GAOZHI YINGYONGXING RENCAI SHIYONG GUIHUA JIAOCHENG

高职应用型人才实用规划教程

GAODENG SHUXUE

高等数学

刘冬燕 编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

高职应用型人才实用规划教程

高等数学

刘冬燕 编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是高职高专高等数学课程的教学用书，系“高职应用型人才实用规划教程”系列之一.

全书共分 7 章：基础知识，极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用. 本书采用直观和生活化的语言介绍了一元函数微积分的基本内容，重点介绍了微积分的基本方法及其在经济管理和工程管理中的简单应用，几乎每一节的后面都附有数学知识与数学文化赏析，目的在于将数学文化融入高职微积分的教学，以提高学生的兴趣，加深学生的理解.

本书可作为高职院校高等数学课程的教材，同时也适合各类网络学院、函授大学、夜大学的专科使用，也可作为微积分爱好者的入门参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/刘冬燕编. --上海：同济大学出版社，2012.8

高职应用型人才实用规划教程

ISBN 978-7-5608-4929-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 166882 号

高职应用型人才实用规划教程

高等数学

刘冬燕 编

责任编辑 孙一风 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 常熟华顺印刷有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 11.75

印 数 1—3100

字 数 235000

版 次 2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-4929-4

定 价 26.00 元

序

党的十七大明确指出，我们要“优先发展教育，建设人力资源强国”. 2010年，教育部在《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010－2020年)》中指出，目前我国已建成了世界上最大规模的教育体系，保障了亿万人民群众受教育的权利，教育事业已从精英教育转变为大众化教育. 在此背景下，我国的高等职业教育作为高等教育中的一个类型，得到了空前的发展，国家和社会对高等职业教育的投入不断增大，高等职业教育的办学水平也得到了快速提高，为社会主义的现代化建设输送了大量高技能人才.

根据教育部《关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》(教高〔2000〕2号)及《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》(教高〔2006〕16号)等文件，我院组织、策划并编写了《高职应用型人才实用规划教程》系列教材，通过教材建设，增强学生的职业能力，提高高职教育质量，探索高职教育的发展之路. 此系列教材是各科优秀教师总结多年的教学实践经验、特别针对高职学生的实际特点编写而成. 本套教材的编写理念如下：

一、注重教材实用性和知识性的统一. 高职培养的是知识型、技能型、发展型的人才，教学中以“必需、够用”为原则，着重设置大量可供学生揣摩、操练的内容，以达到培养技能的目的. 但是，这并不意味高职的学生不需要任何理论知识.《上海市中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》的核心理念就是“为了每一个学生的终身发展”，在教材中加入必要的概念、定义和公式等理论知识将有利于高职高专学生的长期发展，帮助他们向更高的职业生涯目标冲击；

二、注重教材内容的时代性. 相对于快速变化的科技、经济与社会，教材难免有一定的滞后性，如果滞后过多，将极大地降低学生的学习兴趣. 本套教材在保持经典知识点稳定的前提下，在案例选取、练习设计等内容上有意识地选取较新的素材，力图与时代紧密结合，引起学生共鸣；

三、以专业学习和就业为导向. 由于高职教育强调专业技能、顶岗实习等，这就要求所学课程必须为学生以后的专业学习和工作服务. 我们在编写教材时，考虑到高职院校中一般专业设置情况和教学情况，对教材内容作了一定的挑选，以质量为核心、以就业为导向，通过优化教材深化教学改革，将公共基础课内容和专业内容与市场需要对接起来，培养学生的自我学习能力和社会适应能力.

本套教材的编写由于时间和经验的限制，疏漏在所难免，敬请各兄弟院校及有识之士指出，以便我们及时修订、完善.

陈成澍

上海济光职业技术学院

2010年12月

前言

当前，高职教育已经成为我国高等教育的一个重要类型，国家和社会对高职教育的投入不断加大，使高职教育得到了空前的发展. 但另一方面，由于各种原因，高职教育的生源，近年来有所下滑，这给高职教育带来了新的挑战，尤其是对于数学学科的教学. 为了适应新形势下高职高专教育的发展和教学改革的需要，上海济光职业技术学院基础部数学组在学院领导的关心和帮助下，结合多年的教学实践和教学改革的经验，编写了这本《高等数学》教材.

本教材的内容可以分为四部分：第一部分是基础知识介绍，针对学生数学基础相对薄弱的特点，就初等数学知识进行简单复习，为接下来的学习做好准备；第二部分是极限与连续，介绍极限与连续的有关概念和计算方法，为微积分的学习打好基础；第三部分是微分学，主要介绍导数与微分的概念和计算，以及导数的应用；第四部分是积分学，主要介绍积分的概念、计算以及相关的应用.

本书在编写的过程中注重了以下几个方面的问题：

1. 教学内容以必需、够用为度. 参照高职高专数学课程教学基本要求，对教学内容进行了适当的调整. 在保证知识连贯性的同时，删减了一些相对抽象的理论知识（如以往教材中的左右导数、隐函数求导等内容），同时，适当增加了有关初等函数知识点，为便于教材的连贯性，这些内容放在附录 B 中.

2. 结合学生的学科特点，强化应用. 导数的应用和定积分的应用这两章，相对比较详细地介绍了微积分在各个学科的应用，教师可结合学生的专业特点选择性地进行讲授. 例如，在学习导数的应用时，经管系的学生可学习边际分析和弹性分析，理工科的学生可学习曲率，而建筑设计的学生可学习曲线的凹凸性.

3. 注重数学思想和数学文化的融入. 几乎在每一节的最后都设有数学知识与数学文化赏析，介绍与该节内容相关的数学知识，旨在培养学生学习数学的兴趣，扩大学生的视野，更重要的是，可以使学生体会到微积分的基本思想，提高其思想水平和数学素养.

4. 注重寻找学生的认知起点，由浅入深、逐层深入地进行讲解. 在论述知识点时，注重以身边的简单例子入手，让学生感觉到高数就在身边，而并非高不可攀.

5. 注重讲练结合. 在每一节的后面设有练习题，题型较为简单，便于随堂练习.

6. 每节都设有简单的思考题，用于学生数学思维的训练.

7. 每章的习题按难度的不同，分为 A 组和 B 组. 习题 A 为基础题，习题 B 为提

高题，供弹性教学、适当取舍.

本教材在编写的过程中，参考了许多教材、书籍和文章，个别资料来自互联网，在此衷心感谢这些材料的编写者. 本教材在正式出版前，已在上海济光职业技术学院试用一年，在此期间，刘云龙教授、彭德应副教授、华宇明副教授、黄临文副教授、袁斯谏副教授都对书稿提出了大量宝贵的意见和建议，丁晓红副教授为本书的出版给予了大力支持，在此一并表示感谢.

由于学识水平及教学经验所限，本书必有许多不足之处，恳请专家和读者批评指正.

编　者

2012 年 5 月

目　　录

微积分的发展简史

微积分产生于17世纪，是由牛顿(Newton，1642—1727)和莱布尼兹(Leibnitz，1646—1716)在前人的基础上各自独立创立的.微积分是人类智慧最伟大的成就之一，是打开近代文明的钥匙，它的出现对自然科学的各个领域，如天文学、力学、几何学等都产生了空前巨大的影响，显示了数学的发展对人类文明进步的巨大推动作用.

微积分成为一门科学是在17世纪，但是，微分和积分的思想早在古代就产生了.公元前3世纪，古希腊的数学家、力学家阿基米德(公元前287—前212)的著作《圆的测量》和《论球与圆柱》中就已含有微积分的萌芽. 同时期，我国庄周所著《庄子》一书的"天下篇"中，著有"一尺之棰，日取其半，万世不竭"的极限思想. 公元3世纪，刘徽的"割圆术"也蕴含了微积分的思想.

公元15—17世纪欧洲文艺复兴后期，生产力的发展极大地推动了自然科学和技术的发展，人们开始研究运动着的物体和变化的量.在研究过程中一些问题长期未能得到解决，例如：如何求过曲线上一点的切线；如何求运动物体的瞬时速度；如何求曲线的长度和封闭曲线所围平面图形的面积等.在研究这些问题的过程中，一批杰出的数学家作出了奠基性的贡献，如开普勒(Kepler，1571—1630)、费马(Fermat，1601—1665)、笛卡尔(Decarts，1596—1650)、托里拆利(Torricelli，1608—1647)和巴罗(Barrow，1630—1677)，等等.

正是在这样的背景下，牛顿和莱布尼兹在17世纪下半叶正式创立了微积分.牛顿从力学出发，将连续运动的思想引入到微积分中，最终把微积分归结为两类问题：(1)已知连续运动的距离，求出在任意时间点的运动速度；(2)已知连续运动速度，求出任何时间段的距离.牛顿通过对这两类问题的研究，发现了微积分的计算公式，确立了微分和积分的互逆运算关系.牛顿还试图对微积分进行严格的论证，但是没有成功.莱布尼兹是受几何问题的启发，通过对微分三角形的研究，将求面积和求切线转变为一对互逆的问题，从而直接得到了微积分基本定理.莱布尼兹还创立了微分符号$\mathrm{d}x$和积分符号$\int$，这些符号一直沿用至今.

微积分创立后立刻显示出强大的威力，可以解决许多以前不能解决的难题，整个18世纪微积分光芒四射，它的光芒远远盖过了同时期产生的其他数学分支，例如概率论和图论.

但此时的微积分也不断暴露出问题和不足，最根本的问题就是牛顿和莱布尼兹

对微积分中无穷小量的概念模糊不清，无穷小量是否存在值得怀疑，这导致了数学史上的第二次数学危机. 直到 19 世纪，一些数学家才开始关注微积分的严格理论基础，代表人物有波尔查诺(Bolzano，1781—1848)，柯西(Cauchy，1789—1857)，维尔斯特拉斯(Weierstrass，1815—1897)，戴德金(Dedekind，1831—1916)，等等. 值得一提的是此书中我们所使用的极限概念是柯西给出的；严格的极限定义是由维尔斯特拉斯给出的；严密极限理论的建立也是第二次数学危机结束的标志.

微积分的思想和方法不断得到发展和延伸，以微积分为基础发展起来了许多数学分支，例如微分方程、实变函数、复变函数、微分几何、泛函分析，等等. 这些分支成为当今数学中的重要组成部分. 时至今日，微积分已经广泛地应用于天文、物理、建筑、工程、经济等各个领域.

尽管微积分在 17 世纪已经产生，但直到 19 世纪末，中国才出现第一本微积分方面的著作——《代微积拾级》，它是由晚清数学家李善兰和传教士伟烈亚力合译而成的. 在 100 年的时间里，我国的微积分得到了飞速发展，目前微积分已成为普通高校的必修课程，部分内容甚至进入了中学课堂. 作为 21 世纪的大学生，无论今后从事何种行业，掌握微积分的内容和思想将会受益终生！

1　基础知识

高等数学的主要内容是微积分，主要研究对象是函数. 本章主要介绍函数的基本概念和运算，为接下来微积分的学习提供必要的知识基础，该部分的大部分内容是对中学数学知识的回顾，当然也包括一些新的知识点，如邻域等. 高等数学与初等数学(中学所学内容)最本质的区别在于初等数学是静态的分析、解决问题，而高等数学是在运动和变化中解决问题. 希望大家在学习这一章的过程中，逐步将思维方式由静态转向动态. 本章内容比较简单，学起来也较为轻松.

学习目标

1. 了解区间、邻域的基本概念；
2. 理解函数的概念和基本性质，掌握函数定义域的求解；
3. 了解复合函数的基本概念，掌握基本初等函数的性质和复合函数的拆分；
4. 了解建立函数关系式的一般步骤，会对简单应用题建立函数表达式.

1.1　实数与区间

1.1.1　实数

实数包括有理数和无理数，有理数包括正负整数，正负分数和零. 全体实数构成的集合称为实数集，通常用 $\mathbf{R}$ 表示. 微积分是在实数范围内进行讨论. 今后常用的数集还包括自然数集(记为 $\mathbf{N}$)，整数集(记为 $\mathbf{Z}$)，有理数集(记为 $\mathbf{Q}$).

例如：$2\in\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$，$\dfrac{1}{3}\in\mathbf{Q}$，$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$，$\pi\in\mathbf{R}$.

实数集 $\mathbf{R}$ 中每一个实数在数轴上都有一个位置；反过来，数轴上每一个点都对应 $\mathbf{R}$ 中的一个实数，因此实数集中的数与数轴上的点一一对应.

1.1.2　绝对值

对于任意一个实数 x，它的绝对值 $|x|$ 定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

例如：$|3|=3$，$|0|=0$，$|-5|=5$.

绝对值$|x|$的几何意义：数轴上点 x 到原点的距离，如图 1-1 所示.

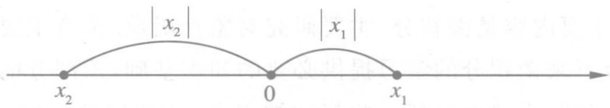

图 1-1

绝对值有如下性质：

1. $|x|=\sqrt{x^2}$；
2. $|-x|=|x|$；
3. $|x|\geqslant 0$，$|x|=0$ 当且仅当 $x=0$；
4. $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；
5. $|x|-|y|\leqslant |x+y|\leqslant |x|+|y|$；
6. $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$；
7. $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$；
8. $|x|\leqslant a\Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a(a\geqslant 0)$；

   $|x|\geqslant a\Leftrightarrow x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a(a\geqslant 0)$.

1.1.3 区间

区间是今后我们常用的数集，它分为有限区间和无限区间两种.

1. 有限区间

设 a,b 为实数，且 $a<b$.

(1) 数集$\{x|a<x<b\}$称为以 a,b 为端点的开区间，记为(a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

(2) 数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为以 a,b 为端点的闭区间，记为$[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

(3) 数集$\{x|a<x\leqslant b\}$称为以 a,b 为端点的半开半闭区间，记为$(a,b]$，即

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

(4) 数集$\{x|a\leqslant x<b\}$称为以 a,b 为端点的半闭半开区间,记为$[a,b)$,即

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}.$$

这四种区间在数轴上表示如图 1-2.

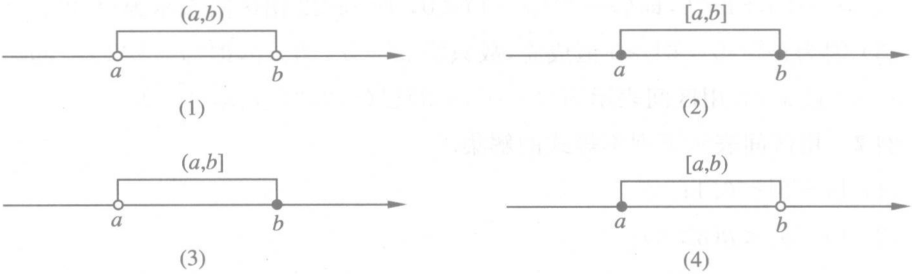

图 1-2

2. 无限区间

引入记号$+\infty$(读作正无穷大)及$-\infty$(读作负无穷大),无限区间包括以下几种:

(1) $(a,+\infty)=\{x|x>a\}$;

(2) $[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$;

(3) $(-\infty,b)=\{x|x<b\}$;

(4) $(-\infty,b)=\{x|x\leqslant b\}$;

(5) $(-\infty,+\infty)=R$.

前四种区间在数轴上的表示如图 1-3.

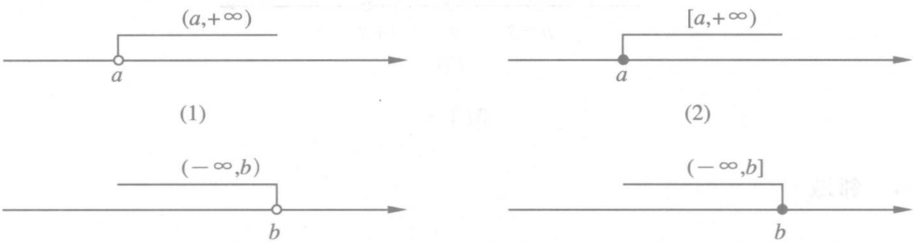

图 1-3

以后当不需要特别辨明区间是否包含端点,是否有限时,常简称为区间,并用字母 I 来表示.

例 1 用区间表示下列不等式的解集.

(1) $|x-2|\leqslant 1$;

(2) $x^2-3x+2<0$；

(3) $|x^2-x-6|>0$.

解 (1) $|x-2|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant x-2\leqslant 1$，$1\leqslant x\leqslant 3$ 用区间表示为 $[1,3]$.

(2) $x^2-3x+2<0$，即 $(x-2)(x-1)<0$，$1<x<2$ 用区间表示为 $(1,2)$.

(3) 因为 $|x^2-x-6|\geqslant 0$ 恒成立，故只需 $x^2-x-6\neq 0$，即 $(x+2)(x-3)\neq 0$ 得到 $x\neq -2$ 且 $x\neq 3$ 用区间表示为)$(-\infty,-2)\cup(-2,3)\cup(3,+\infty)$.

例 2 用区间表示下列不等式的解集.

(1) $|x-3|<0.1$；

(2) $|x-a|<\delta(\delta>0)$；

(3) $0<|x-a|<\delta(\delta>0)$.

解 (1) $|x-3|<0.1$，即 $-0.1<x-3<0.1$，故 $2.9<x<3.1$，

用区间表示为 $(2.9,3.1)$.

(2) $|x-a|<\delta$ 即 $-\delta<x-a<\delta$，$a-\delta<x<a+\delta$，用区间表示为 $(a-\delta,a+\delta)$.

(3) $0<|x-a|<\delta$，此不等式为 $|x-a|<\delta$ 且 $|x-a|>0$，其解为

$\{x|a-\delta<x<a+\delta$ 且 $x\neq a\}$，用区间表示为 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

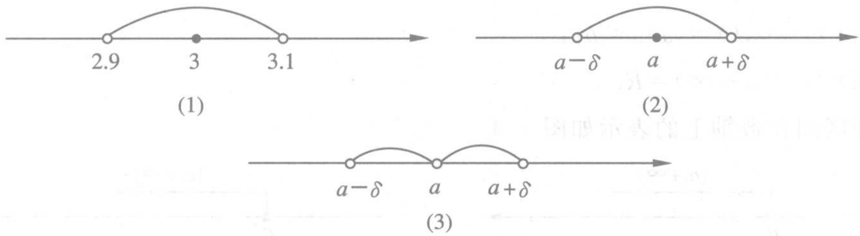

图 1-4

1.1.4 邻域

图 1-4(2)表示了数轴上到 a 点的距离小于 δ 的点的集合，称这样的集合为点 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\,|\,|x-a|<\delta\},$$

其中点 a 称为邻域 $U(a,\delta)$ 的中心，δ 称为 $U(a,\delta)$ 的半径.

例如：图 1-4(1)表示以 3 为中心，0.1 为半径的邻域 $U(3,0.1)$.