考研数学命题人土豪金系列丛书

2015

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精炼

考研数学命题人历年真题精析

（数学一）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编写组 主编

赠

1 本书每章习题答案与详解 + 2 篇北大、清华数学满分秘笈 + 2 套原命题组成员密押试卷 + 5 大考研命题人快速解题方法 + 8 小时命题人数学串讲精华

正版书凭激活码登录 www.buaapress.com.cn，获超多增值服务

卡号：2014006500122
密码：

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

考研数学[illegible]系列丛书

2015

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精炼

考研数学命题人历年真题精析

（数学一）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编写组 主编

赠

1 本书每章习题答案与详解

2 篇北大、清华数学满分秘笈

2 套原命题组成员密押试卷

5 大考研命题人快速解题方法

8 小时命题人数学串讲精华

[illegible]版书凭激活码登录 www.buaapress.com.cn，获超多增值服务

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是作者在10多年收集、整理考研数学资料和进行考研数学辅导的基础上，通过对历年试题的精心研究和分析，并结合授课体会和学生的需要全新编写而成。

本书收录了1998—2014年考研数学一真题，并进行了详细的解析；精辟阐明解题思路，全面剖析考点、重点、疑点和难点。在每章后面还提供了1987—1997年的相关典型真题作为习题，以便考生进一步巩固相关知识。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的原命题组组长、命题研究专家，以及一线教师共同编写而成，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，进一步把握考试的特点及命题的思路，从容应考，轻取高分。

本书适用于参加研究生入学数学考试的广大考生。

图书在版编目(CIP)数据

2015考研数学命题人历年真题解析. 数学一 / 全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会主编. -- 北京：北京航空航天大学出版社，2014.4

ISBN 978-7-5124-1457-0

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第002378号

2015考研数学命题人历年真题精析(数学一)
全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会　主编

责任编辑　刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行
北京市海淀区学院路37号(邮编100191)　http://www.buaapress.com.cn
发行部电话：(010)82317024　传真：(010)82328026
读者信箱：bhpress@263.net　邮购电话：(010)82316524
三河市汇鑫印务有限公司印装　各地书店经销

*

开本：710×1000　1/16　印张：26.75　字数：575千字
2014年4月第1版　2014年4月第1次印刷
ISBN 978-7-5124-1457-0　定价：43.80元

编 委 会

前　言

自1987年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来，已有28载。这些历年考研试题是考生了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料，也是命题组专家的智慧结晶。而拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的历年数学真题，则是广大准备考研同学的期盼。

本书严格按照最新的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求和精神编写，对历年考研真题逐题给出了详细解答，并尽量做到一题多解。只要认真分析研究，了解、消化和掌握历年试题，便能发现数学试题总是有稳定的、普遍的、反复出现的共性，也可从中发现命题的特点和趋势，找出知识之间的有机联系，总结每部分内容的考查重点、难点，归纳常考题型，凝练解题思路、方法和技巧，明确复习方向，从而真正做到有的放矢，事半功倍。

本书包括两部分内容：

一部分是1998—2014年的完整真题。旨在让考生对历年考研真题有一个完整的印象，从总体上了解考研数学命题的基本形式和命题规律。

编者从历年真题和辅导班内部资料中，精选出重点考查且不易解决的题目。这些题目大多是研究生考试中的解答题，分值较高。编者分考点归纳习题，总结各类题型的解题思路和方法，并重点指出考生易错之处。

另一部分是试题精析。我们分章节、考点对题目归类。本部分不仅给出了详解，还在逐题解析历年考研数学试题的基础上，给每题作了评注。不仅分析了每题考查的知识点和难点，还对试题类型、各类型试题的解法进行了归纳和总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过例举具体题目，分析考生常犯的错误，让考生引以为戒；各考点前都配有知识点和复习方法的归纳总结。

本书的特点：

1. 内容全面　汇集了1998年以来所有真题，以便考生对历年真题有大致的了解，并可研究真题。

2. 题型丰富　本书按考点对历年真题分类，对每种题型都进行了归纳和总结，方便考生复习。

3. 解析详尽　首先给出本题相应考点，再分析解题思路，给出详解，并尽量给出多

种解法以供参考和比较。题目最后还附有评注，点出本题应注意之处。

基础复习阶段，考生可以利用试题精析部分，体会各知识点及题型的命题形式和特点。模拟演练阶段，考生应在考试规定的时间内，完成真题部分，锻炼和提高解题速度以及准确率。如此复习，既能加深和巩固知识点，又能提高自己的解题能力。

“宝剑锋从磨砺出，梅花香自苦寒来。”成功源于努力拼搏，源于自信。

我们深信，考生仔细研读本书后，必能上一个新台阶。最后祝愿各位考生都能圆名校之梦！

编者　于清华园

第一篇

2014年考研数学一试题及答案与解析

目　录

第一篇　2014 年考研数学一试题及答案与解析

第二篇　1998—2013 年考研数学一试题

第三篇　1998—2013年考研数学一试题分类解析

2014 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)下列曲线有渐近线的是(　　).

(A)$y=x+\sin x$　　(B)$y=x^2+\sin x$

(C)$y=x+\sin\frac{1}{x}$　　(D)$y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

(2)设函数$f(x)$具有二阶导数,$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在区间$[0,1]$上(　　).

(A)当$f'(x)\geqslant 0$时,$f(x)\geqslant g(x)$　　(B)当$f'(x)\geqslant 0$时,$f(x)\leqslant g(x)$

(C)当$f''(x)\geqslant 0$时,$f(x)\geqslant g(x)$　　(D)当$f''(x)\geqslant 0$时,$f(x)\leqslant g(x)$

(3)设$f(x)$是连续函数,则$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x=$(　　).

(A)$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x-1} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

(B)$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)\,\mathrm{d}y$

(C)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$

(D)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$

(4)若$\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2\mathrm{d}x=\min\limits_{a,b\in\mathbf{R}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x\right\}$,则$a_1\cos x+b_1\sin x=$(　　).

(A)$2\sin x$　　(B)$2\cos x$　　(C)$2\pi\sin x$　　(D)$2\pi\cos x$

(5)行列式$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=$(　　)

(A)$(ad-bc)^2$　　(B)$-(ad-bc)^2$　　(C)$a^2d^2-b^2c^2$　　(D)$b^2c^2-a^2d^2$

(6)设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是3维向量,则对任意常数$k,l$,向量$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关是向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关的(　　).

(A)必要非充分条件　　(B)充分非必要条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分又非必要条件

(7)设随机事件A与B相互独立,且$P(B)=0.5$,$P(A-B)=0.3$,则$P(B-A)=$(　　).

(A)0.1　　(B)0.2　　(C)0.3　　(D)0.4

(8)设连续性随机变量 X_1 与 X_2 相互独立,且方差均存在,X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$,随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$,随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$,则(　　).

(A)$E(Y_1)>E(Y_2),D(Y_1)>D(Y_2)$　　(B)$E(Y_1)=E(Y_2),D(Y_1)=D(Y_2)$

(C)$E(Y_1)=E(Y_2),D(Y_1)<D(Y_2)$　　(D)$E(Y_1)=E(Y_2),D(Y_1)>D(Y_2)$

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点$(1,0,1)$处的切平面方程为______.

(10)设$f(x)$是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$,则$f(7)=$______.

(11)微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 $y=$______.

(12)设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,则曲面积分 $\int_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$______.

(13)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1,则 a 的取值范围是______.

(14)设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{3\theta^2},\theta<x<2\theta,\\0,\quad 其他,\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数,X_1,$X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单样本,若 $c\sum\limits_{i=1}^{n}x^2$ 是 θ 的无偏估计,则 $c=$______.

三、解答题:15~23 小题,共 94 分,请将解答写在答题纸指定位置上,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定,求$f(x)$的极值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数$f(u)$具有 2 阶连续导数,$z=f(e^x\cos y)$满足$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(z+e^x\cos y)e^{2x}$. 若$f(0)=0,f'(0)=0$,求$f(u)$的表达式.

(18)(本题满分 10 分)设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant1)$ 的上侧,计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(19)(本题满分 10 分)设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2}$,$\cos a_n-a_n=$

$\cos b_n$，且级数 $\sum\limits_{x=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

（Ⅰ）证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

（Ⅱ）证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

(20)（本题满分 11 分）设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

（Ⅰ）求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系；（Ⅱ）求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(21)（本题满分 11 分）证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)\ (i=1,2)$.

（Ⅰ）求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$；

（Ⅱ）求 $E(Y)$.

(23)（本题满分 11 分）

设总体 X 的分布函数为 $F(x,\theta)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（Ⅰ）求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$；

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$；

（Ⅲ）是否存在实数 a，使得对任何 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geqslant \varepsilon\}=0$？

2014 年全国硕士研究生入学统一考试 数学一试题解析

一、选择题

1.【答案】（C）.

【考点提示】 曲线的斜渐近线

【解析】 曲线的斜渐近线为 $y=ax+b$，其中 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$. 垂直和水平渐近线分别为 $x=c$ 和 $y=d$，其中 $c=\lim\limits_{y\to\infty}f(x)$，$d=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. 四个选项中，

（A）$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在，c 和 d 也不存在；

（B）和（D）$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$不存在，$c$ 和 d 也不存在；

（C）$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$，$c$ 和 d 也不存在.

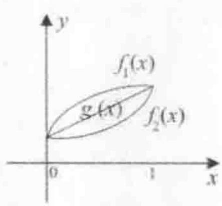
综上，只有选项 C 有斜渐近且为 $y=x$.

2.【答案】 （D）.

【考点提示】 导数几何意义的应用

【解析】 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 分别对应函数 $f(x)$ 所表示曲线的斜率和凸凹性；

$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x=[f(1)-f(0)]x+f(0)$，表示 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间内两个端点的连线. 据此考虑作如下图：



根据曲线形状可知，$f_1'(x)\geqslant 0$，$f_2'(x)\geqslant 0$，$f_1''(x)\leqslant 0$，$f_2''(x)\geqslant 0$，$f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$. 由此可判断，当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$，正确答案为 D.

3.【答案】

【考点提示】 交换积分次序，积分坐标转换

【解析】 题设积分区域为 $-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 1-y$，$0\leqslant y\leqslant 1$，如图所示.

换成极坐标为

$$D_1:0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta};D_2:\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant 1.$$

故正确答案为(D).

4.【答案】 (A).

【考点提示】 二元函数的极值和最值

【解析】 令$f(a,b)=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x$,令

$$f_a'=-2\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)\cos x\mathrm{d}x=2a\pi=0,\text{解得 }a=0;$$

$$f_b'=-2\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)\sin x\mathrm{d}x=2b\pi-4\pi=0,\text{解得 }b=2.$$

根据极值的唯一性且有最值可知,当$a_1=a=0,b_1=b=2$时,函数$f(a,b)$取得最小值,故正确答案为(A).

5.【答案】 (B).

【考点提示】 行列式求值

【解析】

$$\text{原行列式}=\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}\xlongequal{r_4\Leftrightarrow r_1}-\begin{vmatrix}c&0&0&d\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\0&a&b&0\end{vmatrix}\xlongequal{c_3\Leftrightarrow c_1}\begin{vmatrix}0&0&c&d\\0&0&a&b\\d&c&0&0\\b&a&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-)^{2\cdot 2}\begin{vmatrix}d&c\\b&a\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c&d\\a&b\end{vmatrix}=(ad-bc)(bc-ad)=-(ad-bc)^2,$$

即正确答案为(B).

6.【答案】 (A).

【考点提示】 向量组的线性相关性

【解析】 由$(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$可知,因为$(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)$是二维向量组,而$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$是三维向量组,所以$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,无法推出$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,条件不充分;而当$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关时,因为$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\neq 0$,所以$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=2$,即$\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,条件充分.

综上,正确答案为(A).

7.【答案】 (B).

【考点提示】 随机事件概率的运算

【解析】 因为随机事件A和B相互独立,所以有$P(AB)=P(A)P(B)$.

又$P(A-B)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)[1-P(B)]$,代入$P(B)=0.5,P(A-B)=0.3$,可得$P(A)=0.6$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(A)P(B)=0.5-0.6\cdot 0.5=0.2,$$

正确答案为(B).

8.【答案】 (D).

【考点提示】 随机变量的数学期望与方差

【解析】 $E(Y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(y)y\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(y)y\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}[E(X_1)+E(X_2)];$$

$$E(Y_2)=E\left[\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right]=\frac{1}{2}[E(X_1)+E(X_2)]=E(Y_1);$$

$$E(Y_1^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(y)y^2\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(y)y^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}[E(X_1^2)+E(X_2^2)]$$

$$D(Y_1)=\frac{1}{2}[E(X_1^2)+E(X_2^2)]-\frac{1}{4}[E(X_1)+E(X_2)]^2$$

$$=\frac{1}{4}\{E(X_1^2)-[E(X_1)]^2\}+\frac{1}{4}\{E(X_2^2)-[E(X_2)]^2\}+\frac{1}{4}[E(X_1^2)+E(X_2^2)-2E(X_1)E(X_2)]$$

$$=\frac{1}{4}D(X_1)+\frac{1}{4}D(X_2)+\frac{1}{4}[E(X_1)-E(X_2)]^2$$

$$D(Y_2)=D\left[\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right]=\frac{1}{4}[D(X_1)+D(X_2)]\leqslant D(Y_1).$$

综上，正确答案为(D).

二、填空题

9.【答案】 $2x-y-z-1=0$.

【考点提示】 曲面的切平面方程

【解析】 题设曲面方程求偏导数可得

$$Z_x=2x(1-\sin y)-y^2\cos x,\quad Z_y=-x^2\cos y+2y(1-\sin x),$$

则在点(1,0,1)处，$Z_x\big|_{(1,0,1)}=2, Z_y\big|_{(1,0,1)}=-1$.

切平面方程为 $2(x-1)+(-1)\cdot(y-0)+(-1)\cdot(z-1)=0$，即 $2x-y-z-1=0$.

10.【答案】 1.

【考点提示】 函数的周期性，奇偶性

【解析】 因为 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，所以

$$f(7)=f(2\cdot 4-1)=f(-1)=-f(1),\quad 且 f(0)=0.$$

由 $f'(x)=2(x-1)$ 可得 $f'(x)=x^2-2x+c$.

又 $f(0)=0$，则 $c=0$，即 $f(x)=x^2-2x$ 且 $f(1)=-1$，则 $f(7)=-f(1)=1$.

11.【答案】 $y=xe^{2x+1}$.

【考点提示】 微分方程的解

【解析】 微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 两边同时除以 x 可得 $y'-\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}=0$,

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入上式可得 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u\ln u=0$.

经整理得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

两边积分得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，即 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}(\ln u-1)}{\ln u-1}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，$\ln u-1=cx$，从而 $u=\mathrm{e}^{cx+1}$，即 $y=x\mathrm{e}^{cx+1}$.

将 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 代入上式可得 $c=2$，故 $y=x\mathrm{e}^{2x+1}$.

12.【答案】 π.

【考点提示】 曲面积分

【解析】 根据柱面和平面方程可令

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta,\quad z=-y=-\sin\theta,\quad \theta\in[0,2\pi],$$

则

$$\begin{aligned}\int_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}[-\sin\theta(\sin\theta)+\sin\theta(-\cos\theta)]\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[1-\cos2\theta-\sin2\theta]\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{4}\int_0^{4\pi}[1-\cos t-\sin t]\mathrm{d}t=\pi.\end{aligned}$$

13.【答案】 $[-2,2]$.

【考点提示】 二次型的矩阵、惯性指数

【解析】 题设二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$，设其三个特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\boldsymbol{A}|=a^2-4$.

因为题设二次型的负惯性指数为1，所以有且只有一个特征值为负值，不妨设 $\lambda_1<0$，则 $\lambda_2\geqslant0,\lambda_3\geqslant0$，从而有 $|\boldsymbol{A}|=a^2-4\leqslant0$，即 $-2\leqslant a\leqslant2$.

当 $|\boldsymbol{A}|=a^2-4=0$，即 $a=\pm2$ 时，

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-a\\0&\lambda+1&-2\\-a&-2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-a^2(\lambda+1)\\&=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-4)-4(\lambda+1)=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3),\end{aligned}$$

则 $\lambda_1=-3,\lambda_2=3,\lambda_3=0$，满足题意. 故综上有，$-2\leqslant a\leqslant2$.

14.【答案】 $\dfrac{2}{5n}$.

【考点提示】 无偏估计量

【解析】 $E(X^2)=\displaystyle\int_\theta^{2\theta}\frac{2X}{3\theta^2}\cdot x^2\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3\theta^2}\int_\theta^{2\theta}x^3\mathrm{d}\theta=\frac{x^4}{6\theta^2}\Big|_\theta^{2\theta}=\frac{5}{2}\theta^2$，

则

$$E(c\sum_{i=1}^n X_i^2)=cE(\sum_{i=1}^n X_i^2)=c\cdot n\cdot\frac{5}{2}\theta^2=\theta^2,\quad c=\frac{2}{5n}.$$

三、解答题

15.【考点提示】 求函数的极限

【解析】

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{2t}=\frac{1}{2}.$$

16.【考点提示】 求函数的极值

【解析】 函数$f(x)$两边分别对x,y求偏导数可得

$$3y^2\cdot y'+y^2+2xy\cdot y'+2xy+x^2\cdot y'=0,\quad 则\ y'=-\frac{y^2+2xy}{3y^2+2xy+x^2};$$

令$y'=-\dfrac{y^2+2xy}{3y^2+2xy+x^2}=0$，则得$y=-2x$，代入原方程可得$x=1,y=-2$；

又$y''=-\dfrac{(2y\cdot y'+2y+2x\cdot y')(3y^2+2xy+x^2)-(y^2+2xy)(6y\cdot y'+2y+2x\cdot y'+2x)}{(3y^2+2xy+x^2)^2}$，

则代入$x=1,y=-2$可得$y''=\dfrac{4}{9}>0$，故$x=1$为极小值点，极小值为$y=-2$.

17.【考点提示】 解微分方程

【解析】 由$z=f(e^x\cos y)$可得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot e^x\cos y,\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f'\cdot e^x\sin y$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\cdot(e^x\cos y)^2+f'\cdot e^x\cos y,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\cdot(e^x\sin y)^2-f'\cdot e^x\cos y,$$

则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}f''=(4z+e^x\cos y)e^{2x},f''=4z+e^x\cos y.$$

令$u=e^x\cos y$，则$f''(u)=4f(u)+u,f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\dfrac{1}{4}u.$

又$f(0)=0,f'(0)=0$，则有$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\2C_1-2C_2-\dfrac{1}{4}=0,\end{cases}$解得$C_1=\dfrac{1}{16},C_2=-\dfrac{1}{16}.$

故综上有，$f(u)=\dfrac{1}{16}e^{2u}-\dfrac{1}{16}e^{-2u}-\dfrac{1}{4}u.$

18.【考点提示】 曲面积分

【解析】 令$\Sigma_1:z=1(x^2+y^2\leqslant1)$，取其下侧，则$\Sigma_1$和$\Sigma$可围成封闭的几何体$\Omega$，则由高斯公式可得