陈 连 编著

计算方法与优化技术

——方法、程序及其工程应用

兵器工业出版社

计算方法与优化技术

——方法、程序及其工程应用

陈 连 编著

兵器工业出版社

内 容 简 介

本书首先对数值分析（计算方法）和优化技术中常用并行之有效的一些方法及其 Visual Basic（简称 VB）程序进行了介绍，内容包括数值分析中的代数方程求根、插值法、线性代数方程组的数值解法、观测数据的最小二乘拟合和数值积分，一维优化中的黄金分割法和二次插值法，多元函数无约束优化中的鲍威尔法和变尺度法，以及约束优化中的约束随机方向法、复合形法和惩罚函数法；然后通过大量实例，着重介绍如何运用书中介绍的方法解决工程实际问题，以达到学以致用的目的。书中打“*”号部分为作者的最新研究成果，对开拓读者视野有一定帮助。

本书可作为高等工科院校机械类专业的计算方法和优化设计教材，也可作为从事工程设计、系统工程和运筹学等工作的科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

计算方法与优化技术：方法、程序及其工程应用 / 陈连编著.—北京：兵器工业出版社，2002.8
ISBN 7-80172-072-5

I. 计…　II. 陈…　III. 数值计算–计算方法　IV. 0241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 062766 号

出版发行：兵器工业出版社
责任编辑：常小虹
责任技编：魏丽华
社　　址：100089　北京市海淀区车道沟 10 号
经　　销：各地新华书店
印　　刷：兵器工业出版社印刷厂
版　　次：2002 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1–550

封面设计：底晓娟
责任校对：王　绛　　仝　静
责任印制：莫丽珠
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：9.375
字　　数：223.08 千字
定　　价：20.00 元

前　　言

利用优化技术可以大幅度地缩短工程设计周期，改善工程设计方案，达到提高产品质量，降低成本，提高经济效益的目的。随着电子计算技术的迅猛发展，优化设计已广泛应用于工程设计的各个领域，并取得了令人注目的成就。

从本质上讲，优化方法即求函数极值问题的数值计算方法。除优化问题以外，工程中还有许多复杂的问题也都是人工难以完成或根本无法胜任的，必须借助于电子计算机用数值计算的方法才能获得解决。即使在优化设计问题中，某些问题，如数据表格和线图资料的处理，也离不开数值计算方法。此外，数值分析和优化还是实现计算机辅助设计（CAD）的一项核心技术。掌握数值计算方法和优化技术，已成为工程技术人员提高计算机应用能力和产品设计能力的基本要求 。

近几年来，高等学校的工程学科已较普遍地开设了这方面的课程。鉴于目前此类教材大多偏重于理论和方法的阐述，因而篇幅臃肿，实用性差。为满足当前教育教学改革的要求，根据多年的教学经验和研究成果，从实用的观点出发，在数值计算方法和优化设计两门课程中精选部分内容，结合大量工程计算或优化设计实例，著成此书。因为旨在实用，故完全摒弃繁琐的理论论证和数学推演，着力介绍方法的特点、计算机程序的使用和工程实际问题的处理，以期通过 20 学时左右的课堂教学和 20 学时左右的计算机实习，达到学以致用的目的。

本书第一章到第五章为计算方法部分，第六章到第九章为优化设计部分，第十章为工程应用部分，第十一章专题介绍基于解析模型的阶梯轴的优化设计，因内容较多，故独立成章。书后的附录中给出了相应的练习题和计算机实习题。书中打“*”号的部分内容相对独立，可根据数学的实际情况部分或全部删减，而不影响全书的系统性。

书中介绍的数值分析和优化方法，均为工程实际中较为常用并行之有效的方法。对每一种方法，均以 Windows 操作平台下的通用程序设计语言——Visual Basic，开发和创建了具有图形用户界面的应用程序，并以图形界面方式详细介绍了程序的使用方法，内容简单明了，易于掌握。全部程序打包（制作应用程序安装盘）后刻录在一张光盘上，可以方便地安装到用户的计算机中，如有需要可直接向作者函购。

限于作者的水平和经验，书中缺点、错误在所难免，恳望读者不吝指正。

作者

2001.7

序

随着电子计算机的产生和发展，数值计算方法与优化技术得到了迅速的普及，并在工程设计领域产生了十分深刻的影响，使过去许多难以解决的课题获得了重大突破，成为解决工程计算和设计问题的利器。尤其是优化技术，不仅作为一种独立的现代设计方法受到人们广泛的青睐，而且还与其他设计方法相结合而形成了许多新的现代设计法，如有限元优化设计、概率（或可靠性）优化设计、模糊优化设计、模糊可靠性优化设计以及计算机辅助设计（CAD）等等，并成为这些新的设计方法的核心技术。可以毫不夸张地说，掌握数值计算方法与优化技术，已成为现代工程技术人员必备的素质。

数值计算方法与优化技术分属不同学科，但两者又密不可分。作者从以上两个方面精选内容，并结合大量工程实例，经科学整合而完成此书。笔者认为，这无论对于教育教学改革，还是对学科的综合发展，都是十分有益的尝试。

作者在书中力避烦琐的理论推演，以精练而通俗的语言着力介绍方法的原理、特点及适用范围；更难能可贵的是作者对书中介绍的每一种方法，均以 Windows 操作平台下的通用程序设计语言——Visual Basic，开发和创建了相应的应用程序，并以图形界面方式详细介绍了程序的使用方法，从而使本书具有良好的可读性和鲜明的实用性；另一方面，由于作者长期从事数值计算与优化工程应用方面的教学与研究，完成了许多卓有成效的工作，积累了丰富的工程经验，这些都比较全面地融入了本书的内容之中，从而又使本书具备了良好的示范性和严肃的学术性，因此是一本较好的教学及参考用书。

我相信，本书的出版，对数值计算与优化技术的普及与应用将起到积极的推动作用。

祝本书出版成功！

潘　晋

2001 年 7 月于清华园

目　　录

第一章 方程求根

§1.1 引 言

工程的许多许多问题可以归结为解代数方程 $f(x)=0$ 的问题。

若 $f(x)$ 为多项式，则此方程称为代数方程；若 $f(x)$ 为超越函数，则此方程称为超越方程。

次数大于或等于五次的代数方程和超越方程，一般不能用代数法求解，利用电子计算机求其近似数值解是最有效的方法。

本章主要介绍求方程实数近似根的方法。

§1.2 基本原理

给定初始近似值，用一定方法求出近似根的序列

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$$

若此列序存在极限，则称这种方法是收敛的，并称序列 $x_k(k=0,1,2,\cdots)$ 的极限 $x^*=\lim\limits_{k\to\infty}x_k$ 为方程的根；若此序列没有极限，则称这种方法是分散的。实际计算不可能也没有必要无限地进行下去，当根的近似值 x_k 与准确值 x^* 之差的绝对值，不超过事先根据需要而确定的某个小正数 ε，即满足

$$\left|x^*-x_k\right|<\varepsilon$$

就把 x_k 作为方程的根。小正数 ε，则称为判断计算机收敛的误差限。当根的准确值有很多位时，通常按“四舍五入”原则处理，从而得到一个近似值 x_k。如 $\pi=3.1415926\cdots$，按“四舍五入”原则处理，若取四位小数，则可得 3.1416，取五位小数，则可得 $\pi=3.14159$。不难看出，经过四舍五入处理它得到的近似值，其绝对误差都不会超过末位的半个单位，即：

$$|\pi-3.1416|\leqslant 0.5\times10^{-4}$$

$$|\pi-3.14159|\leqslant 0.5\times10^{-5}$$

事实上 x^* 是无法确定的，因而 x^*-x_k 也无法确定。通常以相邻的两次近似根之差来代替 x^*-x_k 的值，即满足

$$\left|x_{k+1}-x_k\right|<\varepsilon$$

即可将 x_{k+1} 的值作为方程的近似根。

§ 1.3 方法综述

方程求根的常用数值计算方法有二分法、迭代法、切线法和弦截法等等。其中二分法算法简单，且收敛性总能得到保证，但收敛速度较慢。迭代法速度有所加快(特别是加速迭代法)，但当迭代公式选择不当时可能导致发散。切线法较迭代法收敛性好和收敛速度快，但须事先求出 $f'(x)$，函数较复杂时使用不便。弦截法既具有切线法收敛性好和收敛速度快的优点，同时又无求函数导数的麻烦，因此应用较广。

§ 1.4 程序及应用

一、二分法

1．程序及使用说明

本程序由一个窗体模块(图 1–1)和一个标准模块(图 1–2)构成。窗体模块中包含有二分法

图 1–1

图 1–2

方程求根过程代码。使用时，用户只需在标准模块中填入求根方程，运行程序，然后在随后出现的窗口(图 1–3)的文本框中顺次填入求根区间的始点 F、终点 L、步长 H 以及计算精度

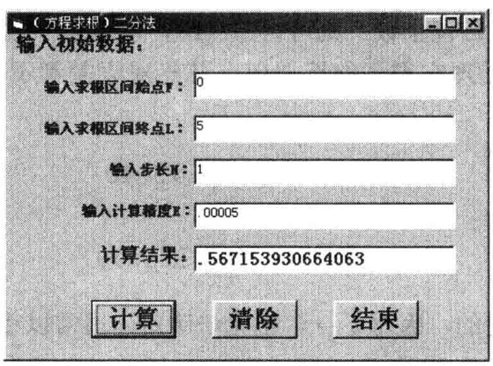

图 1–3

E，用鼠标单击“计算”按钮，计算结果即会出现在计算结果文本框中。如所给区间没有根，

文本框中将提示“所给区间无根！”。如数据填写错误，可点击“清除”按钮予以清除，然后重新填写。点击“结束”按钮可以结束计算。

2．应用示例

求 $xe^x-1=0$ 在区间[0，5]内的一个实根。

计算过程可参考图 1-2 和图 1-3。

二、快速弦截法

1．源程序及使用说明

程序结构(图 1-4)与使用均与二分法相似，故不赘述。

2．应用示例

求 $x\ln x-0.3092133=0$ 的根。

将求根方程填入标准模块(图 1-5)，运行程序，在窗口(图 1-6)的文本框中顺次填入根的初始值 x_0、x_1 和计算精度 e，用鼠标单击“计算”按钮，结果显示在计算结果文本框中。

图 1-4

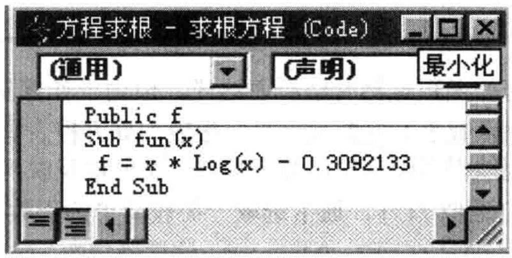

图 1-5

图 1-6

第二章　插　值　法

§2.1　引　　言

实际问题中遇到的函数 $y=f(x)$ 有相当部分是通过实验或观测得到的。虽然 $f(x)$ 在某个区间 $[a,b]$ 上存在且连续，但却只能给出 $[a,b]$ 上的一系列点 x_i 的函数值 $y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$，如表 2–1 所示。

表 2-1

x	x_0	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

有些函数虽然有解析表达式，但由于计算复杂，使用不方便，通常也构造一个函数表，如三角函数表、对数表、平方根表和立方根表等等。当我们需要求出不在表上的函数值时，便希望能根据给定的函数表构造一个既能反映函数 $f(x)$ 特性，又便于计算的简单函数 $p(x)$，用 $p(x)$ 近似 $f(x)$。通常选取一类较简单的函数如代数多项式或分段代数多项式作为 $p(x)$，并使 $p(x_i)=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$。这样确定的 $p(x)$ 就是我们希望得到的插值函数。例如，在数控机床上加工机械零件，根据设计可以给出零件外形曲线的某些型值点 $(x_i,y_i)(i=0,1,\cdots,n)$，加工时为控制每步走刀及步数，就要算出零件外形曲线上其他各点的函数值，才能加工出表面光滑的零件，这就是求插值函数的问题。下面给出有关插值的定义。

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义(图 2-1)，且已知在点 $a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$ 上的

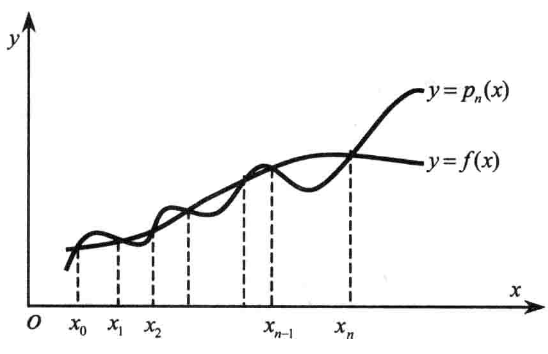

图 2-1

值 $y_0,y_1,\cdots,y_n$，若存在一简单函数 $p(x)$，使 $p(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$ 成立，就称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数，点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 称为插值节点，包含插节点的区间 $[a,b]$ 称为插值区间。求插值函数 $p(x)$ 的方法称为插值法。若是 $p(x)$ 次数不超过 n 的代数多项式，即

$$p_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

其中 a_i 为实数，就称 $p_n(x)$ 为插值多项式，相应的插值法称为代数插值法。如 $p(x)$ 为三角多项式，就称为三角插值法。本书只介绍代数插值。

从几何上看，插值法就是求 n 次代数曲线 $y=p_n(x)$，使其通过 $n+1$ 个点 $(x_i,y_i),(i=0,1,\cdots,n)$，并用它近似已知曲线 $y=f(x)$。

§ 2.2 拉格朗日(Lagrange)插值

一、方法简述

拉格朗日插值是一种重要的代数插值方法。其插值多项式为

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\left(\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right) \tag{2–1}$$

当 n=1 时

$$\begin{aligned}p_1(x)&=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1\\&=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)\end{aligned} \tag{2–2}$$

这种插值称为线性插值或两点插值。从几何图形上看(图 2–2)，$y=p_1(x)$ 表示通过 $A(x_0,y_0)$ 与 $B(x_1,y_1)$ 的直线。

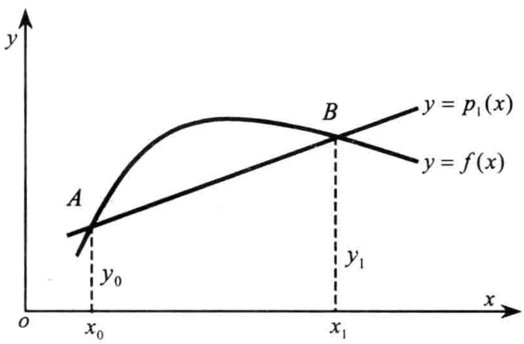

图 2–2

当 n=2 时

$$\begin{aligned}p_2(x)&=\sum_{k=0}^{2}y_k\left(\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{2}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)\\&=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2\end{aligned} \tag{2–3}$$

这种插值称为抛物线插值或二次插值。其几何解释是：用通过三点 (x_0,y_0)，(x_1,y_1)，(x_2,y_2) 所作抛物线 $y=p_2(x)$ 来近似曲线 $y=f(x)$，如图 2–3 所示。

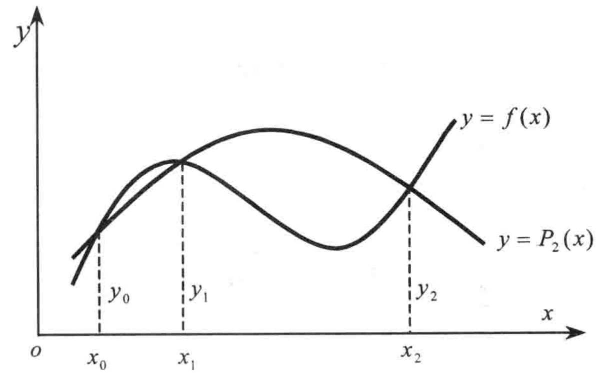

图 2–3

在给定点 x，用公式(2–1)计算 $p_n(x)$ 的值，并作为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的近似值，这个过程称为插值。插值多项式的次数称为插值的阶数。点 x 称为插值点。如果插值点 x 位于插值区间内，这种插值过程称为内插，否则称为外插(或外推)。

二、程序及使用说明

本程序由一个窗体模块(图 2–4)和一个标准模块(图 2–5)构成。插值过程代码包含在窗体模块中。标准模块 中的过程用于建立由插值节点坐标值构成的数据文件。

图 2–4

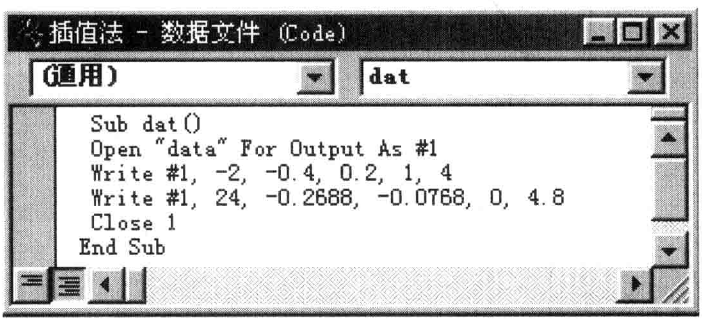

图 2–5

使用时用户将插值节点的横坐标和纵坐标值顺次填入代码中，运行程序，然后在随后出现的窗口(图 2–6)的文本框中键入插值节点数 N 和插值点 x 的数值，并用鼠标单击“计算”按钮，结果将显示在计算结果文本框中。

算例：已知函数如表 2–2 所示，求当 x=0.8 时的函数值。

计算过程见图 2–5、图 2–6。

表 2-2

x	-2	-0.4	0.2	1	4
y	24	-0.2688	-0.0768	0	4.80

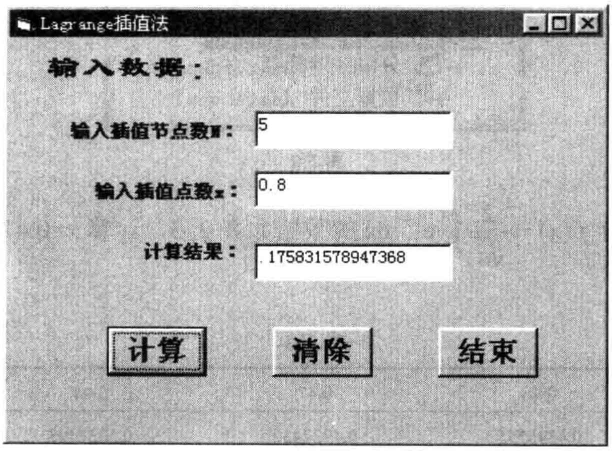

图 2–6

§ 2.3 分段低阶插值

根据区间$[a,b]$上给出的节点构造插值多项式$p_n(x)$近似$f(x)$，一般总认为$p_n(x)$的阶数n愈高逼近$f(x)$的精度愈好，但实际上并非如此。这是因为对于任意的插值节点，当$n\to\infty$时，$p_n(x)$不一定收敛$f(x)$。在实际进行插值时，通常把插值范围划分为若干段，然后在每个分段上使用低阶插值，如线性插值或抛物线插值，这就是所谓分段插值法。分段插值法算法简单，且收敛性能够得到保证。只要节点间距充分小，这种方法总能获得所要求的精度，插值效果一般较为理想。

一、分段线性插值

如果已知$y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$，对于给定的插值点$x$，若位于$x_{k-1}$和$x_k$之间，则以$x_{k-1}$和$x_k$为插值节点；若在$x_0$左侧，则取最靠近$x$的$x_0$和$x_1$作为插值节点；若在$x_n$右侧，则取最靠近它的$x_{n-1}$和$x_n$作为插值节点。后两种情形称为外推。

分段线性插值公式为：

$$y=y_i+\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}(x-x_i) \tag{2–4}$$

其中：

$$i=\begin{cases}1 & x\leqslant x_0\\ k & x_{k-1}<x<x_k \qquad (1\leqslant k\leqslant n)\\ n & x>x_n\end{cases}$$

分段线性插值程序结构如图 2–7 所示，使用方法与拉格朗日插值法相似，故不赘述。下面通过一个例子说明计算过程。

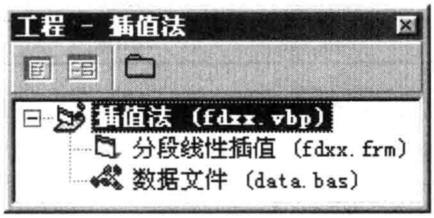

图 2–7

例：给出概率积分 $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的数据如表 2–3，计算 x=0.472 时，该积分值等于多少？

表 2–3

x	0.46	0.47	0.48	0.49
$f(x)$	0.4846555	0.4937452	0.5027498	0.5116683

解：将 x 和 $f(x)$的数值填入标准模块中的程序代码(图 2–8)，运行程序，将插值节点数 N=4、插值点 x=0.472 填入图 2–9 所示窗口的文本框中，显示计算结果为 $f(0.472)$=0.49554612。

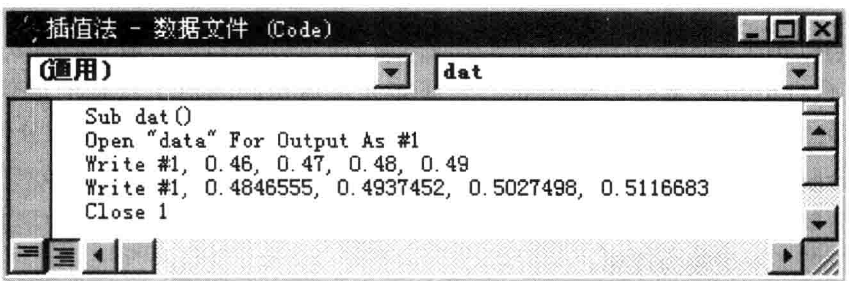

图 2–8

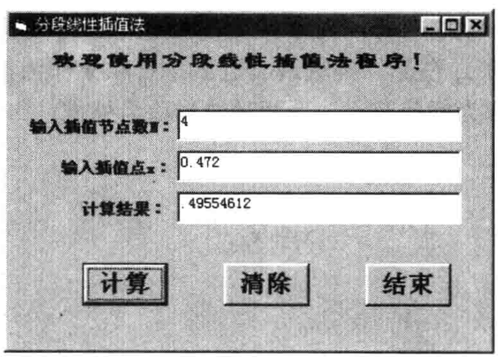

图 2–9

二、分段抛物线插值

如果要求计算精度较高，一般采用分段抛物线插值。

在抛物线插值公式中以 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 代替 x_0, x_1, x_2；以 y_{i-1}, y_i, y_{i+1} 代替 y_0，y_1，y_2 便得到分段抛物线插值公式：

$$y = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}y_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}y_{i+1} \tag{2–5}$$

式中 i 的取值应为

$$i = \begin{cases} 1 & x \leqslant x_1 \\ k-1 & x_{k-1} < x \leqslant x_k \text{且} |x-x_{k-1}| \leqslant |x-x_k| (k=2,3,\cdots,n-1) \\ k & x_{k-1} < x \leqslant x_k \text{且} |x-x_{k-1}| > |x-x_k| (k=2,3,\cdots,n-1) \\ n-1 & x > x_{n-1} \end{cases}$$

即选取最近插值点 x 的三个节点来进行插值计算。

分段抛物插值程序的结构如图 2–10 所示。图 2–11 和图 2–12 给出了对同一个例子的计算过程。

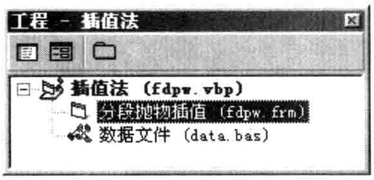

图 2–10

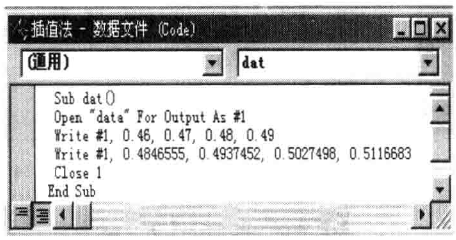

图 2–11

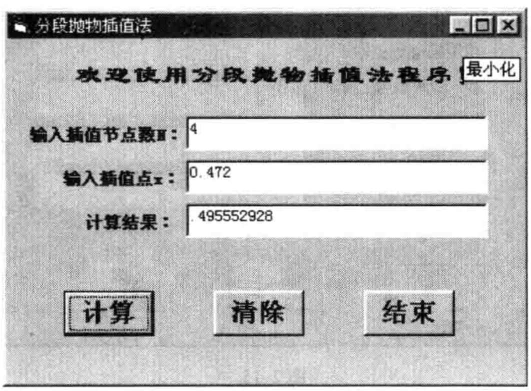

图 2–12

§ 2.4　牛顿插值

牛顿插值法也属于代数插值法，只是构造插值函数的方法与拉格朗日插值法有所不同，计算工作量也较拉格朗日插值法为小。牛顿插值法程序结构如图 2–13 所示。

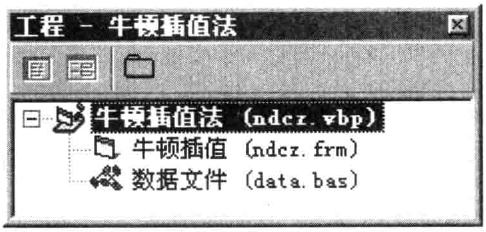

图 2–13

例：表 2–4 给出了列表函数 $f(x)=\lg x$ 的值，试用牛顿法求 $\lg 4.01$ 的值。

表 2–4

x	4.0002	4.0104	4.0233	4.0294
$f(x)$	0.6020817	0.6031877	0.6045824	0.6052404

计算过程如图 2–14、图 2–15 所示。

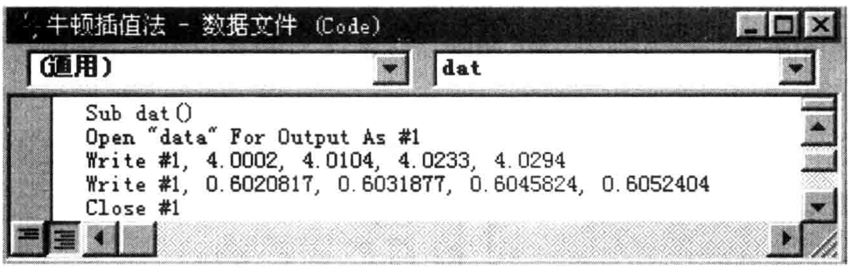

图 2–14

图 2–15

§ 2.5 等距节点插值

上面介绍了节点任意分布的插值方法，但实际应用时经常遇到等距节点的情形，这时插值公式进一步简化，计算也简单的多。图 2–16 给出了等距节点插值(牛顿向前插值)法程序的结构。·