2015

# ·考研数学·

考研数学 清华版 精品备考丛书

# 历年真题名师精解

## 数学（二）

胡金德 谭泽光◎主编

◆ 分类精解 —— 历年真题条分缕析 ◆

◆ 题型丰富 —— 海量题目科学归纳 ◆

◆ 名师点拨 —— 深刻剖析真题本质 ◆

◆ 解读多维 —— 全面把握命题规律 ◆

清華大学出版社

（清华版）考研数学精品备考丛

# ·考研数学·

# 历年真题 名师精解

数学（二）

胡金德 谭泽光◎主编

清華大學出版社
北京

## 内容简介

本书精心编排了2000年至2014年共15年的数学考研真题，依照考试大纲要求，按知识点对所有题目进行讲解，体系清晰，分析细致、讲解详尽，便于考生系统复习。本书可作为广大考生复习阶段模拟练习的重要题库，起到查漏补缺、指导复习方向的作用。

本书可供将参加2015年研究入学考试的学生备考使用。

**本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。**
**版权所有　侵权必究　侵权举报电话：010－62782989　13701121933**

**图书在版编目(CIP)数据**

考研数学历年真题名师精解．数学二/胡金德，谭泽光主编．--北京：清华大学出版社，2014
(清华版考研数学精品备考丛书)
ISBN 978-7-302-36500-6

Ⅰ．①考…　Ⅱ．①胡…　②谭…　Ⅲ．①高等数学—研究生—入学考试—题解　Ⅳ．①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第102874号

责任编辑：朱敏悦
封面设计：刘　波
责任校对：王荣静
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　印　张：22.5　　字　　数：571千字
版　　次：2014年7月第1版　　印　　次：2014年7月第1次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：45.00元

产品编号：059645-01

# 前　言

全国工学、经济学硕士研究生入学统一数学考试实施多年来，每年命题都是紧扣大纲，形成了相对稳定、完整的模式。对这种模式的深入了解，有助于考生掌握命题规律，熟悉考试题型，争取优良成绩是至关重要的。因此，在每一套考研数学辅导教程丛书中，真题解析类的书目都是重要的组成部分之一。通过练习真题，可以有效地帮助考生把握数学考试大纲的命题指导思想、原则和趋势，是广大考生和教师了解试题信息、分析命题重点、总结命题规律和揣摩命题动态的重要依据，同时本书也可作为考生复习阶段模拟练习的重要题库，起到查漏补缺，指导复习方向的作用。

因此，一本经典的历年考试真题解析教程应当是内容完整、分析细致、求解详尽、总结全面的，这也是广大考生所热切期待的。本丛书作者就是依据上述精神，精心编纂了本册《考研数学历年真题名师精解》。本书布局巧妙，内容精细，综合了众多相关教程和复习指导书的优点，具有如下几个特点：

## 1. 内容细致，题型丰富

本书精心编排了 2000 年至 2014 年共 15 年的数学考研真题，依照考试大纲的要求，按知识点归纳对所有题目分专题进行讲解，体系清晰，便于考生系统复习。每一专题的题目按选择、填空、简答排序，内容由浅入深，方便考生循序渐进地领会各知识点。同时本书也综合了其他三类试卷（包含数学四中的一些高质量的真题）考试中的一些经典真题，以求对考研大纲的知识点全面覆盖。

## 2. 解析详尽，总结全面

对于每一道题目，编者为广大考生设计两个重要板块：【解析】和【知识点归纳】。【解析】是依据考研名师提供的经典讲义教案，提供了最新的解题思路、方法和技巧，给出详细准确的求解过程，以帮助考生开拓思路，提高解题能力。【知识点归纳】则是对每一道题目所涉及的知识点进行归纳总结，让考生对每一个题目所需的知识点有一个直接的认知，方便查漏补缺，完善知识体系。此外，【大纲回顾】一栏为考生提供了过去一年的考试大纲，对考生细致了解考试内容，把握重点将起到重要的作用。【本章小结】则全面回顾了本章所涉及的知识点，有助于考生系统总结，温故知新。

## 3. 精心设计，完美自测

除上述经典部分之外，编者还在附录中设计了“参考答案及自测表”，对所有真题题目进行题型归类，方便考生归纳总结复习的不足，及时发现并弥补自身知识体系的不足。

考生在使用本书的时候，应该按章节先结合教材、复习全书同步复习相关知识点，同时选取 5 套左右的真题试卷作为阶段性模拟测验。在完成第一次系统复习后，再选取 5 套左右的真题试卷进行模拟演练，并仔细填写错误统计表，总结错误类型，进行第二轮专项突破复习，结合我们的《考研数学能力训练——基础篇》完成一次全面的考试能力提升。在完成第二轮复习之后，做完剩下的考研真题卷，再次检查自身的错误，进一步完善自己的知识结构。在每次模拟考试

的时候，应严格按照考试时间进行，稳步提升对考试的时间掌控能力。另外，在每次做完一套考研真题之后，考生应当对自己所做的答卷作一个详细的归纳总结，查清出错原因，看看自己是在基本理论、基本概念和基本方法方面有什么欠缺，还是在做题技巧、知识的综合和灵活运用等方面有所不足。总之，这样的归纳总结过程对于考生的复习来说是十分有必要的，其重要程度与做题无异，考生应当认真对待这一复习环节。

编者力求编写一套更为优秀的辅导丛书，但因水平有限，难免有不足之处，恳请广大考生读者批评指正。

最后，真诚地祝愿广大考生通过辛勤的努力，取得良好的成绩，考入理想的学府。

编　者

2014 年于北京



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 目 录

## 第一部分 高等数学

## 第二部分　线性代数

## 附 录

# 第一部分　高等数学

## 第一章　函数、极限、连续

### 大纲回顾

**考试内容**

函数的概念及表示法;函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;复合函数、反函数、分段函数和隐函数;基本初等函数的性质及其图形;初等函数;函数关系的建立;数列极限与函数极限的定义及其性质;函数的左极限与右极限;无穷小量和无穷大量的概念及其关系;无穷小量的性质及无穷小量的比较;极限的四则运算;极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则;两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e};$$

函数连续的概念;函数间断点的类型;初等函数的连续性;闭区间上连续函数的性质.

**考试要求**

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

### 专题一　函数的性质

1. (01,数2,二(1)题)设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}=$ 【　】

(A)0.　　(B)1.　　(C)$\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$　　(D)$\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

**解 析**

由题意知,对任意的 $x$,都有 $|f(x)|\leqslant 1$,所以 $f[f(x)]=1$,故 $f\{f[f(x)]\}=f(1)=1$.答案为(B).

**知识点归纳**

本题考查分段函数的复合函数.分段函数复合的关键是依据内层函数的值域位于外层函数定义域内的"位置"选择相应的函数形式,由内到外或由外到内进行复合.

## 专题二 极限的概念与性质

**2.(12,数 2,3 题)** 设 $a_n>0(n=1,2,3\cdots)$,$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$,则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 【 】

(A) 充分必要条件. (B) 充分非必要条件.

(C) 必要非充分条件. (D) 非充分也非必要.

**解 析**

由 $a_n>0(n=1,2,3\cdots)$,$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 知,数列 $\{S_n\}$ 单调增加,由单调有界数列必收敛知,若数列 $\{S_n\}$ 有界,则数列 $\{S_n\}$ 收敛,从而有 $a_n=S_n-S_{n-1}$,所以

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0.$$

故数列 $\{a_n\}$ 收敛.即充分性成立,但必要性不一定成立.例如取 $a_n=\dfrac{1}{2}$,显然有 $a_n>0$,$\{a_n\}$ 收敛,但 $\{S_n\}=\left\{\dfrac{n}{2}\right\}$ 是无界的.

所以正确答案为(B)选项.

**知识点归纳**

本题考查了数列收敛与数列单调、有界的关系:

1) 若数列 $\{a_n\}$ 单调有界,则数列 $\{a_n\}$ 必收敛;反之不然.若数列 $\{a_n\}$ 收敛,必有数列 $\{a_n\}$ 有界,但数列 $\{a_n\}$ 不一定单调.如 $\{a_n\}=\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 收敛,但不单调;

2) 一个数列若是单调有界数列,则此数列肯定收敛,但若一个数列只满足单调或是只满足有界的条件,不能得出数列的收敛性.例如:

①$\{a_n\}=\{n\}$,它单调无界,发散;

②$\{a_n\}=\{(-1)^n\}$,它有界不单调,发散.

**3.(03,数 2,二(1)题)** 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有 【 】

(A) $a_n<b_n$ 对任意 $n$ 成立. (B) $b_n<c_n$ 对任意 $n$ 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

**解　析**

【思路一】　举反例利用排除法作答. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,很自然的能想到取数列$a_n=\dfrac{1}{n}$,同样的可以想到取$b_n=1$,$c_n=n$使得所取数列满足题意. 当$n=1$时,排除(A),(B). 显然,$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=1$,极限存在,排除(C);$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在. 故正确答案为(D)选项.

【思路二】　直接证明,根据定义可知数列极限与数列前面有限项的大小无关,不能以这种当$n$充分大时的情形来比较数列各项的大小,故排除(A),(B). 而$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$是无穷小与无穷大相乘,$0\cdot\infty$为未定型,不能判断极限存在与否,排除(C),$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$为有界量与无穷大乘积为无穷大,故正确答案为(D)选项.

**知识点归纳**

对于概念性的选择题来讲,平时多积累一些常见的例子,有助于在考试时快速做出判断,节省考试时间.

1. 对于数列的极限,极限值与数列前面有限项的大小无关,不能以此来说明所有项的情形. 如以上的(A),(B)项.

2. 要注意未定型$\left(\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,1^{\infty},0^{0},\infty^{0}\right)$的极限是不能确定的,可能存在也可能不存在.

4. (99,数2,二(4)题)"对任意给定的$\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数$N$,当$n\geqslant N$时,恒有$|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"是数列$\{x_n\}$收敛于$a$的　　【　　】

(A) 充分条件但非必要条件.　　(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分条件又非必要条件.

**解　析**

先证明必要性:若数列$\{x_n\}$收敛于$a$,根据数列收敛的定义知,对任意的$\varepsilon\in(0,1)$取$\varepsilon_1=2\varepsilon$,存在正整数$N$,当$n>N$时,有$|x_n-a|<\varepsilon_1=2\varepsilon$成立.

再证它的充分性:

对任给的$\varepsilon>0$,取$\varepsilon_1=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{2}, & \varepsilon<2\\ \dfrac{1}{4}, & \varepsilon\geqslant 2\end{cases}$,$\varepsilon_1\in(0,1)$,根据题设条件,存在$N>0$,当$n>N$时,恒有$|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon_1\leqslant\varepsilon$,从而有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

故答案为(C).

**知识点归纳**

数列极限的定义:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow$对于任给的常数$\varepsilon>0$,存在正整数$N$,当$n>N$时,有$|x_n-A|<\varepsilon$.

若数列$\{x_n\}$存在极限,则称数列$\{x_n\}$收敛,否则称数列$\{x_n\}$发散.



此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

5.(98,数 2,二(1)题)设数列 $x_n$ 与 $y_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是 【 】

(A) 若 $x_n$ 发散,则 $y_n$ 必发散.　　(B) 若 $x_n$ 无界,则 $y_n$ 必有界.

(C) 若 $x_n$ 有界,则 $y_n$ 必为无穷小.　　(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 $y_n$ 必为无穷小.

**解 析**

取 $y_n=0$,则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,排除(A).

对于选项(B),取

$$x_n=\begin{cases}2k-1, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}\quad y_n=\begin{cases}2k, & n=2k,\\ 0, & n=2k-1,\end{cases}\quad k=1,2,\cdots$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,此时 $x_n,y_n$ 均无界,排除(B).

对于选项(C),取数列 $x_n=0$,数列 $y_n$ 为任意非无穷小的数列,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,排除(C).

对于(D),$y_n=(x_ny_n)\cdot\dfrac{1}{x_n}$,又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$. 当 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小时,数列 $y_n$ 也为无穷小.

故答案为(D).

**知识点归纳**

本题考查数列发散、有界、无界及无穷小的概念. 知识点总结如下:

1. 有界数列:对于数列 $\{x_n\}$,如果存在一个正数 $M>0$,使得对一切 $n$,都有 $|x_n|\leqslant M$,则称数列 $\{x_n\}$ 有界.

2. 无界数列:对于数列 $\{x_n\}$,如果对任意正数 $M>0$,都存在 $n_0$,使得 $|x_{n_0}|>M$,则称数列 $\{x_n\}$ 无界.

3. 无穷小的定义:在某一极限过程中以零为极限的变量称为无穷小量.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,则称数列 $\{x_n\}$ 为无穷小,记为 $x_n=o(1)(n\to\infty)$.

4. 无穷小量的运算性质:

1) 有限个无穷小量的代数和是无穷小量;

2) 有限个无穷小量的乘积是无穷小量;

3) 有界变量与无穷小量的乘积是无穷小量.

## 专题三　求数列的极限

6.(08,数 2,5 题)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是 【 】

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛.

**解 析**

【思路一】 特例法

若取 $x_n = n, f(x) = \arctan x$，就可以直接排除选项(C)和(D)；

若取 $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ 和 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0, f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$，这样可以排除选项(A)，故选择(B).

【思路二】　直接推导法

对于选项(A)：由数列 $\{x_n\}$ 收敛不能推出 $\{x_n\}$ 单调，也得不到函数 $f(x_n)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调，所以 $\{f(x_n)\}$ 不收敛，故(A)错误；

对于选项(B)：由数列 $\{x_n\}$ 单调可以推出函数 $f(x_n)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调，又 $f(x)$ 有界，所以 $\{f(x_n)\}$ 收敛，故(B)正确；

对于选项(C)：可令 $x_n = n$，使得数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛，但 $\{x_n\}$ 不收敛，故(C)错误；

对于选项(D)：同样可令 $x_n = n$，由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调，可知数列 $\{f(x_n)\}$ 单调，但 $\{x_n\}$ 不收敛，故(D)错误.

故选择(B).

## 知识点归纳

数列的单调有界收敛准则：

1) 如果数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界，并存在一个确定的常数 $m$，使得对于一切的 $n$ 都有 $x_n \geqslant m$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = C$.

2) 如果数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界，并存在一个确定的常数 $m$，使得对于一切的 $n$ 都有 $x_n \leqslant m$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = C$.

7. (02，数 2，八题) 设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}\quad (n = 1, 2, \cdots)$.
证明：数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

## 解　析

先用归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 有界.

因为 $0 < x_1 < 3$，所以有 $0 < x_2 = \sqrt{x_1(3 - x_1)} \leqslant \dfrac{x_1 + (3 - x_1)}{2} = \dfrac{3}{2}$.

不妨设 $0 < x_n \leqslant \dfrac{3}{2} (n \geqslant 2)$，则 $0 < x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)} \leqslant \dfrac{x_n + (3 - x_n)}{2} = \dfrac{3}{2}$.

即数列 $\{x_n\}$ 有界.

下面证明数列 $\{x_n\}$ 的单调性.

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n(3 - x_n)} - x_n = \sqrt{x_n}(\sqrt{3 - x_n} - \sqrt{x_n}) = \sqrt{x_n}\,\frac{3 - 2x_n}{\sqrt{3 - x_n} + \sqrt{x_n}},$$

因为 $0 < x_n \leqslant \dfrac{3}{2}$，所以 $0 \leqslant 3 - 2x_n < 3$，故 $x_{n+1} \geqslant x_n$，即数列 $\{x_n\}$ 单调递增.

由单调有界准则可知，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，对 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$ 两边同时取极限，得 $x = \sqrt{x(3 - x)}$，解得 $x = \dfrac{3}{2}$ ($x = 0$ 舍去)，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3}{2}$.

**8.(06,数 2,18 题)**设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$

(Ⅰ)证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求其极限;

(Ⅱ)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

**≫解 析**

(Ⅰ)利用数列单调有界收敛准则来判断.

易知对于$0<x<\pi$时有$\sin x<x$,而$0<x_2=\sin x_1<x_1<\pi$,利用归纳法证明可得$0<x_n<\pi$,即数列$\{x_n\}$单调下降且有下界,所以数列$\{x_n\}$的极限存在,设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,对方程$x_{n+1}=\sin x_n$左、右两边取极限有$A=\sin A$,可知$A=0$.

(Ⅱ)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{x_n^2}\ln\frac{\sin x_n}{x_n}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{x_n^2}\ln\left(1+\frac{\sin x_n}{x_n}-1\right)\right\}\\&=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}-1\right)\right\}\\&=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n-x_n}{x_n^3}\right\}\end{aligned}$$

转化为函数极限,由(Ⅰ)知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,又

$$\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}\right\}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$$

## 专题四 求函数的极限

**9.(02,数 2,二(3)题)**设$y=y(x)$是二阶常系数微分方程$y''+py'+qy=e^{3x}$满足初始条件$y(0)=y'(0)=0$的特解,则当$x\to0$时,函数$\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$的极限 【 】

(A)不存在. (B)等于 1. (C)等于 2. (D)等于 3.

**≫解 析**

利用泰勒展开式求解.

当$x\to0$时,$\ln(1+x^2)\sim x^2$. $y(x)$在$x=0$处展开到第 2 阶,即

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+o(x^2).$$

把$x=0$代入常系数微分方程中,并利用$y(0)=y'(0)=0$得

$$y''(0)+py'(0)+qy(0)=1,即\ y''(0)=1.$$

所以$y(x)\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

故原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$. 故正确答案为(C).

**知识点归纳**

本题考查函数极限的求法,涉及的知识点有等价无穷小、泰勒公式.

**10.(00,数 2,二(4) 题)**若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,那么 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为　　【　　】

(A)0.　　(B)6.　　(C)36.　　(D)$\infty$.

**解　析**

**【思路一】**　泰勒展开法

由极限的定义得:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0\Rightarrow \sin 6x+xf(x)=o(x^3)$$

将 $\sin 6x$ 用带有皮亚诺余项泰勒公式展开 $\sin 6x=6x-\dfrac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)$ 代入上式得

$$6x-\frac{(6x)^3}{3!}+xf(x)=o(x^3)\Rightarrow 6-36x^2+f(x)=o(x^2)\Rightarrow \frac{6+f(x)}{x^2}=36+o(1)$$

对方程两边取极限得

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}[36+o(1)]=36.$$

故选择(C).

**【思路二】**　凑极限法

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}$$

由洛必达法则进行极限运算可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}=6\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}=36.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=36+0=36,$$

故选择(C).

**11.(13,数 2,9 题)** $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$ ________.

**解　析**

这是一个 $1^\infty$ 型的幂指函数极限.

**【思路一】**　利用重要极限

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x-\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x-\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{x}{x-\ln(1+x)}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

【思路二】 利用麦克劳林公式,因为 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)(x\to0)$,所以

$$原式=\lim_{x\to0}\left[2-\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{1}{2}x+o(x)\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

【思路三】 利用洛必达法则

$$原式=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{x}},$$

且

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+1-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2},$$

故原式 $=e^{\frac{1}{2}}$.

## 知识点归纳

> 对于幂指函数极限的一般处理方法是 $\lim u^v=\lim e^{v\ln u}=e^{\lim v\ln u}$,这样就可以归结为求 $\lim v\ln u$. 或者利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 求解,注意公式的变形.

12. (11,数 2,9 题) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

## 解　析

【思路一】 利用洛必达法则

化简可得

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{1+2^x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{1+2^x}{2}}.$$

又

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{1+2^x}{2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2^x)-\ln2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x\ln2}{1+2^x}$$
$$=\frac{1}{2}\ln2.$$

故,原极限 $=e^{\frac{1}{2}\ln2}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

【思路二】 利用重要极限

$$原式=\lim_{x\to0}\left[1+\left(\frac{1+2^x}{2}-1\right)\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2^x-1}{2}+1\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x \to 0}\left(\frac{2^x - 1}{2} + 1\right)^{\frac{2}{2^x-1} \cdot \frac{2^x-1}{2} \cdot \frac{1}{x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x-1}{2x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x \ln 2}{2}} \\
&= e^{\frac{\ln 2}{2}} = \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

13. (07,数 2,11 题) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x - \sin x}{x^3} =$ ________.

**≫解　析**

**【思路一】**　属于 $\dfrac{0}{0}$ 型，利用洛必达法则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2} + \sin x}{6x} \\
&= \lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{3(1+x^2)^2}\right) + \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

**【思路二】**　利用泰勒公式

在 $x = 0$ 处，$\arctan x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$，$\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

所以

$$
\text{原式} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6}.
$$

14. (01,数 2,一(1) 题) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} =$ ________.

**≫解　析**

**【思路一】**　由于原式为 $\dfrac{0}{0}$ 型，由洛必达法则得

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \to 1} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{3-x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{2x+1} \\
&= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{6}.
\end{aligned}
$$

**【思路二】**　分子有理化

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \to 1} \frac{3 - x - (1+x)}{(x^2 + x - 2)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{-2}{(x+2)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})} = -\frac{\sqrt{2}}{6}.
\end{aligned}
$$



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com