

2015 考研专家指导丛书

阅卷人精讲考研数学 线性代数 高分强化版

超值赠送



- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

- 清华大学
- 北京大学
- 首都师范大学

王欢
王德军 主编
童武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.CO
教·育·出·版·中·心

Yan Yuan

燕园教育

2015 考研专家指导丛书

阅卷人精讲考研数学

线性代数

高分强化版

超值赠送



- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

● 清华大学
● 北京大学
● 首都师范大学

王 欢
王德军 主编
童 武

中国石化出版社
[HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM](http://www.sinopec-press.com)
教 · 育 · 出 · 版 · 中 · 心

图书在版编目(CIP)数据

阅卷人精讲考研数学线性代数高分强化版 / 王欢主编. —北京: 中国石化出版社, 2014. 1
ISBN 978-7-5114-2532-4

I. ①阅… II. ①王… III. ①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 285748 号

未经本社书面授权, 本书任何部分不得被复制、抄袭, 或者以任何形式或任何方式传播。版权所有, 侵权必究。

中国石化出版社出版发行

地址: 北京市东城区安定门外大街 58 号

邮编: 100011 电话: (010)84271850

读者服务部电话: (010)84289974

<http://www.sinopec-press.com>

E-mail: press@sinopec.com

北京柏力行彩印有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

787 × 1092 毫米 16 开本 10.75 印张 266 千字

2014 年 3 月第 1 版 2014 年 3 月第 1 次印刷

定价: 28.00 元(赠送 MP3 光盘)

前 言

中国加入 WTO 之后, 改革开放逐步深化, 经济发展速度日益加快, 社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进, 我国对硕士研究生等高水平人才的需求越来越大, 这方面的教育也在稳步发展, 规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化, 考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说, 全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试, 即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才, 又有利于高等学校教学的原则, 强调在考查知识的基础上, 重点考查考生分析问题和解决问题的能力, 并且采用科学的办法, 保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习, 顺利通过数学考试、赢取高分, 我们根据国家教育部制定的《考试大纲》, 基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验, 以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路, 倾力推出这套考研专家指导丛书。

本套丛书包括:

《考研数学标准模拟试卷精解数学一》

《考研数学标准模拟试卷精解数学二》

《考研数学标准模拟试卷精解数学三》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解 98 考点全突破数学一》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解 70 考点全突破数学二》

《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解 102 考点全突破数学三》

《阅卷人精讲考研数学高等数学高分强化版》

《阅卷人精讲考研数学线性代数高分强化版》

《阅卷人精讲考研数学概率论与数理统计高分强化版》

《阅卷人点拨考研数学历届真题 15 天突破 数学一》

《阅卷人点拨考研数学历届真题 15 天突破 数学二》

《阅卷人点拨考研数学历届真题 15 天突破 数学三》

《考研数学主观题 23 天突破 500 题 数学一》

《考研数学主观题 13 天突破 500 题 数学二》

《考研数学主观题 22 天突破 500 题 数学三》

《考研数学客观题 26 天突破 1500 题 数学一》

《考研数学客观题 15 天突破 1500 题 数学二》

《考研数学客观题 27 天突破 1500 题 数学三》

《考研数学最后冲刺超越 135 分 数学一》

《考研数学最后冲刺超越 135 分 数学二》

《考研数学最后冲刺超越 135 分 数学三》

本套书的编写特点如下：

1. 配合最新考试大纲，反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧，高效突破难关

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套丛书进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编 者

目 录

第一章 行列式	(1)
§ 1 排列与逆序	(1)
§ 2 n 阶行列式	(2)
第二章 矩阵	(14)
§ 1 矩阵的概念与运算	(14)
§ 2 逆矩阵	(19)
§ 3 矩阵的秩	(26)
第三章 向量	(46)
§ 1 向量组的线性相关与线性无关	(46)
§ 2 向量组与矩阵的秩	(52)
§ 3 n 维向量空间	(57)
第四章 线性方程组	(69)
§ 1 线性方程组	(69)
§ 2 线性方程组解的结构及判定	(75)
第五章 矩阵的特征值和特征向量	(105)
§ 1 矩阵的特征值和特征向量	(105)
§ 2 相似矩阵与矩阵的对角化	(114)
第六章 二次型	(135)
§ 1 二次型和它的标准形	(135)
§ 2 正定二次型与正定矩阵	(143)
总复习题	(158)

第一章 行 列 式

§ 1 排列与逆序

本节的知识点大纲不要求掌握, 这里作为补充知识.

重点与难点介绍

一、基本概念

定义 1 (n 元排列) 把 n 个不同的自然数元素排成 $i_1, i_2 \cdots i_n$ 叫做这 n 个元素的 n 元全排列 (简称为 n 元排列).

n 个不同元素的所有排列的种数, 通常用 P_n 表示, $P_n = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

定义 2 (逆序与逆序数) 在一个 n 元排列中, 当某两个元素的先后次序与标准次序不同时, 就构成了一个逆序, 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数, 用 $\tau(i_1, i_2 \cdots i_n)$ 或 τ 表示排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列, 逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

在排列中, 将任意两个元素对调, 其余的元素不动, 这种作出新排列的手续叫做对换; 将相邻两个元素对换, 叫做相邻对换.

二、重要定理及公式

定理 1 对换改变 n 元排列的奇偶性.

定理 2 任一 n 元排列与排列 $1\ 2\ 3 \cdots n$ 可以经过一系列对换互变, 并且所作对换的次数与这个 n 元排列有相同的奇偶性.

典型例题精解

例 求下列排列的逆序数, 并确定它们的奇偶性:

(1) $n(n-1)(n-2)\cdots 3\ 2\ 1$;

(2) $(2k)1(2k-1)2(2k-2)3(2k-3)\cdots(k+1)k$.

【解析】 (1) $\tau = 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + (k-1) + (k-1) + k = (1+k-1)(k-1) + k = k^2$, 故所求排列的奇偶性与 k^2 的奇偶性相同.

(2) $\tau = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. 当 $n = 4k$ 或 $4k+1$ 时, τ 为偶数, 所给排列为偶排列; 当 $n = 4k+2$ 或 $4k+3$ 时, τ 为奇数, 所给排列为奇排列.

§2 n 阶行列式

考试大纲要求

- (1) 了解行列式的概念, 掌握行列式的性质.
- (2) 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

考点、重点与难点介绍

一、基本概念

定义 1 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i, j=1, 2, \dots, n)$ 组成的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式或 n 阶方阵 $D = (a_{ij})_{n \times n}$ 的行列式, 简记做 $\det(a_{ij})$, 数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素, 它的值是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和. 它由 $n!$ 项组成, 即

$$D = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是由 $1, 2, \dots, n$ 这 n 个数构成的一个 n 元排列, $\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$ 是排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数, $\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

定义 2 在 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{简记为} \quad |a_{ij}|$$

中把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去, 由此得到的 $(n-1)$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式, 记做 M_{ij} , 即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij} , $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

注 若 A 为 n 阶矩阵, 则 n 阶矩阵 A 的行列式用 $|A|$ 表示.

二、重要定理与性质

1. 行列式按行(列)展开定理

定理 设 $D = |a_{ij}|$ 为 n 阶行列式, 则有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} &= a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \cdots + a_{in} A_{kn} = \begin{cases} D, & i=k, \\ 0, & i \neq k; \end{cases} \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} &= a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \cdots + a_{nj} A_{nk} = \begin{cases} D, & j=k, \\ 0, & j \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

2. 行列式的基本性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

性质 2 互换行列式的两行(列), 行列式变号.

推论 1 如果行列式有两行(列)完全相同, 则此行列式等于零.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k , 等于用数 k 乘此行列式.

推论 2 行列式中某一(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例, 则此行列式等于零.

性质 5 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和, 如第 i 列的元素都是两数之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去, 行列式不变.

注 (1) 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 一般地, $|A+B| = |B+A| \neq |A| + |B|$.

(2) 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 一般地, $AB \neq BA$, 但是

$$|AB| = |BA| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A|$$

(3) 设 A 为 n 阶矩阵, 则 $|kA| = k^n |A|$, 切记 $|kA| \neq k|A|$.

3. 行列式的重要公式与结论

(1) 上(下)三角行列式等于其主对角线上元素的乘积, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

(3) 设 A 是 m 阶方阵, B 是 n 阶方阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A| |B|$$

$$\begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B|$$

(4) 设 A 是 n 阶方阵, A^T 为 A 的转置矩阵, 用 $|A|$, $|A^T|$ 表示对应 n 阶方阵的行列式, 则有

$$|A| = |A^T|$$

(5) 设方阵 A 可逆, 则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

(6) $|kA| = k^n |A|$ (A 为 n 阶方阵).

(7) 设 A, B 为同阶方阵, 则 $|AB| = |A| |B|$, 注意 $|A+B| \neq |A| + |B|$.

(8) 设 A^* 为 A 的伴随矩阵, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式,

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

则 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

(9) 设 A, B 为 n 阶方阵, 则

$$|AB| = |BA| = |A| |B|$$

但一般地 $AB \neq BA$.

(10) 范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j),$$

其中记号“ $\prod$ ”表示全体同类因子的乘积.

典型例题精解

1. 按行列式定义计算行列式

例 1 (1) 在四阶行列式中, 取负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项是_____;

(2) 设

$$f(x) = D = \begin{vmatrix} 2x & 3 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x & 4 \\ x & 2 & 1 & 4x \end{vmatrix},$$

则 x^3 项的系数_____, x^4 的系数_____, 常数项为_____.

【答案】 (1) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ (2) $-14, 8, -2$

【解析】 (1) 由行列式的定义可知, 包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$, 所以 i, j 定为 2, 4 或 4, 2; 又因为此项符号为负号, 所以 $i=4, j=2$, 故答案为 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

(2) 含有 x^3 的项是 $-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 和 $-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ 即 $-12x^3$ 和 $-2x^3$, 故 x^3 的系数为 -14 ; 含有 x^4 的项是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$, 即 $8x^4$, 故 x^4 的系数为 8 ; 常数项为 $f(0)$, 即

$$f(0) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

2. 利用行列式性质计算行列式

例 2 设 A 为三阶方阵, A_1, A_2, A_3 表示 A 中三个列向量, 则 $|A| =$ _____.

(A) $|A_3, A_2, A_1|$

(B) $|A_1 + A_2, A_2 + A_3, A_3 + A_1|$

(C) $|-A_1, A_2, A_3|$

(D) $|A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_2 + A_3|$

【答案】 D

【解析】 由行列性质, 用排除法

设 $A = A(A_1, A_2, A_3)$ 则 $|A| = |A_1, A_2, A_3|$ 由行列式性质 $|A_3, A_2, A_1| = -|A_1, A_2, A_3|$ 故(A)不对. $|-A_1, -A_2, -A_3| = -|A_1, A_2, A_3|$

故(C)不对 $|A_1 + A_2, A_2 + A_3, A_3 + A_1| = 2|A_1, A_2, A_3|$ 故(B)不对.

所以, 此题正确答案应为 D.

3. 三阶、四阶行列式的计算

例3 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} \alpha^2 + 1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 + 1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 + 1 \end{vmatrix}$$

【解析】为记号简便起见, 本书用 r_i 表示第 i , c_j 表示第 j 列.

$$\begin{aligned} D &= \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{\alpha^2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 + \frac{1}{\beta^2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 + \frac{1}{\gamma^2} \end{vmatrix} \\ &= \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right) \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) + 1 + 1 - 1 - \frac{1}{\beta^2} - 1 - \frac{1}{\alpha^2} - 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right] \\ &= \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 \left(\frac{1}{\beta^2 \gamma^2} + \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} + \frac{1}{\alpha^2 \gamma^2} + \frac{1}{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2} \right) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 1. \end{aligned}$$

例4 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 -3

【解析】将 2、3、4 列全加到第一列上得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

例5 设

$$F(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & x - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & x - a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x - a_{44} \end{vmatrix},$$

求: (1) x^4 的系数; (2) x^3 的系数; (3) 常数项.【解析】(1) 含 x^4 的项必为 $(x - a_{11})(x - a_{22})(x - a_{33})(x - a_{44})$, 可见 x^4 的系数为 1.(2) 含 x^3 的项为

$$- [a_{11}(x - a_{22})(x - a_{33})(x - a_{44}) + a_{22}(x - a_{11})(x - a_{33})(x - a_{44}) + a_{33}(x - a_{11})(x - a_{22})(x - a_{44}) + a_{44}(x - a_{11})(x - a_{22})(x - a_{33})],$$

可见 x^3 的系数为 $-(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44})$.(3) 常数项即为 $x=0$ 时的 $F(x)$ 的值:

$$F(0) = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

例 6 求方程

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 3x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} = 0$$

的解.

【解析】 将 $f(x)$ 按行列式性质计算:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{vmatrix} c_2 - c_1 & x-2 & 1 & 0 & -1 \\ c_3 - c_1 & 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ c_4 - c_1 & 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ & 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_4 + c_2} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} = (-x)(-5x+5) = 5x(x-1) \end{aligned}$$

所以 $f(x) = 0$ 的解为 $x = 0$ 或 $x = 1$

4. n 阶行列式的计算

例 7 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

【解析】 由行列式性质, 有

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a + (n-1)b & a + (n-1)b & a + (n-1)b & \cdots & a + (n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\ &\stackrel{c_2 - c_1}{=} \stackrel{c_3 - c_1}{=} \stackrel{\cdots}{=} \stackrel{c_n - c_1}{=} [a + (n-1)b] \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a + (n-1)b] (a-b)^{n-1} \end{aligned}$$

注 此种方法适用于各行(或列)各元素之和相等的行列式.

例 8 计算 $2n$ 阶行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & & & b_n \\ & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & & & d_n \end{vmatrix}$$

【解析】 由行列式展开定理，有

$$D_{2n} \xrightarrow{\text{按第一行展开}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & d_1 & \\ & & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \\ 0 & & & & & d_n \end{vmatrix}$$

$$+ b_n (-1)^{1+2n} \begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & a_1 & b_1 & \\ & & & c_1 & d_1 \\ & & & & \ddots \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_n d_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & a_1 & b_1 & \\ & & & c_1 & d_1 \\ & & & & \ddots \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix} - b_n c_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & a_1 & b_1 & \\ & & & c_1 & d_1 \\ & & & & \ddots \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} D_{2n} &= (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)} = (a_n d_n - b_n c_n) (a_{n-1} d_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1}) D_{2(n-2)} \\ &= \cdots = (a_n d_n - b_n c_n) (a_{n-1} d_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1}) \cdots (a_1 d_1 - b_1 c_1) \end{aligned}$$

注 此题是通过运用行列式展开定理来求解的，并应用了类推法。

例9 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 4 & \cdots & 2^n \\ 3 & 9 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$$

【解析】 利用行列式性质得

$$\begin{aligned}
 D_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix} = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= (n!) \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j) \\
 &= (n!) (2-1)(3-1) \cdots (n-1) \cdot (3-2)(4-2) \cdots (n-2) \cdots [n-(n-1)] \\
 &= (n!) [(n-1)!] [(n-2)!] \cdots (2!)(1!) \\
 &= (n!) [(n-1)!] [(n-2)!] \cdots 2 \cdot 1
 \end{aligned}$$

注 本题关键的一步是：提取各行的公因子，变成范德蒙行列式

例 10 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

【解析】 D 中不为零的元素为 $a_{12} = 1$, $a_{23} = 2$, $\cdots$, $a_{n-1,n} = n-1$, $a_{n1} = 1$, 故在 $n!$ 项中, 非零项只有 $a_{12}a_{23}a_{34} \cdots a_{n-1,n}a_{n1} = n!$, 其列标排列 $2\ 3\ 4 \cdots (n-1)\ 1$ 的逆序数为 $n-1$. 因此

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n = (-1)^{n-1} n!$$

注 利用行列式定义计算(适用于行列式中有较多元素为零的情形).

例 11 证明

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos \alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha$$

证 应用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时, 命题显然成立.

当 $n=2$ 时, 有 $\begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 \\ 1 & 2\cos \alpha \end{vmatrix} = 2\cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$. 命题亦成立.

设 $n-1$ 时, 命题成立, 即 $D_{n-1} = \cos(n-1)\alpha$

现考虑 D_n 的情形, 将 D_n 按最后一列展开, 则有

$$\begin{aligned}
 D_n &= (-1)^{n+n} 2\cos\alpha D_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} \\
 &+ (-1)^{n-1+n} \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 2\cos\alpha D_{n-1} + (-1)^{4n-3} D_{n-2} \\
 &= 2\cos\alpha \cdot \cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha = \cos n\alpha
 \end{aligned}$$

5. 抽象行列式的计算

例 12 已知实矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足条件:

- (1) $a_{ij} = A_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$, 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式;
- (2) $a_{11} \neq 0$. 计算行列式 $|A|$.

【解析】

$$\text{因为 } a_{ij} = A_{ij}, \text{ 即 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = (A^*)^T,$$

亦即 $A^T = A^*$. 由于 $AA^* = |A|E$, 故 $AA^T = |A|E$.

两边取行列式, 得 $|A|^2 = |A| \cdot |A^T| = ||A|E| = |A|^3$.

从而 $|A| = 1$ 或 $|A| = 0$.

由于 $a_{11} \neq 0$, 对 $|A|$ 按第 1 行展开, 有

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 > 0. \text{ 故必有 } |A| = 1.$$

例 13 已知三阶方阵 A 的特征值为 $-1, 0, 1$, 令 $B = A^3 - 2A^2 + E$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$, $|B+E| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 应填 0 和 -2

【解析】

令 $f(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 1$, 则 $B = f(A)$, 所以 B 的特征值为

$$f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + 1 = -2, f(0) = 1, f(1) = 0,$$

故 $|B| = (-2) \times 1 \times 0 = 0$

又 $B+E$ 的特征值为 $-1, 2, 1$, 故 $|B+E| = (-1) \times 2 \times 1 = -2$.

注 A 的特征值互异, 所以 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, 利用这一结果也可以求行列式.

强化训练

一、填空题

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的值为_____.

2. 在四阶行列式, 包含因子 a_{31} 的项是_____.

3. 设 A 为四阶方阵, B 为三阶方阵, 且 $|A| = 2$, $|B| = -1$, 则 $\|A\|B\| =$ _____,
 $\|B\|A\| =$ _____.

4. 在函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中, x^3 的系数是_____.

5. 设 A 是 n 阶方阵, $|A| = 5$, 则 $\left|A^* - \left(\frac{1}{10}A\right)^{-1}\right| =$ _____.

6. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & x & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 x 的代数余子式是_____.

二、选择题

1. 五阶行列式的展开式中共有()项.

(A) 5^2 (B) $5!$ (C) 10 (D) 15

2. 设 A 为三阶方阵, A_1, A_2, A_3 表示 A 中三个列向量, 则 $|A| =$ _____.

(A) $|A_3, A_2, A_1|$ (B) $|A_1 + A_2, A_2 + A_3, A_3 + A_1|$
 (C) $| -A_1, A_2, A_3 |$ (D) $|A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_2 + A_3|$

3. 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix} = 0$, 则 $x =$ ().

(A) -2 (B) 2 (C) -3 (D) 3

4. 设 A, B 是 $n(n > 2)$ 阶方阵, 则必有().

(A) $|A+B| = |A| + |B|$ (B) $|AB| = |BA|$
 (C) $||A||B| = ||B||A|$ (D) $|A-B| = |B-A|$

5. 排列 $2\ 4\ 6\ \cdots\ (2n)\ 1\ 3\ 5\ \cdots\ (2n-1)$ 的逆序数为().

(A) n (B) 0 (C) $\frac{n(n-1)}{2}$ (D) $\frac{n(n+1)}{2}$

6. 设三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\gamma_2 \\ 3\gamma_3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3$ 均为三维行向量, 且已知行列