机械工程测试技术基础

（二版）

祝维权　刘道忠　主编

南京航空航天大学

一九九七年十二月

再版序言

《机械工程测试技术》教材从1988年以来已使用三年，师生反映均较满意，当然也存在一些不足之处。再版时我们对一些章节作了修改：

1．将一、二章内容重新组织。第一章《测试系统的时域模型》内容为动态确定系统的时域和复域模型，在前修课《自动控制理论》课程中已讲授，本章结合测试系统特点进行复习。第二章《测试系统的频域模型》内容为动态确定系统的频域模型，是本书的重点。第一章由杨明同志编写，第二章由张乐年同志编写。

2．删去原教材的六、七两章，将原教材八、九两章作为第六、七章。原第七章部分内容编入一、二章。

3．加写《再版序言》。

写再版序言的主要目的，是向本书读者介绍测试技术的理论体系，以及本书内容与这个体系的关系。便于读者更好地了解本书内容，以及在了解本书内容基础上对测试技术的进一步学习。

测试技术的理论体系包括测试的基本模型、基本组成和基本理论。

基本模型

测试的基本模型是不同测试任务的抽象，如图1所示，可分为三种类型。

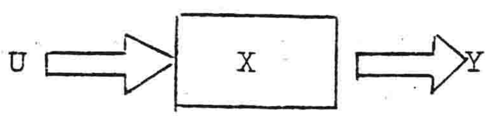

图1　测试基本模型

Ⅰ类测试任务，其模型为

$$X = F_1(U, Y) \qquad (1)$$

式中，X——被测试状态矩阵；

U——激励矩阵；

Y——响应矩阵。

该类测试的任务是根据激励矩阵U和响应矩阵Y确定被测试的状态X。例如产品质量检测、静动态参数测定、系统辨识建模等。

Ⅱ类测试任务，其模型为

$$U = F_2(X, Y) \qquad (2)$$

式中，U——被测参数矩阵；

X——测试系统的状态变量；

前　　言

本书根据“机械工程测试技术”教学大纲编写，适合机械工程设计和制造类各专业40～50小时的教学之需。

本书的前七章着重介绍机械工程动态测试工作必须具备的基本知识，包括：信号与频谱，测试系统的静、动态特性，常用传感器、测量电路及记录仪器的工作原理和特性。最后两章（第八、第九章）介绍振动、力和应力等典型参数的测试方法。温度测量和位移测量的部份内容并入第四章传感器中介绍，故不另立章节。书中带“•”的章节作为参考和扩充的内容。

本书由南京航空学院、江苏化工学院和南通纺织工学院三校有关教师联合编写，分工如下：

南京航空学院祝维权主编并编写绪论和第三、六、七章，刘道忠编写第一、九章，罗绍义编写第八章；江苏化工学院周勤编写第二、五章；南通纺织工学院鞠建国编写第四章。

本书在编写过程中，参考了许多教材和著作（见参考文献目录），并引用了其中的一些内容和图表；对此，谨向有关编、著者表示诚挚感谢。

由于我们水平有限，时间又匆促，书中定有许多错误和不当之处，恳切希望使用本书的教师和读者予以批评指正。

编　者　1988年9月

Y——输出矩阵。

此类测试任务是根据输出矩阵Y和测试系统状态变量X确定被测参数U。例如数据采集、参数测量、状态监控、模式识别、图形分析等。

Ⅱ类测试任务，其模型为

$$Y = F_3(U, X) \qquad (3)$$

式中，Y——被控输出矩阵；

U——控制矩阵；

X——系统状态变量。

此类系统的任务，是将控制矩阵U加在状态变量为X的系统上，产生所需输出Y。例如可编程激励、测试过程控制、误差修正、自适应调节等。

基 本 组 成

测试系统由硬件、软件、数学模型组成。

典型的测试系统硬件如图2所示。

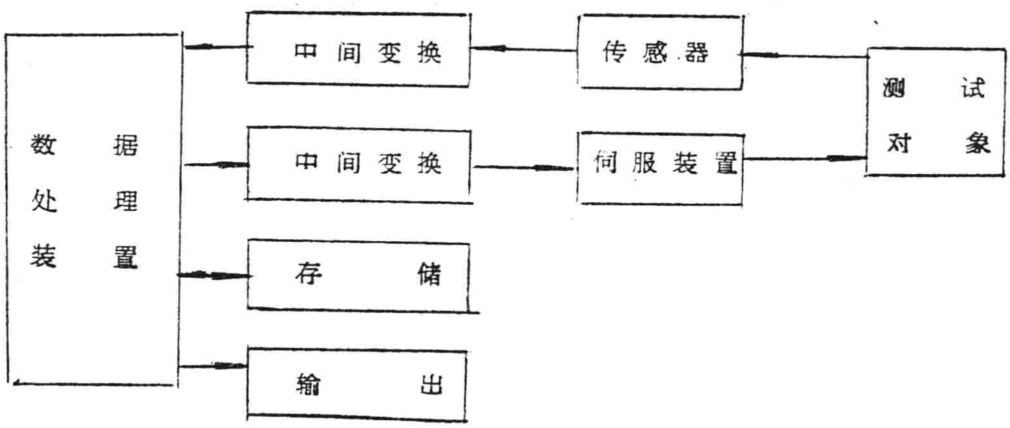

图2 测试系统硬件框图

被测量一般为非电量，经传感器转换为电量，再经中间变换后输入数据处理装置，处理结果经输出装置以显示、打印等方式输出，或存入存储装置。

测试过程需要激励或控制时，经中间变换后，驱动伺服装置，产生激励控制信号。

目前，大多数测试系统的数据处理装置采用数字计算装置，此时需编制软件。软件包括数据与程序。

测试中的各种数据均应选用一定的数据结构，必要时使用数据库。应用和发展数据传输技术、编译码技术、保密技术、数据压缩技术等。

程序包括主程序和数据采集、处理、分析、判决、估值、输入出容错、报警、自检等子程序，选用适当的语言编写。

数学模型是测试系统量的抽象。测试系统中的量可抽象为确定量随机量或模糊量。

静态量或动态量、连续量或离散量、一维量或多维量，相应地采用不同的数学模型。

静态确定模型为代数方程。

连续的动态确定模型有时域（微分方程）、复域（拉氏变换、传递函数）和频域（富里哀变换、频率特性）三种。

离散的动态确定模型也有时域（差分方程）、复域（Z变换、脉冲传递函数）、频域（离散富里哀变换）三种。

多变量的动态模型为状态方程，其实质是一阶微分方程组。

静态随机模型为概率密度函数及其参数（均值、均方差等）。

动态随机模型为随机过程的概率密度函数及其参数（均值、均方差、相关函数、功率谱等）。

模糊模型为隶属函数、模糊矩阵等。

基 本 理 论

理论是对客观事物运动规律性的认识。研究理论的目的在于指导应用，指导实践。测试基本理论要研究和解决测试系统中的三个基本问题：可测试性、测试确定性和测试可靠性。

1.可测性理论

必须树立一个概念：并不是所有参数或故障都是可测试得的，导致不可测的原因有人们认识水平的限制、噪声过大、测试精度不足、测试环境恶劣、测器系统通频带限制等。

设计测试系统时，首先要对可测试作判断，并在可测试的前提下建立测试集。

可测试性包括可控性与可观察性，即激励信号可以控制被测量，被测量可由输出量观察。发展和应用判断可测试性的理论和方法，研究改善可测试性的途径与方法。

2.测试确定性理论

由于量的随机性、概念的模糊性和模型的近似性，测试的结论具有不确定性，测试结论可有两种：

1）定性判决。被检验产品合格或不合格，监控状态需报警或不报警。可能出现误检或误警：虚检（将合格品判为不合格）或虚警（不需要报警时报警）；漏检（将不合格品判为合格）或漏警（需报警时不报警）。测试判决理论研究误检或误警的定量规律、确定判决阀值方法、降低误检率方法等。

2）定量估值。测试估值与真值之间不可避免存在误差。测试估值理论研究测试误差的规律、最优估值方法、减小误差方法等。

3.测试可靠性理论

可测试性与测试确定性都须建立在测试系统可靠工作的基础上。但是测试系统及其元件的故障会导致测试系统不能正常工作甚至误检。测试可靠性指标有可靠率、失效率、平均无故障工作时间等。测试可靠性理论研究测试系统可靠率计算方法，研究可靠性措

施包括自检技术、容错技术、抗干扰技术等。

验践证明。测试理论的正确运用可取得显著效果。主要依靠理论手段，可将测试确定性提高一个数量级，将测试可靠性提高一至两个数量级。

可见，本书内容为上述体系中的基础部份：

1．一、二章——连续的动态确定量的三种模型。

2．三、四、五章——测试系统硬件的典型环节。

3．六、七章——前五章内容的综合应用。

这就是将本书改名为《机械工程测试技术基础》的原因。

读者在解决实际测试问题或深入研究发展测试技术时，建议根据需要，参考上述体系作进一步的学习。

郑 叔 芳

1991．7．

绪　　论

一、测试的含义及其重要性

“测试”，包含着测量和试验两方面的内容。测量是运用测试仪器，把需求检测的物理量与取定作为标准的量加以比较，求得确切的量度关系。试验，是通过专门设计的方案和一定的仪器、装置，将被测对象中需要测定的潜在信息激发出来，以便进行测量。

测试技术与科学技术的发展非关系十分密切。科学是探究客观事物的内在规律，科学要求定量描述。只有定量，方能对各种事物的现象取得确切的认识。而测试是获取定量概念的重要手段。

因此，绝大多数现代科学技术的发展都与测试技术的发展紧密相关，测试技术的水平对科学技术发展的速度和深度有着重大的影响。例如光学显微镜的出现，使人们能观察到目力所不及的生物细胞，给生物学、医学的发展来一个飞跃。而电子显微镜的问世，使得对细胞内部超微细结构的研究成为可能，并对材料科学的新发展作出卓越的贡献。航空和人造卫星遥感技术的出现，大大加快了气象、地质、地球物理、海洋以及环境科学的发展速度，拓宽了它们研究的广度和深度。

另一方面，测试技术的发展也离不开现代科学的发展。现代科学的发展为测试技术的发展提供了新的条件、新的测试途径和新的测试水平。现代电子技术、半导体集成电路器件、电子计算机等新科学技术的发展，将测试技术大大推向前进。如今，测试技术无论从其快速性、精确性和自动化程度上都有很大的提高。总起来说现代科学和测试技术始终是紧密相关、相辅相成，交替发展。也可以说，测试技术本身就是现代科学的一个组成部分。

在机械工程和机械制造工业中情形也一样。产品产量的增长、精度和质量的提高，自动化水平的提高以及科学研究的开展，都离不开测试技术。

机械制造工程，以前偏重于静态参数的测量，而且主要是几何量（长度、角度、表面粗糙度）的检测，如机床的主轴跳动、导轨平直度误差等等。随着技术和生产的发展迫切要求对动态物理量（如位移、速度、加速度、温度、振动和力等）加以测量。而今日的技术水平，也是完全能够做到的。

由于电子技术的迅速发展，对电量的测量技术已经达到相当完善的地步。它的反应速度快，信号的传输和转换方便，又便于记录、显示和分析。因此，对机械工程中非电物理量的测量，一般先将非电量转换成与之有对应关系的电量，然后对电量进行测量，以获得所要的结果。因而本课程所指的测试技术，实际上是机械制造中非电物理量的电测技术。

二、测试系统的组成

对各种物理量进行测试，需要使用多种仪器、装置，联成一个测试系统进行工作。

典型的测试系统，一般包括如下几个部份：传感器、测量电路以及显示记录器。其结构框图如图1所示.

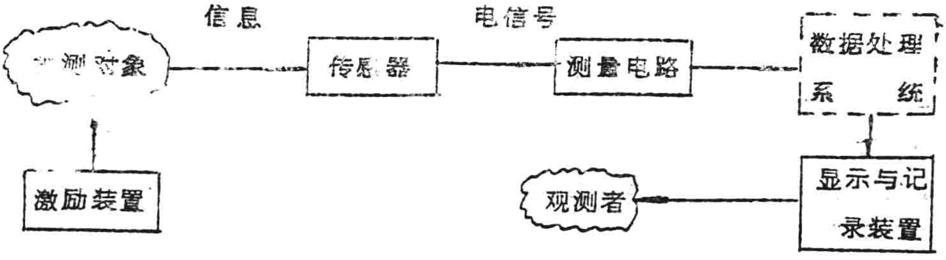

图1　测试系统的组成

1）传感器—它是信息的检拾装置，是测试系统的输入端口，它将被测的物理量转换成与之有确定对应关系的电学量（电信号），为电测准备好条件。如今已有利用各种物理化学原理制成的许多种类的传感器，机械制造中常用的有电阻式、电容式、电感式、压电式、光电式、热电式……等等多种型式。

2）测量电路—它把传感器输出的微弱电信号经过各种必要的转换，成为便于记录、显示和处理的电信号。测量电路也称为中间变换电路，它包括功能不同的多种电路，如电桥、放大器、调制器、检波器、滤波器、阻抗变换器、模／数和数／模变换器等等。

3）记录和显示器—它是测试系统的输出端口，它用曲线或数字的形式显示和记录测试的结果。常用的装置有电子示波器、笔式记录仪、光线示波器、磁带记录仪等等。

4）数据处理系统—从测试系统取得的数据，一般都需要经过分析计算、加工处理，如绘制曲线、计算特征参数值、绘制频率结构图等等。通过这样的处理，才能突出被测信息的变化规律，获得精确可信的结果。这一步工作若由人工计算处理，有时工作量十分庞大，难以满足现代科研、生产快速节奏的要求。在较现代的测试系统中广泛地应用微型计算机和各种信号分析仪进行数据处理，极大地提高了数据处理的效率和精确性，有的能达到“实时”处理的地步。

有些时候，为了研究被测对象中某些潜在的信息的规律，还需要采用专门的激励试验装置，把所需要的信息激发出来，再加以测量。如对机械系统振动参数的测定，就需要特定的激励装置。

现代化的测试系统，以计算机为“大脑”，在它的逻辑控制之下，测试系统的各个环节按照一定的步骤，有条不紊地进行试验和测量工作，并得出最终的结果，这就是自动化的测试系统。

测试过程的自动化，是当今测试技术发展的主要趋势之一。

三、本课程的性质、要求和特点

本课程是一门技术基础课。本课程所研究的对象是机械工程动态测试中常用的传感器的工作原理，测量装置动、静态特性的评价方法，测试信号的分析处理，以及若干常见物理量的测量方法。通过本课程的学习，培养学生获得动态测试所需的基本知识和能

力，为进一步学习、研究和处理机械工程技术问题打下基础。

由从事动态测试工作所必备的基本条件出发，在学完本课程后应具有下列几方面的知识：

1）掌握信号的时域和频域描述方法，建立明确的信号频谱概念；掌握频谱分析和相关分析的基本原理和方法。了解功率谱分析原理及其应用，了解数字信号分析的基本概念。

2）掌握测试装置动、静态特性的评价方法和不失真测试条件，并能正确地用于测试装置的分析和选择。掌握一阶、二阶系统动态特性和测定方法。

3）了解常用传感器、中间变换电路和记录仪器的工作原理和性能，并能较正确地选择使用。

4）对动态测试工作的基本问题有一个完整的概念；对机械工程中常见的物理量具有组成测试系统、进行数据处理、实现测试任务的初步能力。

本课程具有很强的综合性，涉及到广泛的基础知识。与高等数学、工程数学、物理学、电工和电子学、自动控制原理等课程的知识密切有关，因此在学习本课程的过程中，必须随时联系复习有关知识内容。

本课程具有很强的实践性。在学习过程中，必须加强和重视实验环节。只是通过实验，才能获得关于动态测试的完整知识，也只有这样，才能培养初步的实际测试工作的能力。

目　　录

第一章　测试系统的时域模型

测试系统的数学模型，是对系统进行分析计算的基础，它透过系统的物理结构，从输入、输出变量以及内部各变量之间的关系，建立数学表达式。

测试的任务之一是从系统的输出量反映系统的输入量，测试过程中系统能否准确及时地反映输入量及其变化，这对测试系统提出了一定的要求，本章也将就这一问题进行讨论。

§1—1　测试系统的微分方程

一、微分方程的建立

用解析法列写系统或元件微分方程的一般步骤是：

1．确定系统及元件的输入输出变量；

2．依据各变量所遵循的物理（或化学）定律，列写出在变化（运动）过程中的动态方程，一般为微分方程组；

3．消去中间变量，写出输入、输出变量的微分方程；

4．将与输出有关的各项按降幂排列放在等号的左侧，与输入有关的各项也按降幂的顺序放在等式的右侧，使其规范化。

在列写某元件的微分方程时，还必须注意与其它元件的相互影响，即所谓负载效应。

下面举例说明微分方程建立的步骤和方法。

例1－1　试列写图1－1所示RC无源网络的动态方程。给定u_r为输入量，u_c为输出量。

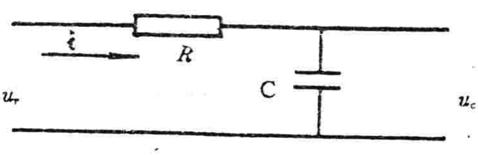

图1－1　RC无源网络

解：根据克希柯夫定律：

$$u_r = Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt \qquad (1-1)$$

$$u_c = \frac{1}{C}\int i\,dt \qquad (1-2)$$

式中i为流经电阻R及电容C的电流，为一中间变量，消去i得到下式：

$$u_r = RC\cdot\frac{du_c}{dt} + u_c \qquad (1-3)$$

令$\tau = RC$则上式可写成如下形式

$$\tau\frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

式中τ为网络的时间常数。

可见该网络的动态模型为一阶常系数线性微分方程。

例1－2　试列写图1－2所示RC无源网络的动态方程。给定u_r 为输入量，u_c为输出量。

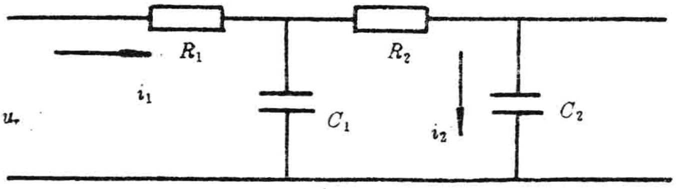

图1－2　两级RC无源网络

解：根据克希柯夫定律：

$$u_r = R_1 i_1 + \frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)dt \qquad (1-5)$$

$$\frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)dt = R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt \qquad (1-6)$$

$$u_c = \frac{1}{C_2}\int i_2 dt \qquad (1-7)$$

消去中间变量i_1、i_2并标准化处理后得到

$$R_1C_1R_2C_2\frac{d^2u_c}{dt^2} + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)\frac{du_c}{dt} + u_c = u_r \qquad (1-8)$$

令$\tau_1 = R_1C_1$、$\tau_2 = R_2C_2$、$\tau_3 = R_1C_2$，则得到

$$\tau_1\tau_2\frac{d^2u_c}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)\frac{du_c}{dt} + u_c = u_r \qquad (1-9)$$

可见该网络的微分方程是一个二阶常系数线性微分方程。

例1－3　设有一弹簧—质量—阻尼器动力系统如图1－3所示，当外力$f(t)$作用于关系时，系统将产生运动，试写出外力$f(t)$与质量块的位移$z(t)$之间的动态方程。

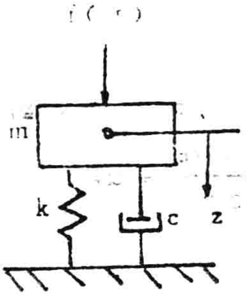

图1－3　弹簧—质量—阻尼系统

解：由牛顿定律：

$$f(t)+f_1(t)+f_2(t)=m\frac{d^2z(t)}{dt^2} \tag{1-10}$$

式中 $f_1(t)$——阻尼器阻力

$f_2(t)$——弹簧恢复力

由阻尼器与弹簧特性，可写出

$$f_1(t)=-C\frac{dz(t)}{dt} \tag{1-11}$$

$$f_2(t)=-Kz(t) \tag{1-12}$$

式中 C——阻尼系数

K——弹簧系数

将式（1-11）、（1-12）代入（1-10）中，得到

$$f(t)-C\frac{dz(t)}{dt}-Kz(t)=m\frac{d^2z(t)}{dt^2} \tag{1-13}$$

上式标准化后得到

$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2}+C\frac{dz(t)}{dt}+Kz(t)=f(t) \tag{1-14}$$

可见该系统的数学模型是一个二阶常系数线性微分方程。

二、线性系统及其重要性质

以上三例，尽管它们的结构各异，但其动态模型均可用常系数线性微分方程表示。

一般而言，一个系统，若其输入输出之间的关系可用常系数线性微分方程描述，则称该系统为线性定常系统或线性时不变系统。即：

$$a_n\frac{d^ny(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)$$
$$=b_m\frac{d^mx(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t) \tag{1-15}$$

式中 $x(t)$——系统输入

$y(t)$——系统输出

m, n, a_n, $a_{n-1}\cdots a_1$, a_0, b_m, $b_{m-1}\cdots b_1$ b_0——常数，它们的大小取决于系统的物理结构。其中 $n\geq m$，n 为方程的阶数，也是系统的阶数。

线性定常系统具有许多特性，下列两条尤其重要。

1．迭加性和齐次性

迭加性：n个输入同时作用于线性系统时，系统的总输出等于各个输入单独作用所引起的输出之和。即若系统的输入输出对应关系为

$$x_1(t)\to y_1(x) \qquad x_2(t)\to y_2(t)$$

则有 $$[x_1(t)\pm x_2(t)]\to[y_1(t)\pm y_2(t)] \tag{1-16}$$

齐次性：若系统的输入增加K倍（K为任意常数），则输出也相应地增加K倍。即

$$x(t) \to y(t)$$

则
$$Kx(t) \to Ky(t) \qquad (1-17)$$

2。频率保持性

对线性定常系统输入某一频率正（余）弦激励，其稳态输出为同一频率的正（余）弦信号。即

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi_x)$$

则
$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_y)$$

一般 $x_m = y_m$，$\varphi_x \neq \varphi_y$

§1—2 拉普拉斯变换

建立了系统的微分方程之后，进一步分析系统的测试过程，最直接的方法是求微分方程的时间解。

用拉普拉斯变换求解线性微分方程，可将微积分运算转化为代数运算，同时又能够单独地表明初始条件的影响，且有变换表可供查找，因而是一种较简便的工程数学方法。

一、拉普拉斯变换的定义

函数f（t），t为实变量，如果线性积分

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (s=\sigma+j\omega \text{为复变量，且} \sigma>0)$$

存在，则称其为函数f（t）的拉普拉斯变换（简称拉氏变换）。变换后的函数是复变量s的函数，记作F（s）或L[f（t）]，即

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad (1-19)$$

另有逆变换

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)ds \qquad (1-20)$$

（1-19）、（1-20）两式简记为

$$f(t) \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftharpoons}} F(s)$$

二、几种典型函数的拉氏变换

工程测试中常采用单位脉冲函数、单位阶跃函数等作为测试系统的典型输入，下面推导其拉氏变换。

1。单位脉冲函数δ（t）

单位脉冲函数又称δ函数，其数学表达式为

$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \qquad (1-21a)$$

且
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1 \qquad (1-21b)$$

这是一个脉冲面积为1，在$t=0$瞬时出现无穷跳跃的特殊函数，其曲线如图1－4所示。

根据拉氏变换的定义，其积分下限为零。但严格地说来，应该有0＋（即0的右极限）和0－（0的左极限）之分。对于在$t=0$处连续或只有第一类间断点的函数，0＋型和0－型的拉氏变换的结果是相同的。但对于象δ函数之类在$t=0$处有无穷跳跃的函数，0＋型和0－型的拉氏变换的结果是不一致的。

$\delta(t)$　0＋型拉氏变换
$$\int_{0+}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=0 \qquad (1-22)$$

$\delta(t)$　0－型拉氏变换
$$\int_{0-}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=\int_{0-}^{0+}\delta(t)e^{-st}dt+\int_{0+}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt$$
$$=\int_{0-}^{0+}\delta(t)e^{-s0}dt=1 \qquad (1-23)$$

可见，由于δ函数在$t=0$处有无穷跳变，0＋型与0－型拉氏变换不等。实质上，取0＋型拉氏变换没有反映出δ函数在〔0－，0＋〕区间内的表现，而0－型变换则包括这一区间，因而0－型变换更为恰当。以后不加声明均认为是0－型变换。

采用0－型变换另一个方便之处是，在0－以前，意味着外作用尚未加于系统，这时系统所处状态易于知道，因此初始条件比较容易确定。若采用0＋型拉氏变换，则相当于外作用已加于系统，要确定0＋时系统的初始状态是很繁的，因而0＋时的初始条件也不易确定。

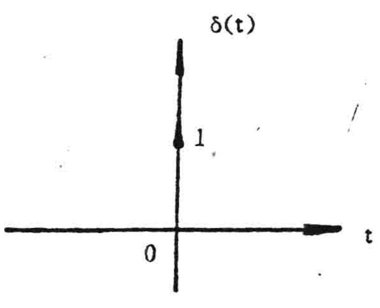

图1－4　δ(t)函数的时间曲线

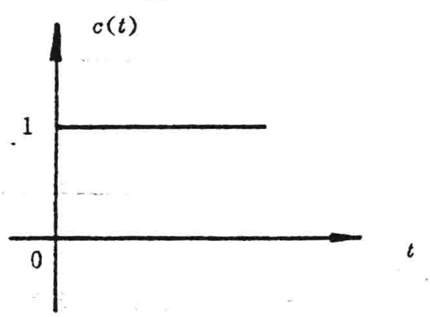

图1－5　1(t)函数的时间曲线

2．单位阶跃函数1(t)

单位阶跃函数1(t)的曲线如图1－5所示。

其数学表达式为
$$f(t)=1(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases} \qquad (1-24)$$

其拉氏变换为

$$L[1(t)]=F(s)=\int_0^{\infty}1e^{-st}dt=\frac{1}{s} \qquad (1-25)$$

三、拉氏变换的几个基本法则

1．线性性质

设$F_1(s)=L[f_1(t)]$、$F_2(s)=L[f_2(t)]$，a、b为常数，则有

$$\begin{aligned}L[af_1(t)+bf_2(t)]&=aL[f_1(t)]+bL[f_3(t)]\\&=aF_1(s)+bF_2(s) \qquad (1-26)\end{aligned}$$

2．微分法则

设$F(s)=L[f(t)]$，则有

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0)$$

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

$$(1-27)$$

$$\cdots\cdots$$

$$L\left[\frac{d^nf(t)}{dt^2}\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\cdots -f^{(n-1)}(0)$$

式中$f(0)$、$f'(0)$、…、$f^{n-1}(0)$为函数$f(t)$及其各阶导数在$t=0$时的值。

当$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{n-1}(0)=0$时，式（1－27）简化为

$$\left.\begin{aligned}&L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)\\&L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]=s^2F(s)\\&\cdots\cdots\\&L\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right]=s^nF(s)\end{aligned}\right\} \qquad (1-28)$$

3．积分法则

设$F(s)=L[f(t)]$，则有

$$\left.\begin{aligned}&L\left[\int f(t)dt\right]=\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0)\\&L\left[\int\int f(t)dt\right]=\frac{1}{s^2}F(s)+\frac{1}{s^2}f^{(-1)}(0)+\frac{1}{s}f^{(-2)}(0)\\&\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \qquad (1-29)$$