dfrac{C}{2x^2}+C_1$,改写 $C_2=-\dfrac{C}{2}$,答案如上.

评注 本题十分基本,得分率高.

(4) 已知方程组 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 无解,则 $a=\underline{-1}$.

本题考查 线性方程组无解的充分必要条件.

解法 1 初等变换法:

$$\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&a(a-2)-3&a-3\end{bmatrix}$$

若 $a(a-2)-3=(a-3)(a+1)\neq 0$,则该方程组存在惟一解.若 $a=3$,该方程组系数矩估计量与增广矩阵的秩都为 2,方程组有无穷多解.若 $a=-1$,系数矩阵的秩为 2,增广矩阵的秩为 3,方程组无解.故填 $a=-1$.

解法 2 因方程组的个数与未知数的个数相等,由克莱姆法则知,存在惟一解的充分必要条件是系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = a(a-2)-3=(a-3)(a+1)\neq 0.$$

当 $a=3$ 时,写出相应的方程组,可见该方程组有无穷多解.
当 $a=-1$ 时,写出相应的方程组,该方程组无解,故填 $a=-1$.

典型错误 不少考生填了两个答案 $a=3$ 或 -1.由上面解法可见,产生这种错误的原因是,只知其一不知其二,由克莱姆法则,方程组存在惟一解的充分必要条件是 $(a-3)(a+1)\neq 0$.当不满足时,方程组可能无解,也可能有无穷多解,考生还应进一步区分哪种情形为无解.也许在命本题时,故意设置两解,考生须仔细区分哪种情形无解.

(5) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$,A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,则 $P(A)=$ $\underline{2/3}$.

本题考查 概率运算法则的正确使用.

解 $P(A)=P(A(B\cup\overline{B}))=P(AB)+P(A\overline{B})$,$P(B)=P(BA)+P(B\overline{A})$.因为 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$,所以 $P(A)=P(B)$.$1/9=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-P(A))(1-P(B))=(1-P(A))^2$,所以 $P(A)=2/3$.

典型错误 大概有三分之一的考生填 4/9,这恐怕是将相互独立与互不相容概念混淆了.考生误认为 A 与 B 互不相容,从而 $\frac{1}{9}$

$= P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B))$

$= 1 - 2P(A)$，于是 $P(A) = \dfrac{4}{9}$. 必须指出，1999 年数学(一) 填空第 (5) 题，也有不少考生将独立误为不相容而错了，这应引起考生注意.

二、选择题

(1) 设 $f(x)$，$g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$，则当 $a < x < b$ 时，有[A].

(A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$　　(B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$　　(D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

本题考查　用不等式判定单调性，用单调性讨论不等式，是一道常规题.

解　粗看起来，选项眼花缭乱，其实仔细审题发现，(A)、(B) 两项是 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在区间 (a,b) 内的值与两端点处的值比大小，(C)、(D) 两项是 $f(x)g(x)$ 在区间 (a,b) 内的值与两端点处的值比大小，题干中含有某种形式的导数的不等式，就用单调性. 经验算，$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 (a,b) 内严格单调减少，故 $\dfrac{f(x)}{g(x)} > \dfrac{f(b)}{g(b)}$. 选(A).

评注　本题错选的考生不少.

(2) 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geqslant 0)$，$S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分，则有[C].

(A) $\displaystyle\iint_S x\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} x\mathrm{d}S$.　　(B) $\displaystyle\iint_S y\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} x\mathrm{d}S$.

(C) $\displaystyle\iint_S z\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} x\mathrm{d}S$.　　(D) $\displaystyle\iint_S xyz\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} xyz\mathrm{d}S$.

本题考查　函数的奇偶性与积分区域对称性.

解 由于 S 关于 yOz 平面和 xOz 平面都对称，故 $\iint\limits_{S} z\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} z\mathrm{d}S$；另外，在 S_1 上，x 与 z 为轮换对称，所以 $\iint\limits_{S_1} z\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S$. 故选(C).

典型错误 选(D)的考生与选(C)的考生差不多一样多. 误选的原因恐怕在于：认为$\iiint\limits_{S} xyz\mathrm{d}S$ 的被积函数 xyz 既是 x 的奇函数，又是 y 的奇函数，就误认为 xyz 是"偶函数"！这是不正确的. 不能对二个变量的函数混在一起谈奇、偶性. 事实上，对于固定的 y 和 z，xyz 为 x 的奇函数，而对于固定的 y 和 z，区域 S 关于 yOz 平面对称，所以 $\iint\limits_{S} xyz\mathrm{d}S = 0$，而右边 $\iint\limits_{S_1} xyz\mathrm{d}S > 0$，所以(D)不对. 读者可以看到以上分析仍归结到一元的对称性与奇偶性上去. 应该指出，类似的题目，也可以在二重积分，三重积分以及第一型曲线积分，第二型曲线积分或第二型曲面积分上出现，应引起考生注意. 详见参考文献[1].

(3) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为<u>[D]</u>.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{u_n}{n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} + u_n)$

本题考查 收敛级数的性质.

解 (D)的通项是两个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的通项和，由收敛级数的性质知(D)正确.

典型错误 有许多考生误选(A)和(B)，恐怕是误认为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

为正项级数,可题目中没有这么说啊!这种想当然,审题不仔细,或者乱用定理(只能用于正项级数的定理乱用于一般项级数)的情况,在答卷中比比皆是,应引起注意.也有的考生选(C),大概把(C)的通项也理解为两个收敛级数通项的差,其实这是不对的(须注意脚号的奇、偶性).

(4) 设 n 维列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m(m<n)$ 线性无关,则 n 维列向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件为[D].

(A) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性表示.

(B) 向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

(C) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A}=[\alpha_1,\cdots,\alpha_m]$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=[\beta_1,\cdots,\beta_m]$ 等价.

本题考查 向量组线性无关的充分必要条件,两矩阵等价的充分必要条件,两向量组等价与两矩阵等价的区别.

解 由题设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m(m<n)$ 线性无关.若(A)成立,向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性表示,从而推知 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 必线性无关(否则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 必线性相关了),所以(A)是 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分条件,但(A)不是 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的必要条件.事实上,若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 都线性无关,而 $m<n$,所以这两组之间可以毫无关系(如果 $m=n$,那么由 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的线性无关,推知它是 n 维向量空间中的一组基,故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 必可由 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性表示,即推知(A)也是必要条件).至于若(B)成立,向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示,没有说怎么表示,所以 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 既可线性相关,也可线性无关,故(B)既非充分条件,又非必要条件.至于(C),实际上是将(A)、(B)合并在一起的说法,但(B)既非充分又非必要,故(C)只是充分(由(A)),并非必要.(D)是正确的,理由是(D)成立的充分必要条件是两向量组的秩相等,而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的秩为 m,这恰恰是 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件!

典型错误 有相当多的考生答(C).其原因大概是误认为两

向量组等价的充分必要条件是两向量的秩相等，这是不对的．两向量组若等价，则它们的秩必相等；而反之并不成立．

(5) 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $\xi = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 不相关的充分必要条件为$\underline{[\mathrm{B}]}$．

(A) $E(X) = E(Y)$

(B) $E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

(C) $E(X^2) = E(Y^2)$

(D) $E(X^2) + [E(X)]^2 = E(Y^2) + [E(Y)]^2$

本题考查　两个二维随机变量不相关的充分必要条件．

解　ξ 与 η 不相关的充分必要条件是 $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$．而 $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - (E\xi)(E\eta) = E((X+Y)(X-Y)) - E(X+Y)E(X-Y) = E(X^2 - Y^2) - (EX + EY)(EX - EY)$．

评注　本题得分率较高，只要记住其充分必要条件是 $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$，再计算 $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$ 即可．

三、求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}} + \dfrac{\sin x}{|x|}\right)$．

本题考查　正确掌握分左、右极限求极限值．

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}} + \dfrac{\sin x}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+1}{\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}(\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+1)} + \dfrac{\sin x}{x}\right) = 1$；

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}\right) = 2 - 1 = 1.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}\right) = 1.$$

典型错误　分 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$ 讨论，而这两个极限都不

存在，就答原题极限不存在，这是错误的．一般，带有 $|x|$，$e^{\frac{1}{x}}$，以及在 $x=0$ 为分界点的分段函数求 $x\to 0$ 时的极限，都要分 $x\to 0^+$ 与 $x\to 0^-$ 讨论．本题属基本题．

四、设 $z=f(xy,\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

本题考查　求复合函数的二阶偏导数，是一道基本题．

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f_1'+y(xf''_{11}-\frac{x}{y^2}f''_{12})-\frac{1}{y^2}f_2'\\&\quad+\frac{1}{y}(xf''_{21}-\frac{x}{y^2}f''_{22})-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''\\&=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf''_{11}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''.\end{aligned}$$

典型错误　与历年答卷的错误类似，一是求二阶偏导数时漏项或不会计算，二是 $\frac{\partial}{\partial x}g(\frac{y}{x})$ 写成 $g_x'(\frac{y}{x})\cdot(-\frac{y}{x^2})$．这里 g' 中的下标 x 是错误的，因 g' 是对中间变量 $\frac{y}{x}$ 求导，不是对 x 求导！

五、计算曲线积分 $I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周 $(R>1)$ 取逆时针方向．

本题考查　封闭曲线的第二型（对坐标的）曲线积分的计算．应该采用挖洞法计算之．

解　按常规记 $P(x,y)$，$Q(x,y)$，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\text{当}(x,y)\neq(0,0).$$

作环绕点 $O(0,0)$ 的封闭曲线

$$l:\ x=\frac{\delta}{2}\cos t,\ y=\delta\sin t,\text{从 } t=0 \text{ 到 } t=2\pi.$$

有

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} = \oint_l \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\delta^2(\cos^2 t + \sin^2 t)\mathrm{d}t}{2\delta^2}$$
$$= \pi.$$

评注 计算平面曲线积分及与此相关的题,可以说是历年必考的题.已知被积表达式并且明确是以曲线积分形式给出的题,有多种解法,详见参考文献[1].

典型错误

① 有考生直接用参数式 $x = 1 + R\cos t, y = R\sin t$ 从 $t = 0$ 到 2π 来计算,得

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 + R\cos t}{4(1 + R\cos t)^2 + R^2\sin^2 t}\mathrm{d}t,$$

计算复杂,不能说上式不对,但大多数人做不下去.

② 有一些考生验算 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$,发现结果为零,就认为由格林公式,此积分应为 0,这就错了.因为 P、Q 在点 $O(0,0)$ 不具有连续性、可导性,L 所包围的区域不是一个单连通区域,格林公式不能用于 L 所包围的区域.

③ 也有一些考生知道要挖洞,不过挖的洞是 $l_1: x = \delta\cos t, y = \delta\sin t, \delta > 0, t$ 从 $0 \sim 2\pi$ 所包围的区域,从而有

$$I = \oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} = \oint_{l_1} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2}$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{\delta^2\mathrm{d}t}{4\delta^2\cos^2 t + \delta^2\sin^2 t} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + 3\cos^2 t},$$

但该积分不会算,仍然不能获解!

④ 也有一些考生见此积分感到面熟,记住有所谓“循环量”这么一个东西,不管对不对就将 2π 写上,这当然不对.

六、设对于半空间 $x > 0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S,都有

$$\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$，求 $f(x)$.

本题考查 高斯公式的运用，在面单连通区域内，封闭曲面第二型(对坐标的)曲面积分为零的充分必要条件，某一阶微分方程的求解.

解 由高斯公式，推得 $f(x)$ 应满足的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = xf'(x) + (1-x)f(x) - \mathrm{e}^{2x} = 0.$$

其中 P、Q、R 按通常理解，在 $x > 0$ 条件下解微分方程

$$f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)f(x) = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x},$$

得 $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x + C)$. 又由条件 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$，故有 $C = -1$，最后得 $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x - 1)$.

评注 在历届考题中未出现过这种题型，有新意，但从第二型曲线积分中得到启发(或类比)，所以答卷情况尚可. 由条件 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ 定 C，也有新意，但考生还是容易掌握的.

典型错误

① 将 $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0$ 写成 $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial R}{\partial z}$，成为一个方程组，解不出 $f(x)$！这是似是而非的类比，对高斯公式没有掌握.

② 有的考生用了斯托克斯公式. 要知道题目给的是封闭曲面的曲面积分，而不是空间封闭曲线的曲线积分，张冠李戴！

③ 不会或不去定 C. 对这些考生来说，学得太死，只知由 $f(x_0) = y_0$ 定 C，而不知道通过 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0) = y_0$ 也可以定 C.

七、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛区间，并讨论该区间端点处的收敛性.

本题考查 幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域的确定.本题在求端点的收敛性时，用到级数的性质讨论其敛散性.

解 记 $a_n=\dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{1}{3}$ 知，收敛半径为 3，收敛开区间为 $(-3,3)$. 在 $x=3$ 处，级数通项

$$\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{1+(-\frac{2}{3})^n}\cdot\frac{1}{n}>\frac{1}{2n}.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散，所以原级数在 $x=3$ 处发散. 在 $x=-3$ 处，将通项拆成

$$\frac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=(-1)^n\frac{1}{n}-\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n},$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n}$ 都收敛，从而在 $x=-3$ 处收敛.

典型错误

① 求收敛半径时不用极限，例如写成 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{3}$，就说收敛半径为 3. 或由 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|x|<1$ 推知 $|x|<3$ 收敛.

② 在 $x=-3$ 处，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(-3)^n$ 明明是个交错级数，却用正项级数的比较判别法的极限形式. 说成由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n(-3)^n}{(-1)^n}n=1$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(-3)^n$ 收敛.