

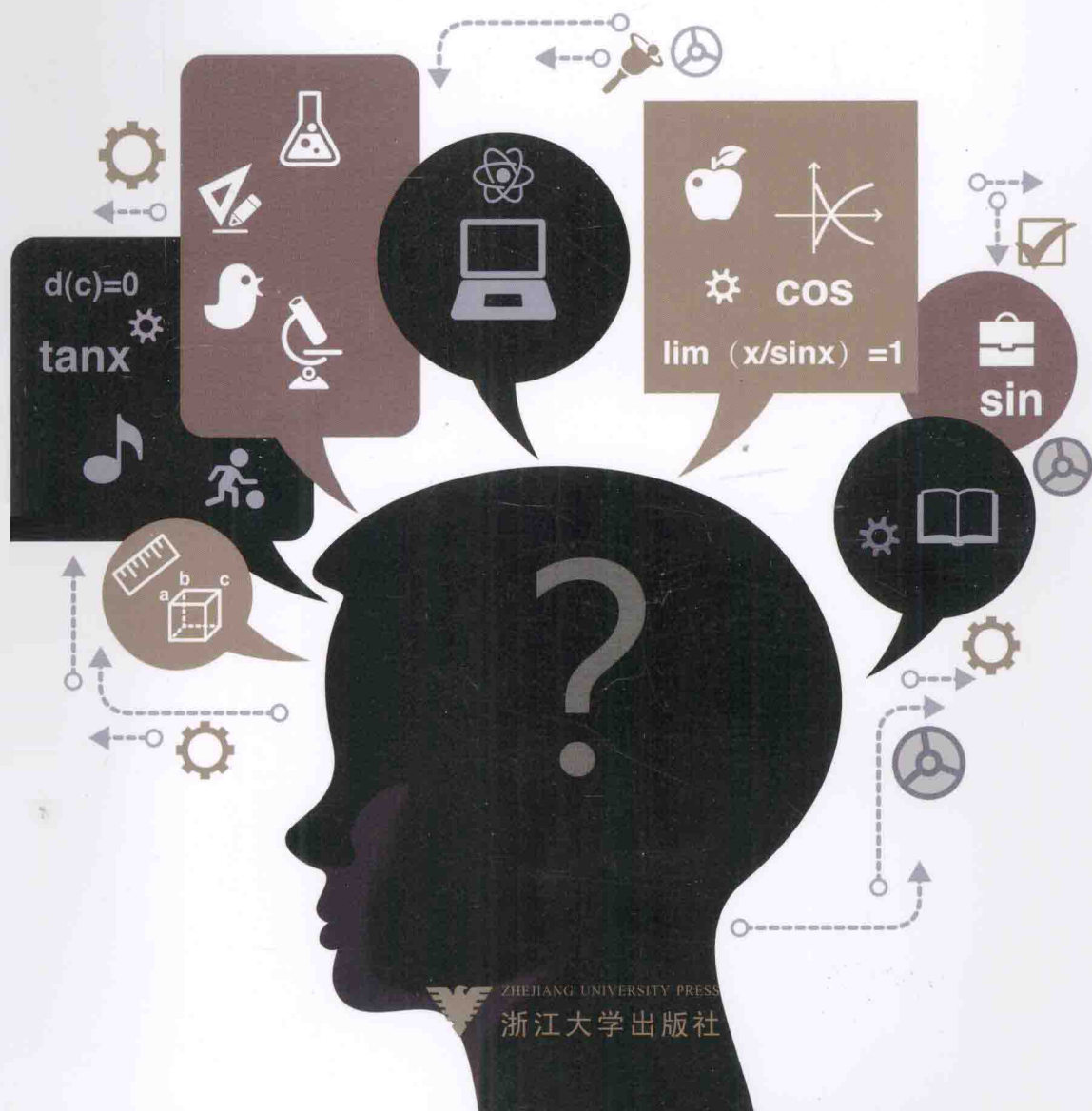


浙江省重点教材建设项目

文科高等数学

Advanced Mathematics
for Liberal Arts Students

○主 编 孙方裕 陈志国 ○副主编 孙林法 汤建康 叶兴德 梁克维



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

浙江省重点教材建设项目

文科高等数学

主 编 孙方裕 陈志国
副主编 孙林法 汤建康
叶兴德 梁克维



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内容提要

本书是高校文科类学生高等数学教材. 全书由五部分组成, 分别是绪论、微积分、线性代数、概率统计初步和科学计算简介. 教师可根据教学需要和教学时数选择相应的教学内容.

全书根据文科类学生的特点, 注重内容的广度和恰当的深度, 除了在绪论中介绍数学简史和数学文化外, 还将数学文化和数学思想贯穿于全书之中, 互相衔接, 融会贯通, 使读者得到更好的科学素养训练. 本书也可作为理工科学生和教师的参考教材.

图书在版编目 (CIP) 数据

文科高等数学 / 孙方裕, 陈志国主编. — 杭州:
浙江大学出版社, 2014. 5
ISBN 978-7-308-13105-6

I. ①文… II. ①孙…②陈… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 074042 号

文科高等数学

孙方裕 陈志国 主编

责任编辑 邹小宁

封面设计 涂青岚

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排版 杭州中大图文设计有限公司

印刷 临安市曙光印务有限公司

开本 787mm×1092mm 1/16

印张 18.25

字数 445 千

版印次 2014 年 5 月第 1 版 2014 年 5 月第 1 次印刷

书号 ISBN 978-7-308-13105-6

定价 36.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部联系方式: 0571-88925591; <http://zjdxcbbs.tmall.com>

前 言

本书是高校文科类学生高等数学教材,全书由五部分组成,分别是绪论、微积分、线性代数、概率统计初步和科学计算简介。

早在 1989 年,美国国家研究委员会在一份题为《人人关心数学教育的未来》的研究报告中指出:“对所有学生进行优质的数学教育是兴旺发达的经济所必需的。”“数学上的文盲既是个人的损失又是国家的债务。”作为现代科学技术的基础,数学不仅在自然科学和工程技术领域有着举足轻重的作用,在社会科学和人文科学等领域也发挥着越来越重要的影响。数学抽象性、逻辑性、精确性和应用性的特点对开阔文科学生的视野、培养其科学态度和科学思维方式都具有重要的作用,高等数学教育已经成为文科学生数学素养和科学综合素质教育的一个重要组成部分。目前,在文科类学生中开设《高等数学》课程已是各高校的共识。

本书力图内容的广度和深度恰当的结合,在介绍数学知识的同时,强调培养学生的数学思维能力,引导学生体会和吸收数学文化与数学思想。作为文科类高等数学教材,无论是教学内容还是形式,我们追求在数学知识教育过程中,贯穿数学史、数学文化、数学思维和数学思想的教育,除了在绪论介绍数学史和数学文化外,还在各个章节中也穿插相应的数学背景,将数学文化、数学思想与数学知识有机地结合,并将其渗透到教学中,使学生能更清楚地了解数学与人类文明的关系,了解数学在人类发展进程中的重要作用,从而使学生能够在掌握数学知识的基础上,了解和掌握基本的数学思维方法,提高文科学生的科学综合素质。

本书深入浅出,难易恰当。对于一些重要的概念如极限概念等,我们给予了充分的叙述,使学生能更好地了解和掌握高等数学中最本质的概念、最基本的知识和基本的数学思维与数学方法,从而使学生能够更好地体会数学,培养和提高学生的抽象思维能力。

随着计算机科学和技术的不断发展,科学计算已成为继实验和理论之后的第三种科学研究的方法和工具,改变了人们对数学的传统认识。简单地说,科学计算就是研究如何利用计算机有效地解决来源于科学与工程中的各类计算问题的方法和理论。为此,我们把“科学计算简介”作为本书的最后一部分,以期让学生能更全面地了解数学。

本课程适合于 4 学时/周,约 64 学时。其中“绪论”部分和“科学计算简介”部分可根据情况选讲或由学生自学;打“*”部分供教与学的参考,教师可根据教学情况决定选讲。

本书的绪论、第一部分中的第一章、第二章和第六章由孙方裕撰写,第一部分的第三章、第四章和第五章由孙林法撰写,第二部分由汤建康撰写,第三部分由陈志国撰写,第四部分由叶兴德撰写,孙方裕对全书进行了认真仔细的修改、校对并统稿,全书的整理和网站建设由梁克维负责。陈杰诚教授和吴翔老师对书稿进行了非常认真的审阅,并提出了许多宝贵的

意见和建议,在此表示衷心的感谢.

本书初版于 2009 年. 该书出版后,作为浙江大学文科类学生高等数学课程用教材,经过近几年的教学实践,结合任课教师和学生的意见和建议,又由于初版成书时间较紧,匆忙之中有一些错误疏漏之处,均需对本书进行重新修改和补充,以更好地适应文科类学生使用. 本书在初版的基础上,增加了集合与实数概要、三角函数简介、排列组合简介等作为预备知识,以帮助部分读者因未学过这方面的内容而产生的学习上的困难. 编者对全书进行了仔细的审阅,并作了部分修改,适当增加了例题和习题,以帮助读者能更好地掌握相关概念、基本的分析和运算方法,并在书末附上了习题参考答案,方便读者自我检查.

由于编者水平有限,书中难免仍会有一些错误和不足之处,诚恳地希望得到专家、同行和读者的批评指正.

编者

2013 年 10 月于求是园

目 录

绪 论	1
预备知识	25

第一部分 微 积 分

第一章 函 数	31
第一节 函数的概念	31
第二节 函数的基本性质	33
第三节 复合函数与反函数	35
第四节 初等函数	37
习题一	38
第二章 极限与连续	40
第一节 数列极限	41
第二节 函数极限	42
第三节 极限的运算法则和两个重要极限	46
第四节 函数的连续性	51
习题二	55
第三章 导数与微分	57
第一节 导数的概念	57
第二节 求导法则	66
第三节 微分	76
习题三	83
第四章 微分中值定理与导数的应用	85
第一节 微分中值定理	85
第二节 洛必达法则	90
第三节 利用导数研究函数的性质	95
第四节 利用导数研究函数的图像	102
第五节 导数在经济学中的应用	106
习题四	112
第五章 不定积分	116
第一节 不定积分	116

第二节 换元积分法和分部积分法·····	120
第三节 简单微分方程·····	129
习题五·····	137
第六章 定积分 ·····	140
第一节 定积分的概念和基本性质·····	140
第二节 定积分的计算·····	146
第三节 定积分的应用·····	149
习题六·····	152

第二部分 线性代数

第七章 矩 阵 ·····	157
第一节 矩阵的概念·····	157
第二节 矩阵的运算·····	159
第三节 矩阵的应用·····	165
第四节 矩阵的初等变换·····	170
第五节 方阵的行列式·····	172
习题七·····	178
第八章 矩阵的秩与线性方程组 ·····	181
第一节 矩阵的秩·····	181
第二节 线性方程组的解·····	183
习题八·····	193

第三部分 概率统计初步

第九章 随机事件的概率 ·····	197
第一节 随机现象及其统计规律性·····	197
第二节 古典概型·····	201
第三节 公理化体系概率·····	204
习题九·····	206
第十章 全概率公式、贝叶斯公式 ·····	208
第一节 条件概率与概率的乘法公式·····	208
第二节 事件的独立性·····	210
第三节 全概率公式、贝叶斯公式·····	212
第四节 贝努里概型·····	214
习题十·····	216

第十一章 随机变量的概率分布	217
第一节 随机变量	217
第二节 期望与方差及贝努里大数定律	220
习题十一	222
第十二章 一元正态分布及其简单应用	223
第一节 一元正态分布	223
第二节 一元正态分布的简单应用	225
习题十二	228
第十三章 数理统计初步	230
第一节 数理统计的基本概念	230
第二节 样本均值与样本方差	231
第三节 众数与中位数	232
习题十三	233

* 第四部分 科学计算简介

第一节 引言	237
第二节 算法	239
第三节 误差	241
第四节 多项式插值	244
第五节 数值积分	250
第六节 线性方程组的 Jacobi 迭代法	257
第七节 方程求根	260
第八节 常微分方程的数值解法	267
习题	270
习题参考答案	272
附录 常用希腊字母表	282
参考文献	283

绪 论

在西方文明中,数学一直是一种主要的文化力量.几乎每个人都知道,数学在工程设计中具有极其重要的实用价值.但是却很少有人懂得数学在科学推理中的重要性,以及它在重要的物理科学理论中所起的核心作用.至于数学决定了大部分哲学思想的内容和研究方法,摧毁和构建了诸多宗教教义,为政治学说和经济理论提供了依据,塑造了众多流派的绘画、音乐、建筑和文学风格,创立了逻辑学,而且为我们必须回答的人和宇宙的基本问题提供了最好的答案,这些就更加鲜为人知了.作为理性精神的化身,数学已经渗透到以前由权威、习惯、风格所统治的领域,而且取代它们成为思想和行动的指南.最为重要的是,作为一种宝贵的、无可比拟的人类成就,数学在使人赏心悦目和提供审美价值方面,至少可与其他任何一种文化门类媲美.

——莫里斯·克莱因

作为最古老的学科之一,数学在其五千多年的发展过程中,为人类社会的不断进步发挥了重要的作用,作出了巨大的贡献.数学作为一门科学,它具有各个科学分支所共有的实事求是、锲而不舍地追求真理的科学精神,同时就像其他学科一样,由于数学本身的特点,它又具有一些其他学科所没有的独特的精神.美国国家研究委员会早在20世纪80年代末就提出“数学是打开机会大门的钥匙.现在数学不再只是科学的语言,它也以直接的和基本的方式为商业、财政、健康和国防作出贡献”,“对所有学生进行优质的数学教育是兴旺发达的经济所必需的”.

数学研究的对象涵盖了整个世界和人类社会的各个方面,只要有数,有形,有运动和变化,有相互关系,就有数学.但数学并非就事论事,而是将客观世界中种种现象加以抽象、概括,舍弃了物质的具体形态和属性,纯粹从数量关系和空间形式的角度来寻求其内在的规律,并且最大限度地探求一般的模式和一般的算法,从而具有其他学科所不及的高度的抽象性.也正因为有这种高度的抽象性,才使得它在应用时具有极大的普适性.数学追求的是高度简洁而又形式完美,这是一种更深层次更为广延的美.数学具有一种特有的揭示真理到尽善尽美的精神.“剑桥分析学派”代表人物、英国著名数学家哈代(Hardy,1877—1947)认为“数学家跟画家或诗人一样,也是造型家,如果说数学家的造型比画家和诗人的造型更能经受时间的考验,这是因为前者是由概念塑造的.画家造型用形与色,诗人则用语言”,“数学家的造型与画家或诗人的造型一样,必须美;概念也像色彩或语言一样,必须和谐一致”.

世界著名经济学家、美国麻省理工学院斯隆管理学院莱斯特·梭罗(Lester Thurow)曾说:“学生们在离开学校时还这样不懂得数学,他们怎么能在数学化的社会中竞争呢?”美国国家研究委员会也指出:“数学比大多数其他学科为学生提供更多的特殊机会来学习不同于权威力量的思考能力.……数学的基本能力所要求的不只是只通晓算术.……数学揭示出隐



蔽的模式以帮助我们了解周围的世界.……数学是关于模式和秩序的科学.……除了定理和理论外,数学提供了有特色的思考方式,包括建立模型、最优化、符号化、推断、逻辑分析、抽象化.……数学是我们这个时代的看不见的文化.数学的观念在众多不同的层次上影响到我们的生活方式和工作方式.数学是人类文化的一个深刻而强有力的部分.”在文科学生中,开设文科高等数学,对于文科学生提高数学素养和科学素质,都具有重要的作用.

一、早期东方数学

在原始文明中,人们运用经验法则,已经迈出了数学上简单的几步,这样的几步无疑地纯粹由实际需要所推动.计数的需要产生计数法(记忆数字与计算数字,包括四则基本运算),从而产生数系.同样,几何无疑也是为了满足人们的需要而产生的,如基本的几何概念来源于对物质实体所形成图形的观察.

在有文字记载以前,记数和简单的算术就发展起来了.打猎的人知道,把2枚箭矢和3枚箭矢放在一起就有了5枚箭矢.对于计数方法,一种最简单的方法可能就是用手指计数,例如,人们在数羊的只数时,扳几个手指头就表示几只羊.人类曾经有多种计数方法,并逐渐产生了三种有代表性的记数方法,即石子记数(有的是用小木棍)、结绳记数和刻痕记数(刻在木头、石块或兽骨上等),这样除了能记录较大的数字外,同时也便于累计和保存.不同民族的人对计数方式有所不同,如英国酒保常在石板上画记号来计数顾客饮酒的杯数,而西班牙酒保则通过向顾客的帽子里投放小石子来进行计数.然而,人类把数(例如2)作为共同性质抽象出来,则需经过漫长时间,正如伯特兰·罗素所说:“当人们发现一对雏鸡和两天之间有某种共同的东西(数字2)时,数学就诞生了.”

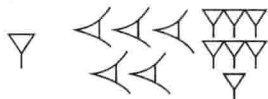
作为四大文明古国,中国、古巴比伦、古埃及和古印度在世界数学发展史上留下了宝贵的财富,是世界数学早期发展的主要力量,为世界数学发展作出了重要贡献.

(一)古巴比伦

作为世界文明古国之一的古巴比伦是指美索不达米亚的东南部,即现巴格达周围向南直到波斯湾,位于流经巴格达的底格里斯河和幼发拉底河之间,具有丰富的两河流域文化,并曾经三次达到人类文明的最高点.古巴比伦人居住在河流之滨,那里土地肥沃,易于灌溉,并孕育出灿烂的文明,除了创造出楔形文字以外,还制定出最早的法典,建立了城邦,发明了陶轮、帆船、耕犁等.作为古代两河流域最壮丽最繁华的都城,巴比伦古城有尼布甲尼撒王宫和著名的“空中花园”等壮观的建筑物以及传说中让上帝感到又惊又怒的“巴别通天塔”.

19世纪前期,在亚洲西部伊拉克境内发现了50万块泥版,泥版上密密麻麻地刻有奇怪的符号.这些符号实际上就是巴比伦人所用的文字,距现在近五千年,人们称这些形状像楔子的文字为“楔形文字”.科学家经过研究发现,泥版上记载的,是巴比伦人已获得的知识,其中包括数学知识.

古人最初用石块、绳结计数,后来又用手指计数.一个指头代表1,两个指头代表2,……到数到10时,就需要重新开始.由此,巴比伦人产生了“逢十进一”的概念.由于一年中月亮有12次圆缺,一只手又有5个手指头, $12 \times 5 = 60$,这样他们就又有了每隔六十进一的另一种计数法.尽管采用十与六十两种混合进位制的计数体系,巴比伦人已经具有位值制的概念并有效地使用.在泥版上,巴比伦人用“ ∇ ”表示1,用“ $\angle$ ”表示10,其他数通过“ ∇ ”和“ $\angle$ ”的组合实现.比如



表示： $1 \times 60 + 57$ 。

巴比伦人还掌握了许多计算方法,并且编制了各种数表帮助计算.在这些泥版上就发现了乘法表、倒数表、平方和立方表、平方根表和立方根表.巴比伦人也掌握了初步的几何知识,他们会把不规则形状的田地分割为长方形、三角形和梯形来计算面积,也能计算简单的体积.他们熟悉等分圆周的方法,求得圆周与直径的比 $\pi \approx 3$. 令人惊奇的是在一块公元前1600年的称为“普林顿 322”(被收藏编号为 322 的普林顿收藏过,现存于纽约哥伦比亚大学图书馆)的泥板上,刻着一张表格(大小为 $12.7\text{cm} \times 8.8\text{cm}$),由 4 列 15 行六十进制数字组成,经研究发现其中有几组数分别是边长为整数的直角三角形斜边边长和一个直角边边长,由此推出另一个直角边边长,即勾股定理($a^2 + b^2 = c^2$).

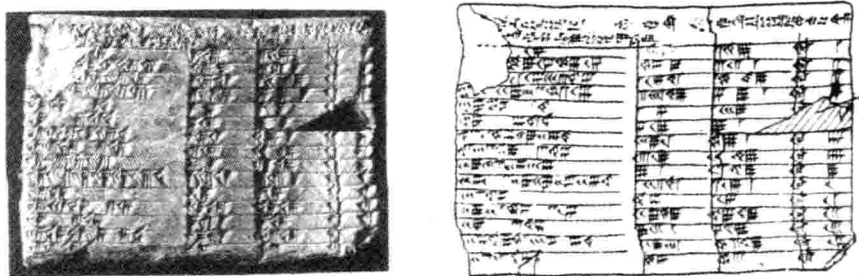


图1 “普林顿 322”泥书版和“普林顿 322”摹真图

巴比伦人的成就对后来数学的发展产生了重要的影响.

(二) 古埃及

埃及位于地中海的东南角,横跨亚非两大洲,大部分位于非洲东北部.它的西面和南面是世界上最大的撒哈拉大沙漠,东面、北面大部分被红海、地中海环绕,唯一的陆上出口是面积只有 6 万平方公里的西奈半岛,并因此古埃及得以维持长期的安定.埃及拥有一条世界上最长的河流——尼罗河,自南向北贯穿埃及全境,最后注入地中海,其两岸狭长、土地肥沃的河谷,造就了以古老的象形文字和巨大的金字塔为标志的绵延三千年的古埃及文明,史称尼罗河文明.

金字塔以其宏伟高大的气势,一直吸引着无数观光的游客.公元前 2500 年左右建造的金字塔是埃及文化的象征,也是埃及数学水平的体现,其别致的设计,精巧的建造,让世界各国的科学家们为此着迷.最大的胡夫金字塔,原高 146.5m(现因损坏高 137m),基底的正方形边长 233m(现为 227m).在这么长的范围内,误差却非常小:底边长度的误差仅仅是 0.016m,是全长的 $1/14600$;基底直角的误差只有 $12''$,是直角的 $1/27000$.如此高的精确度,令世人惊叹不已.

在尼罗河三角洲盛产一种和芦苇很相像的水生植物——纸莎草,古埃及人把这种草从纵面剖成小条,连接成片后再压干,就可以在上面写字了.古埃及人的这些文字因为写在纸莎草上,所以称它为“纸草书”.古埃及人一直在这种纸上书写,后来被希腊人和罗马人沿用,

直到 3 世纪才被价钱更低、可以两面书写的羊皮纸取代. 现在我们主要是通过两部纸草书(即现存于莫斯科普希金美术博物馆的“莫斯科纸草书”和以苏格兰古董商人莱茵特命名的存于大英博物馆的“莱茵特纸草书”)来了解古埃及的文化和数学成就. 纸草书中讲述了埃及的乘法、除法、埃及分数、求圆面积问题和一些数学应用方面的问题, 是两部实用的数学问题集, 特别是埃及分数引申出来的丢番图方程等一些数论问题及由此产生的新的问题, 成为纸草书中最有价值的内容之一, 有些问题至今仍未能解决. 例如, 由埃及分数引申, 1984 年沃尔夫奖获得者、匈牙利数学家爱多士曾猜测:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},$$

当 $n > 1$ 时总有解. 但迄今仍未得到完全解决.

另外, 古埃及人计算矩形、三角形和梯形的面积等的结果, 已和现代的计算值十分相近. 比如, 他们用公式:

$$S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2. \quad (d \text{ 为直径})$$

计算圆的面积, 这相当于取 $\pi = 3.1605$, 这在当时已经是非常了不起的.

有了这样充足的数学知识和计算能力, 古埃及人建成金字塔就不足为奇了.

(三) 古印度

文明古国印度, 具有悠久的历史, 史称“哈拉帕文化”或“印度河流文化”. 早在公元前 2000 年以前, 有一支操印欧语的游牧民族长途跋涉, 从中亚细亚越过外喜马拉雅山进入北印度并留了下来. 这些人被称为雅利安人, 另一部分人则西迁, 成为伊朗人和欧洲人的祖先. 雅利安人征服了达罗毗荼人, 使得北部地区成为印度的文化核心区, 其影响逐渐扩散到整个印度, 并创造了书写和口语的梵文, 以及印度最古老的宗教——吠陀教. 古代印度的文化便是根植于吠陀教和梵语之上. 吠陀教因其唯一的圣典《吠陀》而得名, 《吠陀》中有论及庙宇、祭坛的设计与测量的部分《测绳的法规》, 即《绳法经》, 是印度最早的数学文献, 其数学问题涉及祭坛设计中的几何图形和代数计算, 包括勾股定理的应用、矩形对角线的性质、相似图形的性质及一些作图法等.

古印度早期数学与宗教、天文学联系在一起. 公元前 3 世纪以后, 出现书写数学符号和十进位值制计数法, 而用扁圆符号“0”表示零, 是印度数学的一大发明, 具有重要意义.



图 2 最早的印度数字符号

古印度数学采用十进制位值制, 引进了十进制的数字, 不同位置的数字表示完全不同的含义, 大大简化了数的运算, 并使计数法更加明确. 于 1881 年发现的“巴克沙利手稿”(由一个佃户在巴克沙利村庄发现的书写在桦树皮上的“手稿”)上记载了公元纪年前后数个世纪的印度数学, 内容十分丰富, 涉及分数、平方数、数列、比例、收支与利润计算、级数求和、代数

方程等,手稿中已经出现了完整的十进制数码,其中零号用实心的点表示.古印度人很早就会用负数表示欠债和反方向运动.他们还接受了无理数的概念,在实际计算的时候,把适用于有理数的计算方法和步骤运用到无理数中去.

印度数学虽在几何方面没有取得大的进展,但古印度人对三角学贡献很大,这是他们热衷于研究天文学的副产品.如在他们的计算中,用到了相当于现代的正弦和余弦.他们还知道一些三角量之间的关系,比如“同角正弦和余弦的平方和等于1”等,古印度人还会利用半角表达式计算某些特殊角的三角值.

公元5—12世纪是印度数学的迅速发展时期,涌现出了阿耶波多、婆罗摩笈多、马哈维拉和婆什迦罗等著名数学家,他们在三角学、不定方程、代数方程求解上的成就在世界数学史上占有重要地位.

古印度人对古代数学的贡献,就像佛掌上的明珠那样耀眼和引人注目.古印度人在数学史上的伟大贡献,永远被后人景仰和传诵.

(四) 古阿拉伯

提起古代阿拉伯人对数学的贡献,人们自然会想到1,2,...,9,0这十个“阿拉伯数字”.其实,这十个“阿拉伯数字”最早是由古印度人创造的,后来阿拉伯人将这十个数字传播到了欧洲,欧洲人就把这十个数字称为“阿拉伯数字”.在数学的发展过程中,古代阿拉伯人主要是吸收、保存了古希腊和印度的数学,并将它传给欧洲,架起了一座数学的桥梁.

公元830年,在巴格达建造了集图书馆、科学院和翻译局于一体的联合机构——智慧宫,研究的内容包括哲学、医学、动物学、植物学、天文学、数学、机械、建筑、伊斯兰教教义、阿拉伯语语法学,成为世界的学术中心.可以说,埃及人发明了几何学,阿拉伯人命名了代数学.正是智慧宫的主要负责人,阿拉伯著名数学家花拉子密为世界留下了传世之作——《代数学》,花拉子密的著作作为标准的课本在欧洲使用了数百年.而著名数学家和诗人海亚姆完成了包括三次方程几何解法在内的数学发现,其成就处于当时世界领先水平.



图3 阿拉伯人描绘的《亚里士多德授课图》



图4 纪念阿拉伯数学家花拉子密诞生
1200年邮票(苏联1983年9月发行)

在中世纪,另一位阿拉伯著名数学家和天文学家卡西获得了较为精确的圆周率,计算出 $\pi \approx 3.14159265358979325$,从而使 π 的值计算到了小数点后面第17位,打破了由中国著名数学家祖冲之保持的 π 的近似值到小数点后面第7位的记录,这是非常了不起的.此外,阿

拉伯人在三角形上引进了正切和余切,并且给出了正弦定理的证明.

特别需要指出的是,阿拉伯人翻译了大量数学文献,特别是古希腊的大量著作,包括欧几里德的《几何原本》、托勒密的《地理志》和柏拉图等人的著作陆续译成了阿拉伯语,然后又被翻译成拉丁文,并传递到西方,对西方数学的发展起了巨大的推动作用,所以在数学史上这个时期被称为翻译时代.因此,把古代阿拉伯数学称为数学的桥梁,是当之无愧的.

(五)古代中国

作为世界文明古国之一的中国,在世界数学发展史上,古代中国的数学成就占有相当重要的位置.中国古代数学思想方法属于中国传统文化的一部分,主要体现在实用主义思想、算法化思想和模式化思想.主要数学著作有《算数书》、《算经十书》(包括著名的《周髀算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《张丘建算经》和《缉古算经》等)、《数书九章》、《测圆海镜》和《四元玉鉴》等.

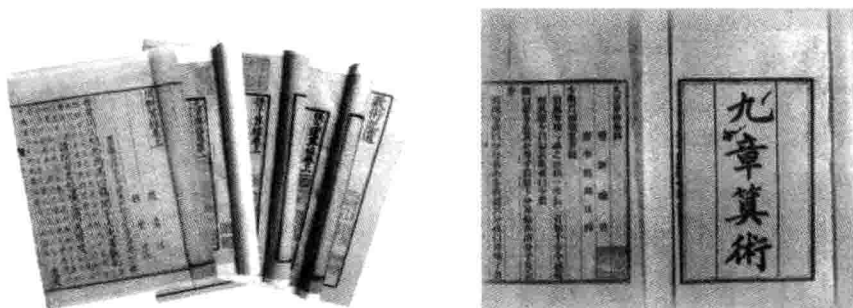


图5 《算经十书》和《九章算术》

主要数学家有刘徽、祖冲之和其儿子祖暅、贾宪、沈括、杨辉、秦九韶、李冶、朱世杰、李善兰等.



刘徽(公元 263 年左右)



祖冲之(公元 429—500)



杨辉(约公元 13 世纪)

图6 中国古代数学家

在人类文化发展的初期,中国人对数学的研究成果,实际上远远领先于古巴比伦和古埃及.早在五六千年以前,中国就有数与形的萌芽,发明了简洁的数学符号,到了三千多年前的商朝(约公元前 16 世纪到公元前 11 世纪),刻在甲骨和陶器上的数字,已经十分常见.通过对当时甲骨文的研究,发现其中有表示一、十、百、千、万……的十种计数单位,这说明当时中国人的计数方法,已经采用了人类现行的“十进制”.因此,中国是当之无愧的“十进制故乡”.



图7 商晚期兽骨甲骨文

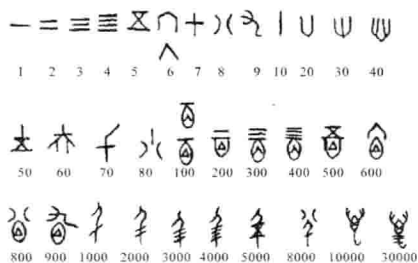


图8 甲骨文数字

中国古人在运算过程中,采用的是“算筹”这种工具。“算筹”就是一些用木、竹制作的匀称小棍,中国人把这些小棍纵横布置,就可以表示一个自然数。据考证,至少在两千五百多年前的春秋时代,中国古人的算筹记法就已经相当完备了。这种表示数字的方法,无疑走在世界的前列。

早在春秋战国时期,中国已出现了极限思想,对“无限”的概念有了初步认识和论述。墨家的代表作《墨经》讨论了形式逻辑的某些法则,并在此基础上提出一系列数学概念的抽象定义,已涉及“无穷”,如“体:若二之一,尺之端也。”“穷,或不容尺,有穷;莫不容尺,无穷也。”等等。而道家的经典著作《庄子》记载了名家的代表人物惠施的命题“至大无外,谓之大一。至小无内,谓之小一”。著名的“一尺之棰,日取其半,万世不竭”也记载于《庄子·天下篇》中。

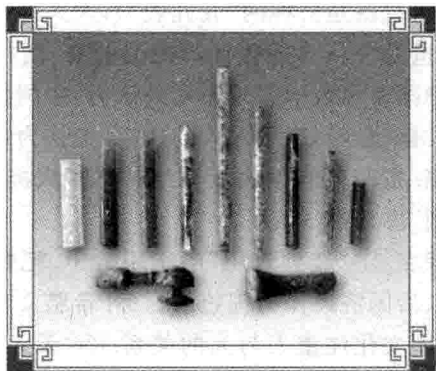


图9 中国汉代的琉璃算筹

	左	右						
	积	隅						
	本	①						
	积							
	商	①	①					
	除							
	平	①	②	①				
	方							
	立	①	③	③	①			
	方							
	三	①	④	⑥	④	①		
	乘							
	四	①	⑤	⑩	⑩	⑤	①	
	乘							
	五	①	⑥	⑮	⑳	⑮	⑥	①
	乘							
	命	以	中	右	左			
	实	廉	藏	表	表			
	面	乘	者	乃	乃			
	除	商	皆	隅	积			
	之	方	廉	算	数			

图10 杨辉三角形

圆周率 π 的计算,一直是古代数学研究的重点和难点。早在魏晋时期,著名数学家刘徽运用“割圆术”(圆内接正1536边形)计算出了较为准确的圆周率值——3.1416;而南北朝时期伟大的数学家祖冲之,通过“割圆术”,计算到圆内接正12288多边形,得到圆周率的准确值在3.1415926和3.1415927之间,这个记录保持了近千年,直到15世纪,才由阿拉伯数学家卡西计算出更为精确的圆周率,达到小数点后面17位。南宋时期的数学家杨辉,创立了数学史上著名的“杨辉三角”,这是人类数学史上对二项式系数的最早探究。

值得一提的是,我国周朝数学家商高是世界上最早提出勾股定理的人,早于古希腊的毕

达哥拉斯.《周髀算经》中记载了西周初年(公元前 11 世纪)政治家周公与大夫商高讨论勾股测量的对话,商高答周公时提到“勾广三,股修四,径五”,这是勾股定理的特例,因此它又被称为商高定理.书中还记载了周公后人的一段对话,包含了勾股定理的一般形式:“以日下为勾,日高为股,勾股各自乘,并而开方除之,得邪至日”.公元 3 世纪,三国东吴数学家赵爽用“勾股弦方图”非常优美的方法证明了勾股定理.

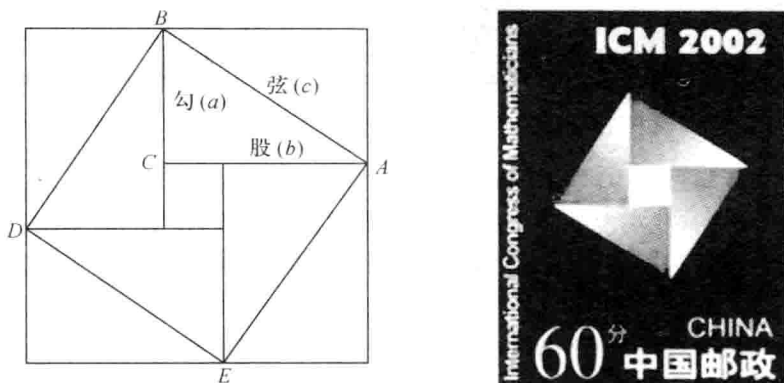


图 11 北京 2002 年国际数学家大会会徽纪念邮票(赵爽的“勾股弦方图”)

另一个引人注目的数学结果是出现于《孙子算经》中一次同余式组的解法——孙子定理,经宋朝著名数学家秦九韶推广为更一般的方法并给出了严格证明.孙子定理是中国古代数学史上最完美和最值得骄傲的结果之一,它出现在中外每一本《初等数论》教科书中,被西方人称之为中国剩余定理.

除此之外,中国古人发明的“乘法口诀”(也就是俗称的“九九表”),大大提高了乘法和除法的笔算效率.中国古人发明的算盘,则被世界公认为现代计算机的前身.微积分的创始人之一、发明了世界上第一台乘法计算器的德国著名数学家莱布尼兹认为,中国是现代计算机理论中“二进制”的故乡.莱布尼兹对中国古籍《易经》有很深入的研究,他认为《易经》中的八卦图形,所记录的内容就是“二进制”的思想.按照他的说法,《易经》中的“太极生两仪,两仪生四象,四象生八卦……”无疑就是“二进制”思想的体现了.

综上所述,中国古代数学思想的主要特点:①“经世致用”的实用数学.把数学应用于社会生产、社会生活的各个领域,把经纶天下、治国济民作为理想的目标.希腊文化注重人与自然的关系,中东文化注重人与神的关系,中国文化注重人与人的关系.②“天人相应”的神秘思想.把数字附会于人事,利用数学来预测人事的休咎.把数与万事万物联系起来,使人们通过数来预测万事万物的未来,将数看作是沟通天人之间的信息符号.③算法化、数值化、离散化的计算思想.中国古代的数学著作,基本上是以算法为主要内容的,习惯于把问题数值化、离散化,利用具体的数值计算来解决一系列复杂的应用和理论问题.④朴素的辩证思想.如《庄子》中的极限思想、“割圆术”的思想都是典型的朴素的数学辩证思想,刘徽的“出入相补原理”表现了一种以实补虚、虚实结合的朴素的辩证思想,赵爽的“勾股弦方图”则是一种数和形辩证结合的体现.

可以说,古代中国的数学家,不愧为现代数学理论的奠基人,古代中国的数学研究成果,不愧为现代数学理论的基础.

二、古希腊数学

古希腊虽然未被列入“四大文明古国”行列,却称得上是人类文明的“后起之秀”,被美国史学家麦克高希称为世界五大文明发源地之一。古希腊人不仅在文学、戏剧、美术、哲学等诸多方面有很深的造诣,更是数学、物理学、生物学、逻辑学等主要自然学科的创始人。

古希腊文明大约可以追溯到公元前 2800 年,一直延续到公元 600 年,它对现代西方文化的影响极大。大约在公元前 7 世纪,在今天的意大利南部、希腊和小亚细亚一带兴起了希腊文明,然而在许多方面不同于埃及和巴比伦文明。在希腊,既没有相当于先知或祭司那样的人,也没有一个君临一切的耶和华的概念,游牧出身的希腊人有着勇于开拓的精神,不愿意因袭传统,更喜欢接触并学习新鲜的事物。大约在公元前 700 多年,希腊人就把他们使用过的象形文字悄悄地改换成腓尼基人的拼音字母。腓尼基人用 22 个字母来表达所有的文字,这些字母是今天包括希腊字母、罗马字母、西里尔字母在内的一切西方字母的祖先。

希腊人可谓是天才的哲学家。哲学家所关注的核心问题,是抽象概念和最具普遍性的命题。哲学家最基本的工具就是演绎推理,因此希腊人在数学研究上也具有这种特色并偏爱这种方法,尤其是第一次数学危机的产生,使他们更认为所有的数学结论只有通过演绎推理才能确定。古巴比伦人和古埃及人只能回答“应该怎么做”,而古希腊人在探究前人数学的时候,有意识地解决了“为什么要这样做”的问题,将人类早期的“经验数学”逐步转化为“理论数学”。希腊人认为数学是一门艺术,就如同建筑是一门艺术一样,富有条理性、一致性和完整性。正因为如此,数学家和哲学家、艺术家一样具有较高的社会地位,演绎推理也因此受人偏爱。

古希腊数学主要是指公元前 700—公元 600 年。在这个时期,古希腊产生了一大批杰出的数学家,主要有泰勒斯、毕达哥拉斯、芝诺、柏拉图、欧多克索斯、亚里士多德、欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯等。被誉为古希腊七贤之首和公认为希腊哲学鼻祖的古希腊第一位伟大的数学家泰勒斯(Thales,约公元前 625—前 547)开启了论证数学之先河,是数学史上一次不同寻常的飞跃,“泰勒斯定理”(即“半圆上的圆周角是直角”)也成为数学史上第一个以数学家名字命名的定理。科学史上的第一个数学史家欧德莫斯曾经写道,“……(泰勒斯)将几何学研究(从埃及)引入希腊,他本人发现了许多命题,并指导学生研究那些可以推出其他命题的基本原理。”此外,泰勒斯在天文、测量学方面有很多成果,泰勒斯曾准确地预测过一次日食,并利用太阳影子成功地计算出了金字塔的高度。

在泰勒斯之后,以毕达哥拉斯为首的一批学者,对数学做出了极为重要的贡献。毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前 560—前 480)生于靠近小亚细亚海岸的萨摩斯岛,是古希腊著名哲学家、数学家、天文学家、音乐家、教育家。经过在埃及、古巴比伦、印度等长达 19 年的游历,吸收了大量的数学知识和神秘主义学说,在南意大利的希腊殖民地克罗托内建立了一个既信仰神秘主义,也信仰理性主义的集政治、科学、宗教三位一体的团体,称为毕达哥拉斯学派。该学派主要致力于研究哲学、科学和数学,在几何学、数论等方面有杰出贡献。毕达哥拉斯曾用诗歌描述了他发明的“毕达哥拉斯定理”(即勾股定理):“斜边的平方,如果我没有弄错,等于其他两边的平方之和。”也正是这个定理,发现了第一个无理数 $\sqrt{2}$,并导致了第一次数学危机的发生。毕达哥拉斯的思想持续影响了后世的文明,在中世纪时,他被认为是“四艺”(算术、几何、音乐、天文)的鼻祖;文艺复兴以来,他的观点如黄金分割、和谐比例被应用于美学。