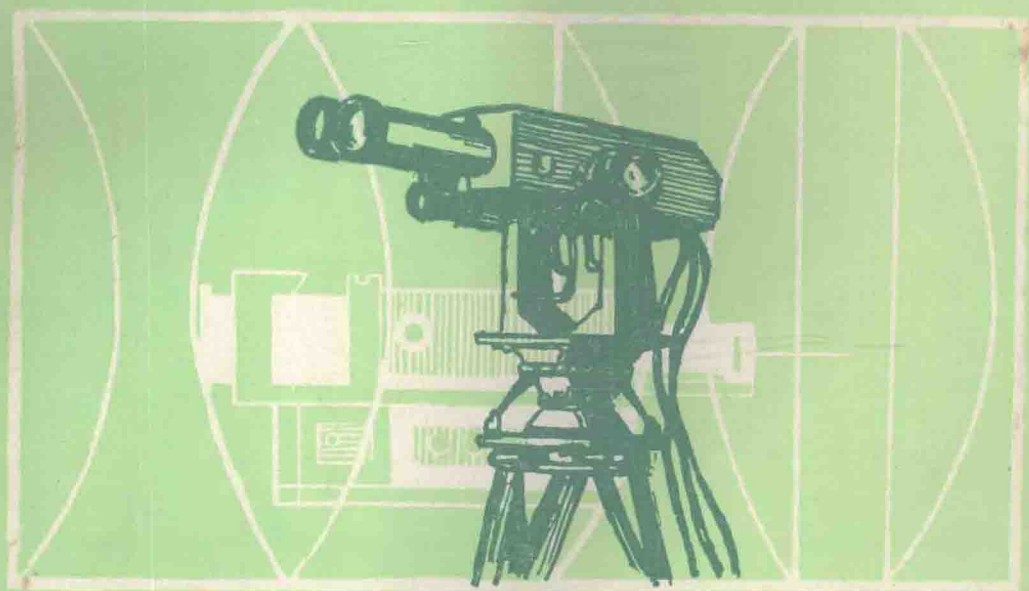


高等学校教材

成像系统分析导论

张保民 编著



国防工业出版社

8-00 号 军 用 (京)

高 等 学 校 教 材

成 像 系 统 分 析 导 论

张保民 编著

国 防 工 业 出 版 社

(京)新登字106号

内 容 简 介

本书是为光电与光学类专业研究生编写的教材,同时也作为相应专业本科的教学参考书。

本书中心内容为成像系统分析的基本理论方法及其数理基础。主要包括:图像信息、信号与系统概论;变换与展开;狭义与广义抽样定理;受限函数与序列;随机过程;滤波概论;线性空间不变(等晕)成像系统;空间抽样成像系统;运动效应;图像探测统计学。

本书可供光电成像技术、光学、光学仪器专业以及其它接触图像技术的科技人员与大专院校师生参考。

成像系统分析导论

张保民 编著

责任编辑 翟 谦

国防工业出版社 出版 发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码 100044)

华东工学院印刷厂印装

787×1092 1/16 印张12¹/₄ 281千字

1992年8月第一版 1992年8月第一次印刷 印数:0 001—1 000册

ISBN 7-118-01062-6/O·85 定价:3.21元

出版说明

遵照国务院关于高等学校教材工作的分工，原兵器工业部教材编审室自成立之日起就担负起兵工类专业教材建设这项十分艰巨而光荣的任务。由于各兵工院校、特别是参与编审工作的广大教师积极支持和努力，及国防工业出版社、兵器工业出版社和北京理工大学出版社的紧密配合，自1985年到1988年共编审出版了89种教材。

为了使兵工类专业教材更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映兵工科学技术的先进水平，达到打好基础、精选内容、逐步更新、利于提高教学质量的要求，在总结第一轮教材编审出版工作的基础上，制订了兵工教材编审工作的五个文件。指导思想是：以提高教材质量为主线，完善编审制度，建立质量标准，明确岗位责任，充分发挥各专业教学指导委员会的学术和咨询作用，加强从教材列选、编写到审查整个教材编审过程的科学管理。

1985年根据教学需要，我们组织制订了“七五”教材编写规划，共列入教材176种。这批教材主要是从经过两遍教学使用、反映较好的讲义中遴选出来的，较好地反映了当前兵工教材的科学性和适合我国情况的先进性，并不同程度地更新了教材内容，是一批较好的新型教材。

本教材由邹异松主审，经机械电子工业部光电技术教学指导委员会复查，兵工教材编审室审定。

国防工业出版社聘请杨实诚为本书的特约编辑。

限于水平和经验，这批教材的编审出版难免有错误之处，希望广大读者批评指正。

机械电子工业部兵工教材编审室

1989年8月

前 言

视觉器官比所有其它感觉器官都更能使人们获得最丰富的外界信息。因而,视觉或图像信息是一切信息形式中最重要的一种。但人类的视觉能力毕竟有限,由此而发展起来了增强和扩展人类视觉能力的图像技术。图像技术的核心为图像物理形式的转换,而完成这种转换的实际技术装置就是成像系统。

本书是作者在多年来为光电与光学类专业研究生讲授成像系统分析课程所写讲稿的基础上重新编排整理而成的。中心内容为成像系统分析的基本理论方法及其数理基础。

全书共分九章。第一章具有引言和概论的性质。该章在阐明图像与图像信号的基本定义以及连续与离散图像的数学表示之后,论述了信号空间以及线性与同态系统的定义与性质,并给出了图像信息量与信道容量的基本计算方法。第二、三、四章阐述用于信号与系统分析的变换与展开的基本理论和方法。第二章为连续变换。以傅里叶变换与沃尔什变换为重点,同时也论及拉普拉斯、希尔伯特、汉克尔等变换,并且着重阐明了各种变换与傅里叶变换之间的相互关系与内在联系。第三章为正交展开与抽样定理。主要论述了正交展开的最小均方差条件与正交集的完全性条件,一维和二维的狭义与广义抽样定理,并着重讨论了各种类型抽样的尼奎斯特条件。第四章为离散变换,包括 Z 变换、离散傅里叶变换、离散沃尔什变换与二维西变换。第五、六两章分别阐述最基本的两类信号的重要性质。第五章为受限函数与受限序列。采用函数与序列这样的术语而未直称其为信号,是考虑到这样亦可使其代表系统。在这一章中,同时还讨论了长球函数与长球序列正交基展开以及频带受限逼近误差与有限抽样截断误差。第六章为随机过程。重点为多元随机变量和平稳随机过程。并进而阐述了维纳—辛钦定理、卡亨南—洛维展开与卡亨南—洛维变换。第七章滤波概论,专门用来论述最具普遍意义的滤波系统。该章在深入阐明传递函数定义与物理可实现条件的基础上,重点讨论了模拟与数字滤波器、窗函数、统计滤波、光学滤波。第八、九章为成像系统分析专题。虽为专题,但由于讨论的是共性问题,其典型性与概括性使之原则上对一切成像系统均有普遍意义。第八章为成像过程。首先对线性空间不变(等晕)成像系统讨论了空间卷积过程、相干传递函数与光学传递函数。接着以较大篇幅重点对抽样成像系统论述了扫描过程和凝视列阵成像过程的基本理论与像质评价技术。由于景物与成像系统之间常有相对运动,因此,该章还特别讨论了运动效应,并引入了等效光学传递函数的概念。第九章为探测过程。在阐明图像噪声基本理论模型和系统噪声传递链的基础上,论述了以判决准则、探测方程、系统信道容量与实际传输信息量为核心内容的图像探测统计学。

本书承蒙北京理工大学邹异松教授主审,华东工学院周旭辉副教授任责任编辑,并经机械电子工业部教材编审室主任杨实诚高级工程师审核,谨向他们表示衷心的感谢;同时,对中国科学院长春光学精密机械研究所所长王乃弘教授、北京理工大学学术委员会主任周立伟教授、298厂麦伟麟高级工程师和华东工学院果玉忱教授给予的鼓励与帮助,致以深切的谢意。

由于本人水平有限,书中缺点错误实属难免,恳请批评指正。

作者

1990年2月

目 录

第一章 图像信息、信号与系统	1
一、图像信号的一般数学表示	1
(一) 连续图像	1
(二) 离散图像	2
二、图像信息量与信道容量	4
(一) 离散图像信息量	4
(二) 连续图像信息量	5
(三) 信道容量	6
三、信号集与信号空间	10
(一) 信号集	10
(二) 测度空间	12
(三) 线性(矢量)空间	13
(四) 赋范线性空间	13
(五) 巴那赫空间	14
(六) 内积空间与希尔伯特空间	14
四、线性系统	15
(一) 广义函数——狄拉克函数	15
(二) 线性系统定义	17
(三) 冲激响应与阶跃响应	17
(四) 线性不变系统输入任意连续信号时的输出	18
(五) 一般线性系统输入任意连续信号时的输出	19
(六) 同态系统	19
(七) 离散系统	21
第二章 连续变换	23
一、傅里叶变换	23
(一) 基本定义与性质	23
(二) 相关函数与瑞利——帕斯瓦尔定理	25
(三) 矩心与均方横标	26
(四) 信号宽度	27
(五) 时空域与频率域中的信号宽度积	28
(六) 多维傅里叶变换	30
二、其它变换	32
(一) 汉克尔与傅里叶——贝塞尔变换	32
(二) 希尔伯特变换	34
(三) 拉普拉斯变换	36

(四) 沃尔什变换	38
第三章 正交展开与抽样定理	43
一、广义傅里叶级数	43
(一) 基本定义	43
(二) 最小均方差条件	44
(三) 帕斯瓦尔关系	45
二、抽样定理	46
(一) 抽样的基本定义与频谱变化	46
(二) 一维抽样定理	47
(三) 二维抽样定理	48
三、广义抽样定理	51
(一) 单系统广义抽样定理	51
(二) 多系统广义抽样定理	53
第四章 离散变换	56
一、Z变换	56
(一) 基本定义与性质	56
(二) 反变换求法	58
(三) 与拉普拉斯变换和傅里叶变换之间的关系	59
二、离散傅里叶变换	60
(一) 基本定义与性质	60
(二) 快速傅里叶变换	62
三、离散沃尔什变换	64
(一) 离散沃尔什函数	64
(二) 抽样定理	65
(三) 离散沃尔什变换的基本定义与性质	65
(四) 快速沃尔什变换	68
四、二维酉变换	69
(一) 二维酉变换通式	69
(二) 二维DFT与二维DWT	70
第五章 受限函数与受限序列	73
一、频带受限函数	73
(一) 基本定义	73
(二) 主要性质	74
(三) 泛函极值	77
(四) 吉布斯现象	80
二、时间或空间受限函数	82
(一) 基本定义	82
(二) 主要性质	83
三、受限序列	84
(一) 频带受限序列	84

..... (二) 时间或空间受限序列	87
四、长球函数与长球序列正交基展开	87
..... (一) 长球函数正交基展开	87
..... (二) 离散长球序列正交基展开	89
..... (三) 周期性离散长球序列正交基展开	90
五、逼近与截断误差	92
..... (一) 频带受限逼近及其误差	92
..... (二) 有限抽样及其截断误差	94
第六章 随机过程	96
一、连续与离散随机变量	96
..... (一) 基本定义	96
..... (二) 非负整数值离散随机变量	98
..... (三) 随机矢量	99
..... (四) 多元高斯分布	101
二、平稳与非平稳随机过程	102
..... (一) 基本定义	102
..... (二) 维纳—辛钦定理	108
..... (三) 卡亨南—洛维展开	111
..... (四) 卡亨南—洛维变换	114
第七章 滤波概论	116
一、传递函数定义	116
..... (一) 连续系统	116
..... (二) 离散系统	118
二、物理可实现系统	119
..... (一) 稳定性条件	119
..... (二) 时间系统的因果性与空间系统的截断性	119
三、全通系统与最小相移系统	120
..... (一) 全通系统	120
..... (二) 最小相移系统	121
四、低通滤波器	122
..... (一) 理想低通滤波器	122
..... (二) 因式分解	123
..... (三) 低通滤波器实例	125
五、带通滤波器	128
..... (一) 对称带通滤波器	128
..... (二) 非对称带通滤波器	130
六、信号延迟	130
..... (一) 低通滤波器的信号延迟	130
..... (二) 带通滤波器的信号延迟	131
七、数字滤波器	132

(一)	连续系统的离散(数字)仿真	132
(二)	无限长度冲激响应数字滤波器	133
(三)	有限长度冲激响应数字滤波器	133
八、窗函数		135
(一)	基本定义	135
(二)	频域影响	135
(三)	常用窗函数对	137
九、统计滤波		139
(一)	匹配滤波器	139
(二)	维纳滤波器	142
十、光学滤波		145
(一)	傅里叶透镜	145
(二)	空间滤波器	146
第八章 成像过程		149
一、线性空间不变(等晕)成像系统		149
(一)	空间卷积	149
(二)	相干传递函数与光学传递函数	151
(三)	多色光学传递函数	152
(四)	调制传递函数与相位传递函数	153
(五)	光学成像系统的 OTF	154
(六)	成像器件的 MTF	156
二、抽样成像系统		159
(一)	扫描过程	159
(二)	凝视列阵基本理论模型	161
(三)	典型凝视列阵	163
(四)	列阵成像质量评价	165
三、运动效应		167
(一)	等效光学传递函数	167
(二)	线性运动	169
(三)	随机运动	170
第九章 探测过程		172
一、成像系统中的噪声		172
(一)	图像噪声的基本理论模型	172
(二)	系统噪声	173
二、图像探测统计学		177
(一)	判决准则	177
(二)	探测方程	180
(三)	系统信道容量与实际传输的信息量	182

参考文献

第一章 图像信息、信号与系统

人类靠自己的多种感官感知外界。在视觉、听觉、嗅觉、味觉和触觉中,属视觉传递的信息最多。然而,人的视觉能力毕竟有限。于是,随着生产和科学技术的发展,出现了各种扩展人类视觉能力的技术装置。它们涉及扩展视觉空间范围的图像传输技术、扩展视觉时间范围的图像记录技术和扩展视觉分辨功能的图像处理技术。这里,图像处理技术是广义的。它包括波谱转换(红外——可见、紫外——可见、X——可见)技术、微光增强技术以及模拟与数字处理技术。这些技术装置或曰系统的作用,就是摄取、记录、传输和处理景物图像,并最终人们可以接受的方式将其重现、显示给观察者。因此,可以统一地把它们看作是以图像为工作对象的信息传递系统。而图像就其物理实质来说,则可以被认为是最终能给人以视觉信息的光子、电子或其它粒子载量、通量密度或状态的二维或三维空间分布。从工程观点看来,图像表现为信号。图像信号就是载有图像信息的某种物理量的空间和时间上的变化。这种物理量可能是辐射亮度或光亮度,也可能是电位、电流和电压等等。图像信号在数学上一般用函数或泛函表示。其中,对于随机的图像与噪声,则按随机过程处理。

一、图像信号的一般数学表示

(一) 连续图像

任何实际景物都可以表示为瞬时辐射亮度的三维空间分布

$$L_e = L_e(x, y, z, \lambda, t) \quad (1-1)$$

人们观察景物将可以得到有关位置、尺寸、亮度、色彩及其分布状况的信息。因此,景物对视觉来说,其光学特性又可以用明度、色调(主波长)和饱和度三个参量函数来表示

$$V = V(x, y, z, t) \quad (1-2)$$

$$\lambda = \lambda(x, y, z, t) \quad (1-3)$$

$$p = p(x, y, z, t) \quad (1-4)$$

电视技术是典型的图像技术。目前世界上有三种成熟的标准电视制式:NTSC(美国国家电视制式委员会)制、PAL(逐行倒相)制、SECAM(彩色顺序记忆)制。NTSC制规定帧频30Hz,隔行扫描,场频60Hz,每帧525行。PAL制和SECAM制则规定帧频25Hz,隔行扫描,场频50Hz,每帧625行。对于彩色电视工程,NTSC制首先按CIE—RGB表色原理规定出彩色显像管的三基色色度坐标 $(x_{R'}, y_{R'})$ 、 $(x_{G'}, y_{G'})$ 、 $(x_{B'}, y_{B'})$,并由此得出该三基色坐标下的光谱三刺激值, $\bar{r}'(\lambda)$ 、 $\bar{g}'(\lambda)$ 和 $\bar{b}'(\lambda)$,作为彩色摄像机的色度匹配标准。在匹配要求获得满足的情况下,彩色摄像管对于景物辐射亮度 $L_e(x, y, t)$ 分别给出红、绿、蓝三种信号 $R(t)$ 、 $G(t)$ 和 $B(t)$ 。然后,以此为基础,由 R 、 G 、 B 信号线性组合产生亮度信号 Y

$$Y = 0.299R + 0.587G + 0.114B \quad (1-5)$$

再进而构成作为 $(R-Y)$ 和 $(B-Y)$ 线性函数的两个色度信号 I 和 Q

$$I = 0.877(R-Y) \cos 33^\circ - 0.493(B-Y) \sin 33^\circ \quad (1-6)$$

$$Q = 0.877 (R - Y) \sin 33^\circ + 0.493 (B - Y) \cos 33^\circ \quad (1-7)$$

传送时, Y 对载波调幅, I 和 Q 分别对相位相差 90° 的副载波调幅, 并将两个色度信号正交调制的副载波插在载波调幅亮度信号的高频部分。PAL制基本类似于NTSC制, 但采用把两个色差信号 $(R - Y)$ 与 $(B - Y)$ 中的一个以逐行交替倒相的方式传送, 从而可对传输相位失真引起的色度偏移产生视觉平均的效果。SECAM制则干脆取消了对色度信号的正交调制, 而是将两个色差信号 $(R - Y)$ 和 $(B - Y)$ 逐行交替地与亮度信号 Y 一起传送。亮度信号对载波调幅, 色差信号对副载波调频。当然, 无论何种制式, 在彩色电视系统的接收端, 都需要对编码传送的信号进行相应的解调, 分离出 R 、 G 、 B 信号, 以推动彩色显像管显示出再现的彩色图像。

非标准制式也是有的, 它存在于尚未成熟的发展系统或特殊应用之中。在这种情况下, 时需要制式转换, 以增强兼容性。

图像系统多种多样, 图像信号的形式和变化更是千差万别。但无论如何, 总可以用一个有界的非负实函数来表达连续图像

$$\begin{aligned} f &= f(x, y, z, t) \\ 0 &\leq f(x, y, z, t) \leq M \\ (x, y, z) &\in V \\ |t| &\leq T \end{aligned} \quad (1-8)$$

而且, 如果不需要考虑运动效应, 可有

$$\begin{aligned} f &= f(x, y, z) \\ (x, y, z) &\in V \end{aligned} \quad (1-9)$$

通常, 二维问题最普遍。在这种情况下

$$\begin{aligned} f &= f(x, y) \\ (x, y) &\in A \end{aligned} \quad (1-10)$$

对于通过分解图像顺序传送像素的成像系统, 图像信号将发生空间和时间的域间转换。摄像时, 二维空间分布转换为—维时间信号; 显像时, —维时间信号转换为二维空间分布

$$\begin{aligned} f(x, y) &\rightleftharpoons \varphi(t) \\ (x, y) &\in A \quad |t| \leq T = T(A) \end{aligned} \quad (1-11)$$

此外, 如果以矢量坐标取代常用的笛卡尔坐标, 则亦可将多维函数写成简洁的一维形式。如对二维函数 $f(x, y)$, 可有

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(s) \\ s \text{ 矢端} &\in A \end{aligned} \quad (1-12)$$

(二) 离散图像

离散图像由连续图像按一定的规律抽样形成。抽样一般采取等间隔方式, 即均匀抽样。但也可以非均匀方式抽样。抽样既可能产生于空间域, 也可能产生于时间域。连续图像在空间上被镶嵌结构形式的图像传感列阵抽样, 属空间抽样。而图像视频信号的数字化则一般为时间过程。数字化过程的第一步就是抽样, 以形成离散信号, 然后才是幅值的亦即灰度级的量化。

对函数(信号)在抽样点上取函数值的抽样, 称为点抽样。

点抽样的抽样函数为梳函数

$$\text{comb}\left(-\frac{s}{S}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(s - lS) \quad (1-13)$$

其中, $\delta(s)$ 为克隆尼克 (Kronecker) 函数, 简称 δ 序列

$$\delta(s) = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ 0 & s \neq 0 \end{cases} \quad (1-14)$$

S 是 s 轴上相邻抽样点之间的距离, 称为抽样周期。

抽样函数作用于待抽样的函数, 即获得原函数的样本函数, 或曰样值序列。如对于二维函数 $f(x, y)$, 可有

$$\begin{aligned} f_{mn} &= f(x, y) [\delta(x - mX) \delta(y - nY)] \\ &= f(mX, nY) = f[m, n] \end{aligned} \quad (1-15)$$

$$\begin{aligned} f_{ps}(x, y) &= f(x, y) \left[\text{comb}\left(-\frac{x}{X}\right) \text{comb}\left(-\frac{y}{Y}\right) \right] \\ &= f(x, y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(x - mX) \delta(y - nY)] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{mn} \end{aligned} \quad (1-16)$$

对函数 (信号) 在抽样点上取函数在一定区域内的加权积分值的抽样, 称为积分抽样。在这一情况中, 对于二维函数 $f(x, y)$, 若起积分加权作用的窗口函数为 $w(x, y)$, 则有

$$\begin{aligned} (1-17) \quad f_{mn} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) w(mX - x, nY - y) dx dy \\ &= [f(x, y) ** w(x, y)]_{\substack{x=mX \\ y=nY}} \end{aligned} \quad (1-17)$$

$$\begin{aligned} (1-18) \quad f_{is}(x, y) &= [f(x, y) ** w(x, y)] \left[\text{comb}\left(-\frac{x}{X}\right) \text{comb}\left(-\frac{y}{Y}\right) \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{mn} \end{aligned} \quad (1-18)$$

样值数目有限的二维序列可以排成矩阵。如有

$$\left\{ f_{mn} \right\}_{M, N} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_{mn} \quad (1-19)$$

可写出

$$f = \begin{bmatrix} f_{00} & f_{01} & \cdots & f_{0(N-1)} \\ f_{10} & f_{11} & \cdots & f_{1(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{(M-1)0} & f_{(M-1)1} & \cdots & f_{(M-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

或

$$f = [f_{mn}]_{M \times N} \quad (1-21)$$

矩阵中的每一个阵元都代表离散图像中的一个相应像素。

可以将二维的图像矩阵 f 转换为一维形式的列矢量或行矢量 φ 。方法是对矩阵 f 顺序进行列扫描或行扫描，而后将阵元排成长串。以列扫描为例，如有 $N \times 1$ 列矢量 v_n 和 $MN \times N$ 矩阵 p_n ，

$$v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \\ n+1 \\ \dots \\ N-1 \end{matrix} \quad (1-22)$$

$$p_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ N-1 \end{matrix} \quad (1-23)$$

其中，0与1为 $M \times N$ 零矩阵和单位矩阵，则可写出

$$\varphi = \sum_{n=0}^{N-1} p_n f v_n \quad (1-24)$$

它规定由矢量 v_n 从矩阵 f 中提取出第 n 列，而后由矩阵 p_n 再把这一列阵元放到矢量 φ 的第 n 段位置上。相反的操作，即由图像矢量 φ 转换为图像矩阵 f ，可按下式完成

$$f = \sum_{n=0}^{N-1} p_n^T \varphi v_n^T \quad (1-25)$$

二、图像信息量与信道容量

(一) 离散图像信息量

假设离散图像第 u 个像素 $u(m_u, n_u)$ 的幅值量化级数，即灰度级数为 Q ，且第 q 个灰度级出现的概率为 $P(q)$ ，则该像素 q 灰度级具有的信息量为

$$I_u = -\log P(q) \quad (1-26)$$

而就所有灰度级的整体性质而言，可以写出该像素的平均信息量（熵）

$$H(u) = -\sum_{q=0}^{Q-1} P(q) \log P(q) \quad (1-27)$$

信息量表达式中对数以什么为底只影响信息量的单位。以2为底，信息量的单位为比特（bit）；以10为底，信息量的单位为哈特（hartley）；以e为底，信息量的单位为奈特（nat）。

假定图像所有像素量化的级数均相同，各像素间统计无关，但具有相同形式的灰度级概率分布，则整幅图像所具有的平均信息量（熵）为

$$H_f = \sum_{u=0}^{MN-1} H(u) = -MN \sum_{q=0}^{Q-1} P(q) \log P(q) \quad (1-28)$$

其中, MN 为图像的像素总数。

当像素的灰度级具有等概率分布, 即当 $P(0) = P(1) = \dots = P(Q-1) = 1/Q$ 时, 像素具有最大平均信息量 (最大熵)

$$H_{\max}(u) = \log Q \quad (1-29)$$

此时, 图像具有最大平均信息量 (最大熵)

$$H_{f_{\max}} = MN \log Q \quad (1-30)$$

现在考虑两像素联合的情况。图像上任意两像素 $u(m_u, n_u)$ 和 $v(m_v, n_v)$, 其灰度级恰好分别为 q 和 r 的联合概率, 设为 $P(q, r)$, 则显然可知灰度级分别为 q 和 r 的两像素 $u(m_u, n_u)$ 与 $v(m_v, n_v)$ 具有联合信息量

$$I_{uv} = -\log P(q, r) \quad (1-31)$$

而就两像素所有灰度级的整体性质而言的联合平均信息量 (联合熵)

$$H(u, v) = - \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{r=0}^{Q-1} P(q, r) \log P(q, r) \quad (1-32)$$

两像素中一个像素灰度级已知时的联合平均信息量, 称为条件平均信息量 (条件熵)。如在 u 与 v 当中设 u 的灰度级已知, 则条件平均信息量

$$H_u(v) = - \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{r=0}^{Q-1} P(q, r) \log P_q(r) \quad (1-33)$$

其中, $P_q(r)$ 为 u 已知取灰度级 q 时 v 取灰度级 r 的条件概率

$$P_q(r) = \frac{P(q, r)}{P(q)} \quad (1-34)$$

$$H_u(v) = H(u, v) - H(u) \quad (1-35)$$

(二) 连续图像信息量

所谓连续图像, 其连续性既表现为像面的空间连续性, 又表现为像素的灰度连续性。理想的连续图像应当有无穷多像素数目和无穷多灰度级数, 因而具有无限的信息量。但实际上, 无论何时何处, 总有个分辨极限和容许失真问题。在这种情况下, 信息量将仍然是有限的。

假定对连续图像所欲研究的量 (如灰度) 为 z , 并设 z 取值的概率密度函数为 $p(z)$, 则当任意选择 $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ 使 $\varepsilon_1 < \Delta z_i < \varepsilon_2$, 并以 Δz_i 量化 z 得到离散序列 $\{i\Delta z_i\}$ 之后, 只要认为在小的量化区间上 $p(z)$ 为常数, 即可写出该序列所具有的平均信息量

$$\begin{aligned} H_{zd} &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(i\Delta z_i) \Delta z_i \log \frac{1}{p(i\Delta z_i) \Delta z_i} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(i\Delta z_i) \Delta z_i \log \frac{1}{p(i\Delta z_i)} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(i\Delta z_i) \Delta z_i \log \frac{1}{\Delta z_i} \end{aligned} \quad (1-36)$$

对于非常小的 ε_2 , 等式右侧第二个和式收敛于 $\log \varepsilon_1^{-1}$, 等式右侧第一个和式可用积分近似。积分

$$H_z = \int_{-\infty}^{\infty} p(z) \log \frac{1}{p(z)} dz \quad (1-37)$$

用来表示连续分布的 z 所具有的平均信息量(熵)。

连续随机变量在给定平均功率下的最大熵问题, 首先归结为在约束条件为

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(z) dz = 1 \quad (1-38)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 p(z) dz = \sigma^2 \quad (1-39)$$

的情况下, 寻求使

$$H_z = \int_{-\infty}^{\infty} [-p(z) \ln p(z)] dz \quad (1-40)$$

最大的概率密度函数 $p(z)$ 。式中取自然对数是为了处理方便。按照泛函求极值的变分方法, 令

$$F(z, p) = -p(z) \ln p(z)$$

$$\varphi_1(z, p) = p(z)$$

$$\varphi_2(z, p) = z^2 p(z)$$

解方程

$$\frac{\partial F}{\partial p} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial p} = 0$$

得

$$p_{opt}(z) = e^{(-1+\lambda_1+\lambda_2 z^2)}$$

再利用约束条件定出待定系数 λ_1 与 λ_2 , 即求出最佳分布为

$$p_{opt}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \quad (1-41)$$

表明在平均功率一定的情况下, 高斯分布有最大的平均信息量(最大熵)。将式(1-41)代入式(1-40), 可知最大熵

$$H_{z, \max} = \ln \sqrt{2\pi e \sigma^2} \quad (1-42)$$

对整个图像而言, 灰度 $z = z(x, y, t)$ 为视场中任意一点 (x, y) 处于时刻 t 时的量子通量密度, 是三维的随机过程。假定功率 σ^2 的频谱密度为 $W(k_x, k_y, k_t)$, $W(k_x, k_y, k_t)$ 满足如下关系式

$$\sigma^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(k_x, k_y, k_t) dk_x dk_y dk_t \quad (1-43)$$

则如给定允许的失真功率为 W_a , 根据式(1-42), 并考虑到失真功率所导致的熵减少, 可以写出该图像单位面积上的最大平均信息量

$$H_{\max}(Z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \log \frac{W(k_x, k_y, k_t)}{W_a} \right] dk_x dk_y dk_t \quad (1-44)$$

(三) 信道容量

首先考虑离散信道。对于输入符号集

$$A = \{a_q, q = 0, 1, \dots, Q-1\} \quad (1-45)$$

和输出符号集

$$B = \{b_r, r = 0, 1, \dots, R-1\} \quad (1-46)$$

可以用条件概率集

$$\{P_{qr}\} = \{P(b_r|a_q), \forall q, r\} \quad (1-47)$$

来表征信道。条件概率 $P(b_r|a_q)$ 表示给定输入符号为 a_q 的情况下信道输出端出现符号 b_r 的概率，故又称为传递概率。由传递概率 $P_{qr} = P(b_r|a_q)$ 作元素组成矩阵

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0(R-1)} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1(R-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{(Q-1)0} & P_{(Q-1)1} & \dots & P_{(Q-1)(R-1)} \end{pmatrix} \quad (1-48)$$

一个消息所具有的信息量，是其随机性亦即不确定性的测度。一个消息集所具有的平均信息量（熵），就是该消息集随机性亦即不确定性的测度。这样，如定义条件熵

$$H(A|B) = \sum_{r=0}^{R-1} P(b_r) H(A|b_r) \quad (1-49)$$

由于

$$H(A|b_r) = \sum_{q=0}^{Q-1} P(a_q|b_r) \log \frac{1}{P(a_q|b_r)} \quad (1-50)$$

表示的是输出符号已确知为 b_r 的情况下，所有可能的输入符号仍然还有的平均不确定性。因而， $H(A|B)$ 表示任意确知一个输出符号时，所有可能输入符号尚存的平均不确定性，称为信道疑义度。并且，由式 (1-49) 和 (1-50) 可知

$$H(A|B) = \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{r=0}^{R-1} P(a_q, b_r) \log \frac{1}{P(a_q|b_r)} \quad (1-51)$$

由于输入符号集 A 的熵

$$H(A) = \sum_{q=0}^{Q-1} P(a_q) \log \frac{1}{P(a_q)} \quad (1-52)$$

表示的实际上是收到输出符号以前输入符号的平均不确定性，而 $H(A|B)$ 表示的则是收到输出符号以后输入符号尚存的平均不确定性，所以

$$I(A, B) = H(A) - H(A|B) \quad (1-53)$$

就是信道中传输的平均信息量。 $I(A, B)$ 称为 A 与 B 之间的交互信息。交互信息具有互换性，即

$$I(A, B) = I(B, A) \quad (1-54)$$

其中

$$I(B, A) = H(B) - H(B|A) \quad (1-55)$$

$$H(B) = \sum_{r=0}^{R-1} P(b_r) \log \frac{1}{P(b_r)} \quad (1-56)$$

$$H(B|A) = \sum_{q=0}^{Q-1} P(a_q) H(B|a_q) \quad (1-57)$$

$$(64-1) \quad H(B|a_q) = \sum_{r=0}^{R-1} P(b_r|a_q) \log \frac{1}{P(b_r|a_q)} \quad (1-58)$$

由于

$$(65-1) \quad \sum_{r=0}^{R-1} P(b_r|a_q) = 1$$

$$(66-1) \quad H(A) = \sum_{q=0}^{Q-1} P(a_q) \log \frac{1}{P(a_q)} \sum_{r=0}^{R-1} P(b_r|a_q)$$

$$(67-1) \quad = \sum_{q=0}^{Q-1} \left(\sum_{r=0}^{R-1} P(a_q, b_r) \log \frac{1}{P(a_q)} \right)$$

$$(68-1) \quad I(A, B) = \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{r=0}^{R-1} P(a_q, b_r) \log \frac{1}{P(a_q)}$$

$$(69-1) \quad = \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{r=0}^{R-1} P(a_q, b_r) \log \frac{1}{P(a_q|b_r)}$$

$$(70-1) \quad = \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{r=0}^{R-1} P(a_q, b_r) \log \frac{P(a_q|b_r)}{P(a_q)}$$

$$(71-1) \quad = \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{r=0}^{R-1} P(a_q, b_r) \log \frac{P(a_q|b_r) P(b_r)}{P(a_q) P(b_r)}$$

$$(72-1) \quad = \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{r=0}^{R-1} P(a_q, b_r) \log \frac{P(a_q, b_r)}{P(a_q) P(b_r)} \quad (1-59)$$

并且对 $I(B, A)$ 作类似处理时, 同样得到式 (1-59) 的结果, 因而, (1-54) 式成立。

信道容量 C 定义为输入符号集具有最佳概率分布时信道可能传输的最大平均信息量

$$(73-1) \quad C = \max_{\{P(a_q)\}} I(A, B) \quad (1-60)$$

信道在单位时间内传输的平均信息量 R_i , 称为信息量传输速率。有时, 定义最大信息传输速率为信道容量

$$(74-1) \quad C_i = R_{i, \max} = \frac{1}{T} \max_{\{P(a_q)\}} I(A, B) \quad (1-61)$$

疑义度 $H(A|B)$ 之所以存在, 是由于信道有噪声。如无噪声, 则 $H(A|B) = 0$ 。

此时

$$(75-1) \quad C = \max_{\{P(a_q)\}} H(A)$$

$$(76-1) \quad = \max_{\{P(a_q)\}} \left[\sum_{q=0}^{Q-1} P(a_q) \log \frac{1}{P(a_q)} \right] \quad (1-62)$$

(77-1) 已知当输入符号集的 Q 个符号等概率分布