北京邮电大学高等数学双语教学组◎编

Gaodeng Shuxue
Xuexi Zhidao yu Xiti Jiexi

高等数学
学习指导与习题解析

（下）

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

. 014035871

013
573
V2

高等数学学习指导与习题解析(下)

北京邮电大学高等数学双语教学组　编

北京航空航天大学
藏书
图书馆

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

013/573
V2

北航　C1723213

前　　言

为了满足高等院校工科类双语数学基础课的教学需要，我们编写了全英文的高等数学教材及其中译本。与一般高等院校使用的中文高等数学和微积分教材相比较，双语高等数学教材在内容编排与讲解上适当吸收了欧美国家微积分教材的一些优点，更注重与后续课程学习和实际应用的衔接。由于双语教学模式下要学好本课程就需要花费更多的精力，为了帮助读者解决学习本课程的困难，给读者一些启示和提供一些方法，我们编写了这本书供读者参考。

本书是由我们在双语教学第一线的教师经过集体讨论、反复推敲、分别执笔编写出来的，与已出版的双语高等数学教材相匹配。本书包括《高等数学学习指导与习题解析（上）》及《高等数学学习指导与习题解析（下）》共两分册。本书也可以作为一般高等院校学生和教师学习高等数学和微积分课程的教学参考书，或有志于学习高等数学的读者的一本自学辅导书。

本书的内容选取和编排顺序与双语高等数学教材一致，以章节为序，按节编排知识要点和习题解答。由于双语教学的特殊模式，教材在编排时作者从淡化运算技巧出发有意删除了一些计算方法和技巧，因而使读者在解题时产生一定的困难，本书在习题解答中弥补了这一不足，使读者通过学习，在计算方法和技巧上有所提高。本书按节编排知识要点，按章提出了学习的基本要求，可以使读者通过自学把知识要点串联在一起，有的放矢地学习，避免遗漏。本书还结合高等数学的教学大纲和重要的知识点，在每章都给出了极具针对性的总习题，以便读者自我测试和掌握学习情况。

本书分为上、下两册出版，全书由袁健华和艾文宝主编。下册的第七章至第十一章的知识要点和习题解析分别由袁健华、朱萍、李晓花、石霞和艾文宝撰写，李晓花还撰写了第十二章，最后由袁健华和艾文宝审定了下册。在本书的编写中还参阅了国内其他作者编写的高等数学习题指导书，在此向这些作者表示感谢。在本书的编写过程中得到北京邮电大学、北京邮电大学理学院和国际学院教改项目的支持，作者在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，书中如有错漏之处，欢迎读者通过邮箱(jianhuayuan@bupt. edu. cn)指出，以便我们及时纠正。

编　者

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第七章　微分方程

本章介绍了微分方程及其解、阶、通解、初始条件和特解等概念，以及几类简单的常微分方程的解法. 读者通过学习要掌握可分离变量的微分方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程的解法，要掌握用降阶法解一些高阶微分方程，掌握二阶常系数齐次微分方程的解法，并会解某些高于二阶的常系数齐次微分方程.

第一节　微分方程的基本概念

一、知识要点

含有未知函数及其导数的方程称为**微分方程**. 微分方程中含有的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶. 一般地，n 阶微分方程的形式为

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0.$$

满足 n 阶微分方程 $y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 的函数 y 称为微分方程的解，它的解中一般含有 n 个独立的任意常数. 称含有 n 个独立常数的解为方程组的通解；不含任意常数的解为特解.

设 n 阶微分方程 $y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 满足初始条件 $y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_1,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$. 求满足微分方程以及初始条件的特解称之为**微分方程的初始值问题**. 如果微分方程的通解可用初等函数表示或可用初等函数的积分表示，称该微分方程可用初等解法求解.

二、习题解答

1. 指出下列微分方程的阶：

(1) $y'-2y=x+2$；　　(2) $x^2y''-3xy'+y=x^4e^x$；

(3) $(1+x^2)(y')^3-2xy=0$；　　(4) $xy'''-\cos^2(y')+y=\tan x$；

(5) $x\ln x\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0$;　　　　(6) $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{C}=0$.

解:

(1) 该方程为 1 阶的.

(2) 该方程为 2 阶的.

(3) 该方程为 1 阶的.

(4) 该方程为 3 阶的.

(5) 该方程为 1 阶的.

(6) 该方程为 2 阶的.

2. 请指出各题中的函数 y 是否为所给微分方程的解,并说明原因.

(1) $xy'=2y, y=5x^2$;

(2) $y''+y=0, y=\sin x-4\cos x$;

(3) $y''-2y'+y=0, y=x^2\mathrm{e}^x$;

(4) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2(y')^2-2y'=0, y=\ln x$.

解:(1) 函数 $y=5x^2$ 是微分方程 $xy'=2y$ 的一个解.

由于 $y'=10x$,将 $y=5x^2$ 和 $y'=10x$ 代入微分方程左边可知函数 $y=5x^2$ 满足 $xy'=2y$,所以函数 $y=5x^2$ 是微分方程 $xy'=2y$ 的解.

(2) 函数 $y=3\sin x-4\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的一个解.

由 $y=3\sin x-4\cos x$ 可得 $y'=3\cos x+4\sin x, y''=-3\sin x+4\cos x$,所以 $y''+y=0$ 成立,函数 $y=3\sin x-4\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的解.

(3) 函数 $y=x^2\mathrm{e}^x$ 不是微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的一个解.

由 $y=x^2\mathrm{e}^x$ 可得 $y'=x^2\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(x^2+2x)$以及 $y''=[\mathrm{e}^x(x^2+2x)]'=\mathrm{e}^x(x^2+4x+2)$,所以 $y''-2y'+y=y''=\mathrm{e}^x(x^2+4x+2)-2\mathrm{e}^x(x^2+2x)+x^2\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x\neq0$. 故而函数 $y=x^2\mathrm{e}^x$ 不是微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的一个解.

(4) 函数 $y=\ln x$ 不是微分方程 $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2(y')^2-2y'=0$ 的解.

由 $y=\ln x$ 可得 $y'=\dfrac{1}{x}$以及 $y''=-\dfrac{1}{x^2}$,所以

$$
\begin{aligned}
&y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2(y')^2+yy'-2y'\\
&=-\frac{1}{x^2}-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{x}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{x^2}+\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x}\\
&=\frac{-1-(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2+x\ln x-2x}{x^2}\neq0.
\end{aligned}
$$

故而函数 $y=\ln x$ 不是微分方程 $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2(y')^2-2y'=0$ 的解.

3. 求下列曲线的方程:

(1) 曲线上任意点 $P(x,y)$处的切线都是 x^2.

(2) 曲线上任意点 $P(x,y)$ 处到原点的距离等于点 P 和点 Q 之间的距离，其中 Q 点是曲线上过点 P 的切线与 x 轴的交点.

解：(1) 由题意可知曲线上任意点 $P(x,y)$ 处 $y'=x^2$，由导数公式可知该曲线的方程为

$$y'=x^2$$

或

$$y=\frac{x^3}{3}+C(C\text{为任意常数}).$$

(2) 设该曲线的方程为 $y=y(x)$. Q 点是曲线上过点 P 的切线与 x 轴的交点. 可得 Q 点坐标为 $(x-\frac{y}{y},0)$，则有

$$|PQ|=\sqrt{y^2+\left(\frac{y}{y'}\right)^2}$$

以及

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

由题意可知，曲线 $y=y(x)$ 满足

$$x^2+y^2=y^2+\left(\frac{y}{y'}\right)^2,$$

即 $x^2(y')^2=y^2$，可得曲线的方程为 $y=Cx$ 或 $y=\frac{C}{x}$，其中，C 为任意常数.

第二节　一阶微分方程

一、知识要点

1. 一阶可分离变量微分方程

一阶可分离变量微分方程的形式为

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y).$$

求解方法如下：先分离变量 $\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx$，然后两边取不定积分，即得通解

$$\int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx.$$

2. 一阶齐次微分方程

一阶齐次微分方程的形式可表示为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F\left(\frac{y}{x}\right).$$

求解方法如下:先作变量替换,令 $y=ux$,将原方程化为可分离变量的微分方程

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=F(u).$$

求解得到 $u=G(x)$后将 $u=\frac{y}{x}$回代即得到原方程的解.

3. 一阶线性微分方程

一阶线性齐次微分方程形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0,\quad p(x)\in C(I).$$

其通解为 $y=C\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$.

一阶线性非齐次微分方程形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x),\quad p(x),q(x)\in C(I).$$

其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[C+\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right].$$

4. 贝努利微分方程

贝努利微分方程的形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^{\alpha}(\alpha\neq0,\alpha\neq1),\quad p(x),q(x)\in C(I).$$

求解方法如下:先将原方程两边同时乘以 $y^{-\alpha}$得

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}(y^{1-\alpha})}{\mathrm{d}x}+p(x)y^{1-\alpha}=q(x),$$

再令 $z=y^{1-\alpha}$并在方程两边同时乘以 $1-\alpha$,原方程即化为一阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-\alpha)p(x)z=q(x).$$

求得上一阶线性微分方程的解 $z=z(x)$后变量回代即得原方程的解.

5*. 全微分方程

全微分方程的形式为

$$X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y=0,$$

其中,$X(x,y)$,$Y(x,y)$满足$\frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$,$(x,y)\in D$.

其通解为 $u(x,y)=C$,二元函数 $u(x,y)$满足 $\mathrm{d}u(x,y)=X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y$,即

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}X(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Y(x_0,y)\mathrm{d}y,\quad (x,y),(x_0,y_0)\in D.$$

二、习题解答

1. 用分离变量法求下列微分方程的通解或特解:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{y}$; (2) $\mathrm{d}y+y\tan x\mathrm{d}x=0$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$; (4) $\dfrac{x}{1+y}\mathrm{d}x-\dfrac{y}{1+x}\mathrm{d}y=0, y|_{x=0}=1$;

(5) $(xy^2+x)\mathrm{d}x+(y-x^2y)\mathrm{d}y=0$; (6) $y'\sin x=y\ln y$;

(7) $(1+x^2)\mathrm{d}y+\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x=0$; (8) $\arctan y\mathrm{d}y+(1+y^2)x\mathrm{d}x=0$.

解:

(1) 将微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{y}$分离变量得

$$y\mathrm{d}y=x\mathrm{d}x.$$

两边同时积分有$\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x^2+C_1$,即通解为 $y^2=x^2+C$,其中,C 是任意常数.

(2) 将微分方程 $\mathrm{d}y+y\tan x\mathrm{d}x=0$ 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x).$$

两边同时积分,易得 $\ln|y|=\ln|\cos x|+\ln C$,即通解为 $y=C\cos x$,其中,C 是任意常数.

(3) 将微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

两边同时积分可得通解为 $\arcsin y=\arcsin x+C$,其中,C 是任意常数.

(4) 将微分方程$\dfrac{x}{1+y}\mathrm{d}x-\dfrac{y}{1+x}\mathrm{d}y=0$ 分离变量得

$$y(1+y)\mathrm{d}y=x(1+x)\mathrm{d}x.$$

两边同时积分,可得通解为

$$\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C,$$

即

$$\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+C=0.$$

由给定初始条件$y|_{x=0}=1$可得$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+C=0$,即$C=\frac{5}{6}$.

所以原微分方程初始问题的特解为$\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+\frac{5}{6}=0$.

(5) 将微分方程$(xy^2+x)\mathrm{d}x+(y-x^2y)\mathrm{d}y=0$分离变量得

$$-\frac{x}{(1-x^2)}\mathrm{d}x=\frac{y}{(1+y^2)}\mathrm{d}y.$$

两边同时积分,可得通解为$\ln(1-x^2)+\ln C=\ln(1+y^2)$,即$y^2=C(1-x^2)-1$,其中,$C$是任意常数.

(6) 将微分方程$y'\sin x=y\ln y$分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x.$$

两边同时积分,可得通解为$\ln|\ln y|=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\ln C_1$,整理可得该微分方程的通解为$\ln y=C\tan\frac{x}{2}$.

(7) 将微分方程$(1+x^2)\mathrm{d}y-\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x=0$分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

两边同时积分,可得通解为$\arcsin y=\arctan x+C$,其中,C是任意常数.

(8) 将微分方程$\arctan y\mathrm{d}y+(1+y^2)x\mathrm{d}x=0$分离变量得

$$\frac{\arctan y\mathrm{d}y}{1+y^2}=-x\mathrm{d}x.$$

两边同时积分,有$\int\arctan y\mathrm{d}(\arctan y)=\int-x\mathrm{d}x$成立,故微分方程的通解为$(\arctan y)^2=-x^2+C$,其中,$C$是任意常数.

2. 求下列一阶线性微分方程的通解:

(1) $xy'+y=\mathrm{e}^x$;　　(2) $xy'-y=x^2\mathrm{e}^x$;

(3) $\cos^2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\tan x$;　　(4) $\tan t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-x=5$;

(5) $x\ln x\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0$;　　(6) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$;

(7) $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+s\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$;　　(8) $xy'\ y=\frac{x}{\ln x}$.

解:

(1) 该一阶线性非齐次微分方程对应的齐次微分方程为$xy'+y=0$.易求齐次微分方程的通解为$y=\frac{C}{x}$.下面用常数变易法求解非齐次微分方程.设非齐次微分方程的解为$y=$

$\dfrac{h(x)}{x}$,代入方程 $xy'+y=\mathrm{e}^x$ 可得

$$\frac{h'(x)x-h(x)}{x}+\frac{h(x)}{x}=\mathrm{e}^x,$$

即 $h'(x)=\mathrm{e}^x$. 可得

$$h(x)=\mathrm{e}^x+C.$$

故微分方程 $xy'+y=\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+C}{x}$,其中,$C$ 是任意常数.

注： 该题也可直接用公式法求解.

将微分方程 $xy'+y=\mathrm{e}^x$ 写为 $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}(x\neq0)$,易知 $p(x)=\dfrac{1}{x}$,$q(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$. 微分方程 $xy'+y=\mathrm{e}^x$ 的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[C+\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[C+\int\frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left(C_1+\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right)=\frac{\mathrm{e}^x+C}{x}(\text{其中},C\text{ 是任意常数}).$$

(2) 该一阶线性非齐次微分方程对应的齐次微分方程为 $xy'-y=0$,易求齐次微分方程的通解为 $y=Cx$. 下面用常数变易法求解非齐次微分方程. 设非齐次微分方程的解为 $y=h(x)x$,则有

$$h'(x)x^2+xh(x)-h(x)x=x^2\mathrm{e}^x,$$

即

$$x^2h'(x)=x^2\mathrm{e}^x.$$

可解得 $h(x)=\mathrm{e}^x+C$. 故微分方程 $xy'-y=x^2\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y=x\mathrm{e}^x+Cx$,其中,C 是任意常数.

注： 该题也可直接用公式法求解.

将微分方程 $xy'-y=x^2\mathrm{e}^x$ 写为 $y'-\dfrac{y}{x}=x\mathrm{e}^x(x\neq0)$. 易知 $p(x)=-\dfrac{1}{x}$,$q(x)=x\mathrm{e}^x$,代入公式可得微分方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C+\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(C+\int x\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=x\left(C+\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right)=x(\mathrm{e}^x+C)\ (\text{其中 }C\text{ 是任意常数}).$$

(3) 该一阶线性非齐次微分方程对应的齐次微分方程为 $\cos^2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$,易求齐次微分方程的通解为 $y=C\mathrm{e}^{-\tan x}$. 下面用常数变易法求解非齐次微分方程. 设非齐次微分方程的解为 $y=h(x)\mathrm{e}^{-\tan x}$,代入方程可得

$$\cos^2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=-h(x)\mathrm{e}^{-\tan x}+h(x)\mathrm{e}^{-\tan x}+\cos^2xh'(x)\mathrm{e}^{-\tan x}=\tan x.$$

即 $h'(x)=\dfrac{\tan x}{\cos^2x}\mathrm{e}^{\tan x}$ 故 $h(x)=\tan x\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\tan x}+C$,原非齐次微分方程的通解为 $y=\tan x-$

$1+Ce^{-\tan x}$,其中,C 是任意常数.

(4) 该一阶线性非齐次微分方程对应的齐次微分方程为$\frac{dx}{dt}-\frac{x}{\tan t}=0$,用分离变量法可求得其通解为 $x=C\sin t$.下面用常数变易法求解非齐次微分方程.设非齐次微分方程的解为 $x=h(t)\sin t$,代入非齐次微分方程可得

$$h'(t)\sin t=\frac{5}{\tan t},$$

即 $h(t)=-\frac{5}{\sin t}+C$,故原微分方程的通解为 $x=C\sin t-5$,其中,C 是任意常数.

(5) 该一阶线性非齐次微分方程对应的齐次微分方程为 $x\ln x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0$,用分离变量法可求得其通解为 $y=\frac{C}{\ln x}$.下面用常数变易法求解非齐次微分方程.设非齐次微分方程的解为 $y=\frac{h(x)}{\ln(x)}$,代入非齐次微分方程可得

$$xh'(x)=\ln x$$

即 $h(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$,故原微分方程的通解为 $y=\frac{1}{2}\ln x+\frac{C}{\ln x}$,其中,$C$ 是任意常数.

(6) 该一阶线性非齐次微分方程对应的齐次微分方程为 $y'-\frac{2xy}{1+x^2}=0$,用分离变量法可求得其通解为 $y=C(1+x^2)$.下面用常数变易法求解非齐次微分方程.设非齐次微分方程的解为 $y=h(x)(1+x^2)$,代入非齐次微分方程可得

$$h'(x)(1+x^2)=1+x^2,$$

即 $h(x)=x+C$.故原微分方程的通解为 $y=(x+C)(1+x^2)$,其中,C 是任意常数.

(7) 该一阶线性非齐次微分方程对应的齐次微分方程为$\frac{ds}{dt}+s\cos t=0$,用分离变量法可求得其通解为 $s=Ce^{-\sin t}$.下面用常数变易法求解非齐次微分方程.设非齐次微分方程的解为 $s=h(t)e^{-\sin t}$,代入非齐次微分方程可得

$$h'(t)e^{-\sin t}=\sin t\cos t,$$

即 $h(t)=\sin te^{\sin t}-e^{\sin t}+C$.故原微分方程的通解为 $s=\sin t-1+Ce^{-\sin t}$,其中,C 是任意常数.

(8) 该一阶线性非齐次微分方程对应的齐次微分方程为 $y'-\frac{y}{x}=0$,用分离变量法可求得其通解为 $y=Cx$.下面用常数变易法求解非齐次微分方程.设非齐次微分方程的解为 $y=h(x)x$,代入非齐次微分方程可得

$$h'(x)x=\frac{1}{\ln x},$$

即 $h(x)=\ln|\ln x|+C$.故原微分方程的通解为 $y=x\ln|\ln x|+Cx$,其中,C 是任意常数.

3. 求下列方程的解:

(1) $(2x^2-y^2)+3xy\frac{dy}{dx}=0$;　　(2) $xy'=y\ln\frac{y}{x}$;

(3) $(x^3+y^3)\mathrm{d}x-3xy^2\mathrm{d}y=0$；　　(4) $3y^2y'-y^3=x+1$；

(5) $y'-x^2y^2=y$；　　(6) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x},y|_{x=-1}=2$；

(7) $y'+2xy=2x^3y^3$；　　(8) $(x+y)^2y'=a^2$（a 是常数）；

(9) $y'=\dfrac{1}{e^y+x}$；　　(10) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+y)^2$；

(11) $(\cos y-2x)'=1$；　　(12) $y'=\sin^2(x-y+1)$；

(13) $x^2y'+xy=y^2,y|_{x=1}=1$；　　(14) $yy'-y^2=x^2$；

(15) $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=y^2e^y\mathrm{d}y$；　　(16) $(1+e^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x+e^{\frac{x}{y}}(1-\dfrac{x}{y})\mathrm{d}y=0$.

解：(1) 由 $(2x^2-y^2)+3xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2-2x^2}{3xy}=\frac{1}{3}\frac{y}{x}-\frac{2}{3}\frac{x}{y}.$$

该方程为一阶齐次微分方程. 令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{3}u-\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{u}$，即 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{2}{3}(u+\dfrac{1}{u})$.

分离变量就得到 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u+\dfrac{1}{u}}=-\dfrac{2}{3}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，从而 $\dfrac{1}{2}\ln(1+u^2)=-\dfrac{2}{3}\ln x+C$. 所以原方程的解为

$$\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]=-\frac{2}{3}\ln x+C,$$

其中，C 是任意常数.

(2) 由 $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x},$$

该方程为一阶齐次微分方程. 令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\ln u$. 分离变量可得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u\ln u-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，从而 $\ln(\ln u-1)=\ln x+\ln C$. 所以原方程的解为

$$\ln\left(\frac{y}{x}-1\right)=Cx,$$

其中，C 是任意常数.

(3) 由 $(x^3+y^3)\mathrm{d}x-3xy^2\mathrm{d}y=0$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^3+y^3}{3xy^2}=\frac{1}{3}\frac{y}{x}+\frac{1}{3}\frac{y}{x},$$

该方程为一阶齐次微分方程. 令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{3}u+\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{u}$，分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{2u-\frac{1}{u}}=-\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

从而$\frac{1}{4}\ln(2u^2-1)=-\frac{1}{3}\ln x+C$. 所以原方程的解为

$$2\left(\frac{y}{x}\right)^2-1=Cx^{-\frac{4}{3}},$$

其中,C是任意常数.

(4) 由 $3y^2y'-y^3=x+1$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{3}=\frac{x+1}{3}y^{-2},$$

该方程为贝努利微分方程. 令 $u=y^3$,则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u=x+1$,对于该一阶线性非齐次微分方程,用求解公式可得 $u=Ce^x+e^x\left[\int(x+1)e^{-x}\mathrm{d}x\right]=Ce^x-x-2$,所以原方程的解为 $y^3=Ce^x-x-2$,其中,C是任意常数.

(5) 由 $y'-x^2y^2=y$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=x^2y^2,$$

该方程为贝努利微分方程. 令 $u=y^{-1}$,则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=x^2$,对于该一阶线性非齐次微分方程,用求解公式可得 $u=Ce^{-x}+e^{-x}\left[\int-x^2e^x\mathrm{d}x\right]=Ce^{-x}-x^2+2x-2$,所以原方程的解为 $(Ce^{-x}-x^2+2x-2)y=1$ 或 $y=0$,其中,C是任意常数.

(6) 由 $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$可知该方程为一阶齐次微分方程,令 $u=\frac{y}{x}$,则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x+u=u+\frac{1}{u},$$

从而$\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$,又由 $y|_{x=-1}=2$ 可得 $C=2$,所以原方程的解为$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2=\ln|x|+C$,其中,$C$是任意常数.

(7) 由 $y'+2xy=2x^3y^3$ 可知该方程为贝努利微分方程,令 $u=y^{-2}$,则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-4xu=-4x^3.$$

对于这一一阶线性非齐次微分方程用公式可得 $u=Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}$,所以原方程的解为 $\frac{1}{y^2}=Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}$.

(8) 令 $u=x+y$,则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$,由$(x+y)^2y'=a^2$ 可得

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com