中学教师进修教材

高等數學

（物理专业用）

上 册

广东省中学教师进修教材编写组

广东人民出版社

中学教师进修教材

高等数学

（物理专业用）

上册

广东人民出版社

说　明

本书是教育厅师范处委托华南师范大学函授部负责编写的，可供全省师专函授、师专班和中学教师自学之用。

全书共十二章，包括函数与极限、导数、微分、不定积分、定积分、常微分方程、无穷级数、空间解析几何、偏导数、重积分、曲线积分与曲面积分、场论。为便于自学，本书阐述问题力求做到连贯性，并有较多的例题，各章节附有习题和答案。

本书注意吸收华南师大物理系担任数学课程的老师的多年教学经验，并在多年采用的自编《微积分》、《微积分续编》和《数学基础》的基础上改编而成。全书分上、下两册，上册包括第一章至第七章，下册包括第八章至第第十二章。第一至三章由梁国礼同志执笔，第四、五章由黄经武同志执笔，第六、七章由熊钰庆同志执笔，下册由张希光同志执笔。

全书承蒙孙雄曾教授审校，编者表示深切的谢意。苏泽金、李丽杨等同志为本书绘制插图，广东省出版公司给予大力支持，编者一并表示衷心的感谢。

由于水平所限，编写时间较仓促，不妥和错误之处，诚恳地欢迎读者批评指正。

广东省中学教师进修教材编写组

一九八一年九月

目 录

第一章　函数与极限

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学。

一些通常叫做初等数学的课程，如过去学过的算术、代数、几何、三角等等，它们的研究对象是空间形式和数量关系。高等数学仍然是以这两者为研究对象。它们的不同在于：第一，前者主要是研究常量与固定的图形；后者研究的是变量和图形的变化。第二，在研究方法上，前者采用孤立的、静止的方法；而后者采用动的、联系的方法。由于客观世界是在不断变化发展的，因此只有运用高等数学这一强而有力工具，才能更加确切地研究现实世界。

作为高等数学的伊始，本章先就高等数学的几个最基本、最重要的概念——函数、极限与连续作出定义。准确而又熟练地领会和掌握这些概念，对初学者是极其重要的。因为函数是高等数学研究的主要对象，极限法是研究高等数学的主要方法，连续则是函数的重要性质。

§1—1　函数概念

（一）　变量与常量

我们在观察各种自然现象或研究某个实际问题的时候，总会遇到许许多多的量，比如长度、时间、重量、热量和电流等等，这些量一般分为两种：一种是在我们考究的过程中保持不变的量，称为**常量**；另一种是在我们考究的过程中有

变化的量，称为变量。例如在自由落体运动过程中，落物的质量、重力加速度保持不变，是常量；而落物下降速度和落物与地面的距离是不断变化的，是变量。又如在交流电路中，电压和电流是变量，而电阻是常量。

通常，我们用 a，b，c，…等来表示常量；用 x，y，z，…等来表示变量。

值得注意，所谓常量，是相对而言的。如上面提到的重力加速度 g，它在不同的地方和不同的高度，其数值是有微小的差异的，但因相差很小，故在一定条件下把它看作是不变的量了。一般来说，如果一个变量在考究过程中变化很小，而且对于实际需要来说可以看作不变，就把它看作常量。

值得注意的另一问题是，判断一个量是常量还是变量，要根据实际问题作具体分析。如在自由落体运动中，落物的质量是个常量，但是飞行中的火箭，其质量因后喷物质而成了变量。

（二）函数的定义与记号

在同一自然现象或技术问题中，往往同时遇到几个变量，而且这些变量不是孤立地在变化的，而是互相关联着、遵循一定的规律变化着。下面是几个例子。

〔例 1〕 浸在液体里的物体所受到的浮力F与物体的体积V互相联系着，成正比关系，表为公式：

$$F = dV$$

其中d是液体的比重（常量）。V从 0 开始，每取一个正值，F都有一确定的值与之对应。

〔例 2〕 在温度不变的情况下，一定质量的气体的体积与压强是互相联系着，两者成反比关系，表为公式：

$$P=\frac{C}{V}\qquad (V>0)$$

其中C是常量。

〔例 3〕 电热丝所放出的热量Q与通电的电流 I 和 通电的时间t之间也有对应的关系：

$$Q=I^2Rt\qquad (I\geqslant 0,\quad t\geqslant 0)$$

其中R是电热丝的电阻（常量）。

从上面的例子中，我们看到，在同一问题中，变量之间是互相关联的，当一个变量在一定范围内取某一确定值时，另一个变量即循一定规律而得到对应的确定值。这种变量之间的数值对应关系就是函数关系。

定义 设有两变量x和y，如果对于变量 x 在某一范围X内的每一取值，变量y总有确定的值与它对应，则称 y 是x的函数。x叫自变量，y叫因变量或函数，X叫做这函数的定义域。

在上面例 1 中，F是V的函数，定义域是$V\geqslant 0$；例 2 中P是V的函数，定义域是$V>0$；例 3 中Q是I和t的函数，定义域是$I\geqslant 0$，$t\geqslant 0$。

按照函数的定义，我们应该注意到构成函数的两个要素是：

1 对应关系；

2 定义域。

因此两要素不同或不完全相同的函数，就不是相同的函数。例如$y=x$与$y=\frac{x(x+1)}{x+1}$不是相同的函数。因为定义域不同，前者为（$-\infty<x<\infty$），后者是（$-\infty<x<-1$）与（$-1<x<\infty$）；同时两者对应关系亦不同，当$x=-1$

时，前者有$y=-1$的确定值与之对应，但后者不存在与之对应的确定值。

量y是量x的函数，可表为记号

$$y=f(x)$$

符号f是指量x与量y的一种对应关系，如果在同一问题中出现几个不同的对应关系，我们就要用不同的符号来表示这些不同的对应关系了。如ϕ，ψ，F，… 等。

〔例 4〕 一物体以初速度v_0（常量）及加速度a（正的常量）作匀加速直线运动。它运动的路程S，即时速度V和运动时间t都是变量。它们之间的函数关系可表示为：

$$S=\phi(t)=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \qquad (t\geqslant 0)$$

$$V=\psi(t)=v_0+at \qquad (t\geqslant 0)$$

$$S=F(V)=\frac{v^2-v_0{}^2}{2a} \qquad (v\geqslant v_0)$$

上面我们用不等式来表示函数的定义域，通常我们更多地使用“区间”来表示定义域。凡满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的全体x值，称为闭区间，记作$[a, b]$（注意不能写成$[b,a]$）；凡满足$a<x<b$的全体x值，称为**开区间**，记作(a, b)；凡满足不等式$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的全体x值，称为**半开区间**，记作$[a, b)$或$(a, b]$。用如下数轴表示：

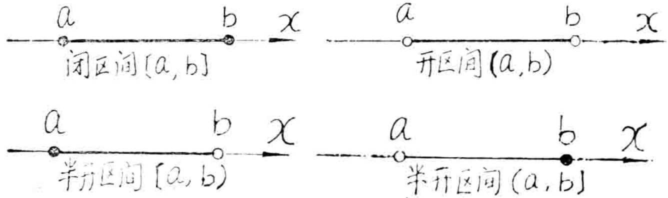

图1·1

〔例5〕 指出下面各函数的定义域：

（1） $y=\dfrac{1}{x}$

（2） $y=\sqrt{1-x^2}$

（3） $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$

解 （1）因$x=0$时，$y=\dfrac{1}{x}$无意义，因此函数定义域是$(-\infty,\ 0)$与$(0,\ \infty)$

（2）因只有根号内的数大于或等于0时，即$1-x^2\geqslant 0$时，函数才有意义（因为现在只限于考虑实数），故函数定义域是$[-1,\ 1]$。

（3）显然$y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$的定义域为$y=\dfrac{1}{x}$及$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域的公共部分：$[-1,\ 0)$与$(0,1]$。

当自变量x在定义域内取某一定值$x=c$时，函数$y=f(x)$就取得确定的对应值，这一确定的对应值，称为函数$f(x)$当$x=c$时的函数值，用符号$f(c)$来表示。

〔例6〕 求下列函数当$x=0$，$x=1$时的函数值：

（1） $y=x^2-3x+1$

（2） $y=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$

解 （1） 将$x=0$，$x=1$分别代入函数$y=x^2-3x+1$，得到

$$f(0)=0^2-3\times 0+1=1$$

$$f(1)=1^2-3\times 1+1=-1$$

（2） 首先应该明确，常数也可以看作是自变量的函数，即不论自变量取什么值，常数总是仍然取同一固定值与之对应。其次应该知道，$y=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$ 是一个函数（注意它并不是3个函数），称为**分段函数**，它表示当 $x>0$ 时，$y=1$；当 $x=0$ 时，$y=0$；当 $x<0$ 时，$y=-1$。故所求的函数值为

$$f(0)=0$$

$$f(1)=1$$

（三）函数表示法

变量之间的函数关系，可用各种方法来表达。最常见的有下面三种方法：

（1）解析法（公式法）

用数学式子表示因变量与自变量之间的函数关系的方法，就是函数表示的**解析法**。上面在所有例题出现的公式或数式都是这种方法。这种方法最适宜于进行理论分析和推导运算，但是有些实际问题中的函数关系并不能用公式来表示。

（2）表格法

表格法就是把一系列的自变量值与其对应的函数值列成表格。例如大家熟知的对数表、三角函数表等等，都是以表格的方式表示出函数的对应关系的。

（3）图示法

在坐标平面上，用曲线来表示因变量与自变量的对应关系，即为**图示法**。表示函数关系的曲线又叫做函数的图形。如自动记录温度计记录某地一昼夜气温变化情况，可用图

1·2表示出来。

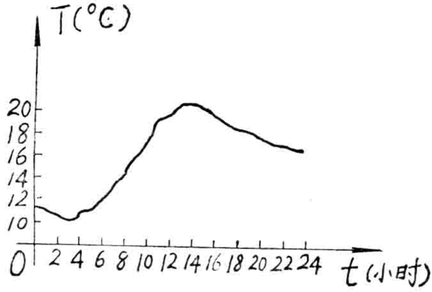

图1·2

思 考 题

1　什么叫函数？函数的两要素是什么？

2　函数就是公式，不能用公式表示的关系就不是函数关系。这句话对吗？

3　为什么常量也可以看作是函数？

4　$y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ 是表示一个函数还是两个函数？

5　$f(x)$是变量，$f(a)$是常量。对吗？

6　设$f(x)$为任意一个函数，那么$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$；$f(kx)=kf(x)$，对吗？

习 题 一

1　在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上取一点P（x，y），连结p点和两焦点所成的三角形，当P点在椭圆上变动时，三角形的

周长和面积是变量还是常量？

2　函数$f(x)=\lg x^2$与$\phi(x)=2\lg x$是否表同一函数？（提示：定义域是否一样？）

3　用不等式、区间和数轴表示下列各函数的定义域：

（1）　$y=\frac{1}{2}x^2+1$

（2）　$y=\sqrt{4-x^2}$

（3）　$y=\sqrt{5-2x}$

（4）　$y=\frac{1}{1-x}$

（5）　$y=\lg\frac{1}{1-x}+\sqrt{x-2}$

4　求下列函数的函数值：

（1）　$f(x)=\frac{|x-3|}{x+2}$，$f(-1)$

（2）　$\phi(t)=t^2-2$，$\phi(a+1)$

（3）　$F(\theta)=e^\theta-1$，$F(0)$

5　设$f(x)=x^2-x+3$，求$f(x^2)$和$[f(x)]^2$。

6　一物体作直线运动，已知阻力的大小与物体运动的速度成正比，但方向相反。当物体以1米/秒速度运动时阻力为2牛顿，建立阻力F与速度V之间的函数关系。

7　一窗户下面为矩形，上面为半圆形，周长为P。将窗户的面积表示为矩形底边a的函数。

8　画出例6中（1）$y=x^2-3x+1$和（2）$y=$

$$=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$两个函数的图形。

答　案

1，周长是常量，面积是变量；2，否；

3，（1）$-\infty<x<\infty$；（2）$-2\leqslant x\leqslant 2$；

（3）$-\infty<x\leqslant\frac{5}{2}$；（4）$x\neq 1$；

（5）$-2\leqslant x<1$

4，（1）4；（2）a^2+2a-1；（3）0；

5，x^4-x^2+3；$x^4-2x^3+7x^2-6x+9$；

6，$F=-2V$；

7，$A=\frac{1}{2}pa-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{8}\pi a^2$

§1—2　函数的几种特性

（一）　函数的单值性与多值性

如果自变量x在定义域X内每取一个确定值时，函数只有一个确定值与之对应，这种函数叫做单值函数，否则就是多值函数。

例如$y=x$，$y=\sin x$，$y=e^x$是单值函数，而$y^2=x$是多值函数。因为$y^2=x$可以拆成两个单值函数$y=+\sqrt{x}$和$y=-\sqrt{x}$。多值函数所拆成的每一单值函数，称为该多值函数的一个单值支。可见，关于多值函数的研究亦可以化为单值函数来逐一处理，以后凡是没有特别说明时，所称的函数都是指单值函数。

（二）函数的单调性

如果在区间（a，b)内任取两点x_1和x_2，当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)<f(x_2)$（或$f(x_1)>f(x_2)$），则称$y=f(x)$

在区间（a，d）内是**单调增加**（或**单调减少**）。

函数的单调性在几何上的表现是：凡单调增加的函数的图形是沿横轴（X轴）正向上升的（图1.3）；凡单调减少的函数的图形是沿横轴正向下降的（图1.4）。

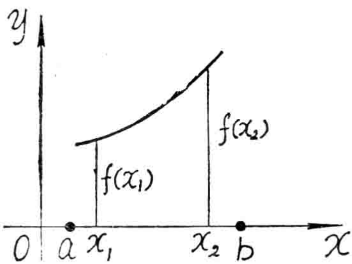

图1·3

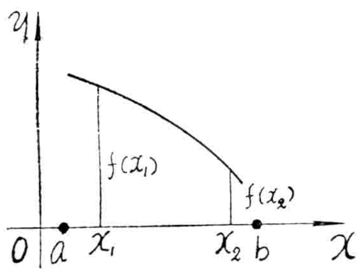

图1·4

要注意，上述提到的函数的单调增加或单调减少都是指函数在某一区间（a，b）而言的。并没有指明（a，b）的，则是指它的整个定义域。一个函数在定义域内某区间可以是单调增加而在定义域内另一区间可以是单调减少的。

〔例1〕 讨论$f(x)=x^2$的单调性。

解 若作出$f(x)=x^2$的图形（图1.5），我们马上看出结果：在$[0,+\infty)$上，函数单调增加，在$(-\infty,0]$上，函数单调减少。按定义，则任取x的两个值x_1和x_2，使$x_1<x_2$，由

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$$

可得到，当$0\leqslant x_1<x_2$时，$f(x_1)<f(x_2)$，故在$[0,+\infty)$上，函数$f(x)$是单调增加；当$x_1<x_2\leqslant 0$时，$f(x_1)>f(x_2)$故在$(-\infty,0]$上，函数$f(x)$是单调减少。