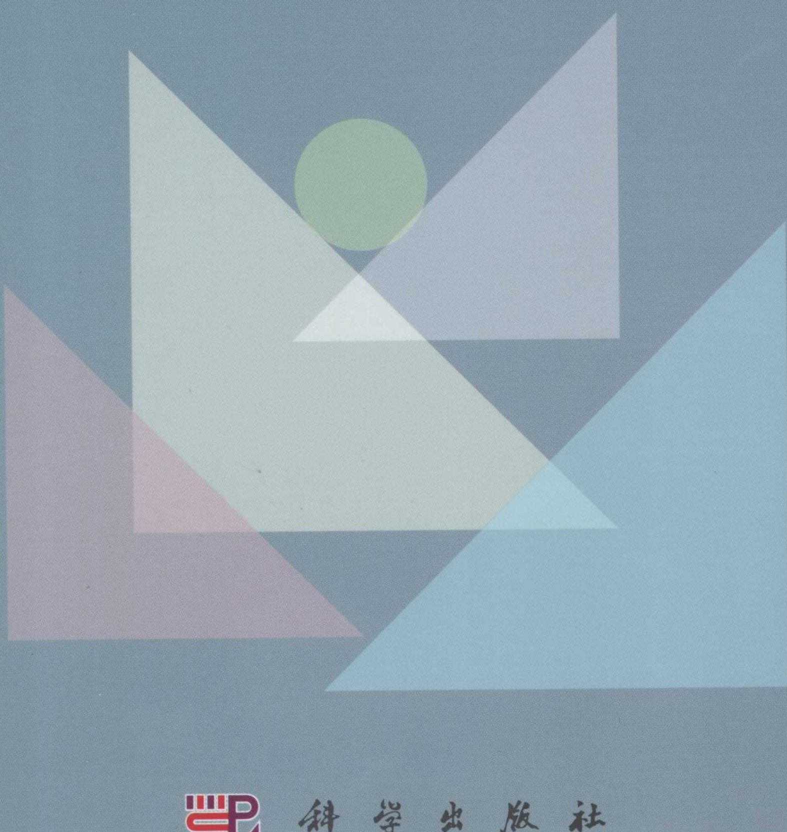
普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（上册）

李德新　编著



科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学

（上册）

李德新　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书根据"工科类本科数学基础课程教学基本要求"及考研大纲,并结合教学实践的经验编写而成,其中各部分知识的展开和习题的安排都充分注意循序渐进的教学原则.

本书分上、下两册.上册内容包括:函数、极限与连续,微分与导数,微分中值定理和导数的应用,定积分与不定积分,微元法与定积分的应用,微分方程,共6章.每节后均附有习题,每章末附有综合测试题.上、下册分别附有3套模拟试题.并给出了部分题目答案,供读者参考.

本书可作为高等学校理工类专业学生的教材,也可作为考研学生首轮复习的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/李德新编著.—北京:科学出版社,2014
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-040709-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等学校-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第106731号

责任编辑:李淑丽/责任校对:李 影
责任印制:阎 磊/封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014年6月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2014年6月第一次印刷 印张:17 1/2
字数:459 000

定价:36.80元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　　言

“高等数学”是高等学校理工类本科各专业的一门重要基础课，通过此课程的学习，使学生获得所要求的基本概念、基本理论和基本技能，培养学生的逻辑推理能力、抽象思维能力、空间想象能力、自学能力及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力，并逐步形成创新意识和应用意识，为学习后继课程和进一步获取知识奠定必要的数学基础.

本书在确保满足“工科类本科数学基础课程教学基本要求”的前提下，对高等数学的基本概念、基本理论和基本方法的阐述力求严谨简明、详略得当，同时突出微积分基本思想在理工科学科中的应用，可作为理工科本科生的公共教材，也可作为参加工学硕士研究生入学数学考试第一阶段系统复习时的参考用书，还可供科技人员参考.

本书分上、下两册，上册主要介绍一元函数微积分和微分方程，下册主要介绍无穷级数、向量代数与空间解析几何和多元函数微积分等.

本书有如下鲜明特点：

(1)力图把读者当成自己的朋友，用通俗的语言去刻画深刻的道理. 努力把分类、发散、逆向、联想等思维方法贯穿全书内容之中，重视通过对问题的分析与挖掘，充分调动读者的主观能动性.

(2)尽量对各部分内容的表达顺序和表达形式进行改善，从课程本身化解难点，主要是概念更加平易直观；逻辑推演更加直接明快；方法更加通用有力.

(3)多处知识板块后有一些简短的注记或小结，有助于学习者从深度和广度上理解与掌握相关知识.

(4)针对较难的例题，把思路与求解分开，既引导思考过程又明确解题格式. 把“如何想”与“如何写”更清晰地区分开来，有助于帮助读者形成深入思考的习惯和提高既严密又简明的书写能力.

(5)注重数学思想的应用，尽量把零散的应用实例进行集中归并，目的在于提高应用意识与能力.

(6)每章后附有综合测试题，上、下册分别给出 3 套模拟试题(题量按通常的 120 分钟的考试时间设置，与期末考试的题量大致相当). 读者可根据情况进行筛选.

(7)书中加星号的或用楷体字印刷的内容，可作为对数学要求较高的读者选读研究.

在本书写作的过程中，得到了学校教务处等有关部门和学院领导的大力支持，另外温永仙、王秀丽、姜永、陈绩馨、陈超英、官明友、林妹珠、陈建华、许冰等老师提供了许多宝贵意见和建议. 在此谨表诚挚的谢意.

在本书写作的过程中，参考了国内外与高等数学相关的许多优秀著作，在此恕不一一列名致谢.

编者才疏学浅，难免存在不足之处. 敬请使用本书的读者们不吝评正.

编　者

2013 年 12 月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是相互依赖的变量之间的确定性关系，是高等数学研究的主要对象．极限是函数的无穷变化趋势，是高等数学的理论基础和基本工具．连续是函数的重要性态，是高等数学研究的许多问题的基本条件和桥梁．本章我们先回顾初等数学中函数的有关知识，然后介绍极限的概念、性质、运算法则以及函数的一个重要性质即连续性．学习本章时，需要注意的是极限理论与方法，它是人们从有限中认识无限、从近似中认识精确、从量变中认识质变的最基本的思想方法，几乎贯穿了高等数学的全课程.

预备知识

在回顾复习函数的知识前，先介绍一些基础知识.

首先，引进常用的**逻辑符号与关系符号**如下：

符号$\forall$:表示“对每一个”,“任取”，或“任意给定”，它是英文 Any(每一个)或 All(所有的)字头 A 的倒写.

符号$\exists$:表示“存在一个”,“至少有一个”或“能够找到”，它是英文 Exist(存在)的字头 E 的反写.

符号$\Rightarrow$:表示“推出”或“蕴含”.

符号$\Leftrightarrow$:表示“等价”或“充分必要”.

符号$\triangleq$:表示“记为”.

符号$\stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow}$:表示“定义为”或“记为”.

其次，给出变量、区间及邻域的概念.

在某一过程中保持不变的数量称为**常量**或**常数**，用字母 a,b 等表示；可以取不同数值的数量称为**变量**，用字母 x,y 等表示．今后，凡无特别说明，本书所言的数量都是指实数.

只取有限个或可列无穷多个数值的变量称为**离散型变量**．如价格、产值等．所谓可列无穷多个数值，是指这无穷多个数值可以写成一个无穷数列的形式，如数值 $1,2,3,\cdots$，以及 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$ 等．可以取某区间上任何数值的变量称为**连续型变量**，如温度、时间等．所谓区间可以是有限区间，如开区间 (a,b)，闭区间 $[a,b]$，半开半闭区间 $(a,b]$ 和 $[a,b)$；也可以是无限区间，如 $(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 等．在不需要细分的情况下，各种区间统称**区间**，常用 I 表示.

为了研究变量的局部变化状态，今后还常用到**邻域**的概念.

若 δ 是正数，称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 **δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

其中点 a 称为这**邻域的中心**，δ 称为这**邻域的半径**．邻域 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ

的一切点 x 的全体(图 1-0-1).

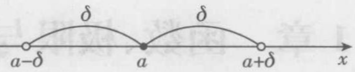


图 1-0-1

任何有限开区间都可视为邻域. 例如,区间$(-1,3)=U(1,2)$.

若把邻域$U(a,\delta)$的中心点去掉,所剩下的部分称为点 a 的去心 δ **邻域**,记作$\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

开区间$(a-\delta,a)$称为点 a 的**左 δ 邻域**,$(a,a+\delta)$称为点 a 的**右 δ 邻域**.

在不必指明邻域的半径时,可把以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**,记作 $U(a)$,把邻域 $U(a)$的中心点去掉后所剩下的部分称为点 a 的**去心邻域**,记作$\mathring{U}(a)$.

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学. 初等数学主要是对数量关系和空间形式作静止的分析,而高等数学则着重于以动态的观点作研究. 简单地说,高等数学就是研究变量变化规律的学科. 不过,高等数学研究的变量一般不是指孤立的某个变量,而是若干个相互依赖、相互制约的变量. 同一变化过程中若干个相互依赖、相互制约的变量之间所具有的确定性的关系,实质上就是函数.

§1.1 函数概述

一、函数的基本概念

定义　设 x 和 y 是两个变量,D 是数集. 若 $\forall x\in D$,y 按照一定的法则总有确定的数值与之对应,则称 **y 是 x 的函数**,记为

$$y=f(x),x\in D \quad 或 \quad y=y(x),x\in D.$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D(或记成 D_f)称为函数的**定义域**,$f(\ )$或 f 称为函数的**对应法则**.

在函数定义中,$\forall x\in D$,对应的 y 值是确定的,但 y 值不一定是唯一的. 若 $\forall x\in D$,y 有且只有一个值与它对应,则这类函数称为**单值函数**;若 $\forall x\in D$,y 可以有多个值与它对应,则这类函数称为**多值函数**. 例如,设 x 和 y 之间的对应法则由方程 $y^2=x$ 给出,当 $x\geqslant 0$ 时有 $y=\pm\sqrt{x}$ 与之对应,因此是一个多值函数. 对于多值函数,如果附加一些条件,可使得在此附加条件下,对每个 $x\in D$,对应的 y 值是唯一的,即为一个单值函数. 例如,对于 $y^2=x$,附加条件 $y\geqslant 0$,就得到一个单值函数 $y=\sqrt{x}$;若附加条件 $y\leqslant 0$,就得到另一个单值函数 $y=-\sqrt{x}$. 由于多值函数可以分解为多个单值函数来研究,因此,今后凡是没有特别说明时,函数都是指单值函数.

当自变量在定义域内取某一数值 a 时,函数 $f(x)$的对应值,称为**函数 $f(x)$在 $x=a$ 点处的函数值**,记为 $f(a)$或 $y|_{x=a}$. 当自变量取遍定义域内的一切数值时,相应的函数值的全体称为函数的**值域**,记为 W 或 W_f,即

$$W=\{y \mid y=f(x), x \in D\}.$$

函数定义中，包含了自变量、因变量、定义域、对应法则和值域这几个因素，其中定义域 D 与对应法则 f 称为函数的**两要素**.

函数的定义域是使函数有意义的自变量的取值范围．在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的．比如，圆的面积 A 是半径 R 的函数 $A=\pi R^2$，其定义域为 $R>0$. 若不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，这时函数的定义域是使函数中的所有算式都有意义的自变量的全部取值.

例 1　函数 $y=\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{1-x}$ 的定义域是(　　)

A. $\left(\dfrac{1}{e},1\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{e},1\right)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $\left[\dfrac{1}{e},1\right)\cup(1,+\infty)$

这是一道四选一的单项选择题，请读者用直推法、特取法、淘汰法自行求解．答案是 D. 今后对高等数学的单项选择题，还可用反演法、图解法和估值法等解答.

函数的两要素中，对应法则 $f(\ )$ 是表示自变量与因变量之间关系的，是函数的核心．理解这个核心的直观方法是把对应法则看作是一部机器，若 x 在函数 $f(x)$ 的定义域中，当把 x 视为机器的输入放进机器，则通过机器的处理产生了一个输出 $f(x)$. 当然，函数的定义域就被看作是一切允许输入的集合；函数的值域被看作是一切可能输出的集合．在计算器中预先编好程序的函数，是把函数看作机器的一个很好例证．例如，在普通计算器上都有 $\sqrt{\ }$ 键，它表示进行开平方运算的函数．要对一个数进行开平方运算，首先输入 x 到计算器的显示屏，然后按下 $\sqrt{\ }$ 键．当 $x\geqslant 0$ 时，函数值即被显示出来；当 $x<0$ 时，由于 x 不在开平方函数的定义域内，即这个 x 是一个不被认可的输入，计算器将在显示屏上显示错误信息．实际上，函数的“函”就带有“袋子”、“盒子”、“箱子”的意思，因而函数的对应法则，可看成是将输入的数字进行变化后再输出的一种特殊的“袋子”、“盒子”、“箱子”.

两个函数只有当它们的定义域相同，且对应法则也相同时，才称这两个函数是相同的.

注　函数与自变量和因变量所采用的表示符号无关.

例如，$y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 不是同一个函数，因为定义域不同；$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ 也不是同一个函数，因为对应法则不同；而 $y=\sin 2x$ 与 $u=\sin 2v$ 是相同的函数.

为了表示 y 是 x 的函数，所采用的记号并不唯一．但是，若同时研究多个不同的函数，为了避免混淆，则不能用同一个记号来表示不同的函数.

表示函数的方法，通常有公式法、图像法和表格法三种，另外还可以用语言文字的叙述表示，用电子计算机的语言表示等．将公式法和图像法结合起来(**数形结合法**)，仍然是今后经常用到的一种分析处理问题的基本方法.

在平面直角坐标系 xOy 中，**函数 $y=f(x)$ 的图像**(或图形)是指点集

$$C=\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D\},$$

可简记为 $C: y=f(x), x\in D$. 显然(图 1-1-1)，函数的图像在 x 轴和 y 轴上的投影分别就是函数的定义域和值域．例如，线性函数 $y=kx+b$ 是一条斜率为 k，在 y 轴上的截距为 b 的直线；二次函数

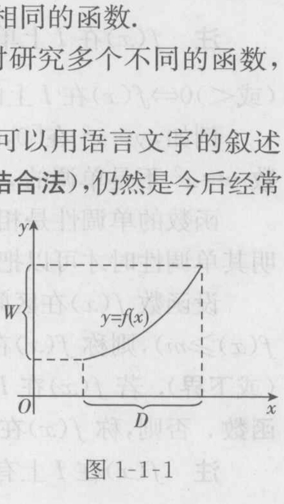


图 1-1-1

$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$是一条顶点为$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$,对称轴为$x=-\dfrac{b}{2a}$的抛物线.

函数作图的一般方法:研究函数性质,描出一些特殊点,连线作图并根据函数性质进行必要的修改后获得图像.

二、函数的基本特性

在函数的性质中,奇偶性、周期性、单调性和有界性是比较简单的,这些特性与函数图像的某种特征相匹配,也可以说是函数的几何特性.

设函数$f(x)$在区间I上有定义(I可以是整个定义域D_f,也可以是D_f的一部分),I关于原点对称(即$x\in I\Leftrightarrow -x\in I$). 若$\forall x\in I$,恒有$f(-x)=-f(x)$(或$f(-x)=f(x)$),则称$f(x)$是区间$I$上的**奇函数**(**或偶函数**).

注　$f(x)$在I上是奇函数(或偶函数)$\Leftrightarrow\forall x\in I$,恒有$f(-x)\pm f(x)=0\Leftrightarrow f(x)$在$I$上的图像关于原点(或$y$轴)对称.

例如,$y=C$(C是常数),$y=x^2$,$y=|x|$,$y=\cos x$都是偶函数;$y=\dfrac{1}{x}$,$y=x^3$,$y=\sin x$都是奇函数;$y=kx+b(k\neq 0,b\neq 0)$,$y=ax^2+bx+c(a\neq 0,b\neq 0)$,$y=2^x$,$y=\ln x$都是非奇非偶函数;$y=0$既是奇函数又是偶函数.

设函数$f(x)$的定义域为D,若$\exists T>0$,使得$\forall x\in D$,有$(x+T)\in D$,且恒有$f(x+T)=f(x)$,则称$f(x)$是**周期函数**,T为$f(x)$的一个**周期**.

注　$f(x)$周期为$T\Leftrightarrow\forall x\in I$,恒有$f(x+T)-f(x)=0\Leftrightarrow f(x)$的图像在相邻的每个长度为$T$的区间上完全相同.

若T为f的一个周期,则$\forall$正整数n,nT都是f的周期. 若在周期中存在最小的正值,就称它为**最小正周期**. 通常,周期函数的周期是指最小正周期.

例如,$y=\sin x$,$y=\cos x$的周期是2π;$y=\sin 2x$,$y=|\sin x|$的周期是π.

设函数$f(x)$在区间I上有定义,若$\forall x_1,x_2\in I$,当$x_1<x_2$时恒有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$),则称$f(x)$在I上**单调增加**(**或单调减少**)的,I为$f(x)$的一个**单调增加**(**或单调减少**)区间. 单调增加和单调减少的函数(或区间)统称为**单调函数**(**或单调区间**).

注　$f(x)$在I上单调增加(或减少)$\Leftrightarrow\forall x_1,x_2\in I$,当$x_1\neq x_2$时,恒有$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>$(或$<$)$0\Leftrightarrow f(x)$在$I$上的图像是渐升(或渐降)的.

例如,$y=x^2$在$[0,+\infty)$上单调增加,在$(-\infty,0]$上单调减少;而在$(-\infty,+\infty)$内,函数$y=x^2$不是单调的. 可见,函数的单调性具有局部性.

函数的单调性是相对于有定义的某区间而言的,只有在整个定义域上单调的函数,在指明其单调性时才可以把相应的单调区间省略,如$y=\mathrm{e}^x$,$y=\ln x$是单调增加函数.

设函数$f(x)$在区间I上有定义,若$\exists$常数M(或m),使得$\forall x\in I$,恒有$f(x)\leqslant M$(或$f(x)\geqslant m$),则称$f(x)$在I上**有上界**(**或有下界**),数M(或m)称为$f(x)$在I上的一个**上界**(**或下界**). 若$f(x)$在I上既有上界又有下界,则称$f(x)$在I上**有界**或$f(x)$是I上的**有界函数**. 否则,称$f(x)$在I上无界.

注　$f(x)$在I上有界$\Leftrightarrow\exists K>0$,使得$\forall x\in I$,恒有$|f(x)|\leqslant K\Leftrightarrow f(x)$在$I$上的图像介

于两条平行于 x 轴的水平线之间.

如,$y=x$ 在 $(0,1)$ 上有界,在 $[1,+\infty)$ 上无界;$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 无界,在 $[1,+\infty)$ 上有界.

函数的有界性仍然与区间有关,只有在整个定义域上讨论有界性时,才可以省略具体的区间.如 $y=\sin x$ 和 $y=\cos 2x$ 是有界函数.

有界性定义中的上界(或下界),即常数 M(或 m)可以不唯一,可以不必是 $f(x)\leqslant M$(或 $f(x)\geqslant m$)成立的最小(或最大)值.

思考:f 在 I 上有最大最小值与 f 在 I 上有界,这两者是否等价?

三、函数的基本运算

函数的基本运算包括四则运算,复合运算和反演运算三类.

对常数 k,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 施行的以下运算

$$kf(x),f(x)\pm g(x),f(x)g(x),\frac{f(x)}{g(x)}$$

称为函数的**四则运算**,所得到的函数分别称为函数 $f(x)$ 的**乘数函数**,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**和、差函数,积函数,商函数**.

函数经四则运算后,生成的新的函数的定义域一般是各构成函数的定义域的交集,而对商函数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$,其定义域是 $\{x\mid x\in D_f\cap D_g,g(x)\neq 0\}$.

如,由正弦函数 $\sin x$,余弦函数 $\cos x$,可得到正切函数 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$,余切函数 $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$,正割函数 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$,余割函数 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.由此并结合 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$,可推出 $1+\tan^2 x=\sec^2 x,1+\cot^2 x=\csc^2 x$.

注　把一个复杂的函数分解成若干个简单的函数的四则运算,这个过程称为函数的**分项**(这里把乘除的因式也看作项).同一个函数可能有不同的分项方法,如函数 $x(x+1)$,既可以当成 x^2 与 x 的和,也可当成 x 与 $x+1$ 的积.函数的分项方法是高等数学中较基本的化简方法.

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,定义域为 D_f,而 u 是 x 的函数 $u=g(x)$,且在 I 上有定义,若 $W=\{u\mid u=g(x),x\in I\}$,且 $W\subset D_f$,那么,$\forall x\in I$,y 通过 u 的联系便成为 x 的函数,这个新的函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的**复合函数**,记为 $y=f[g(x)]$,其中,$y=f(u)$ 称为**外层函数**,$u=g(x)$ 称为**内层函数**,u 称为**中间变量**.由已知函数获得复合函数的运算过程称为**复合运算**.

通俗地理解,复合函数就是函数套函数.复合函数也可以由两个以上的函数经过复合而成,如 $y=e^{\sin\sqrt{x}}$ 就可以看作是由三个函数 $y=e^u,u=\sin v,v=\sqrt{x}$ 复合而成的.要注意,不是任何两个函数都能复合成一个复合函数的.例如,$y=\sqrt{u}$ 及 $u=-x^2-1$ 就不能复合(请思考这是为何?).

注　把一个复杂的复合函数分解成若干个简单的函数的复合运算,这个过程称为函数的**分层**.复合函数的复合运算过程是由内到外进行的,而分层过程与复合运算过程恰好是

反序的——由表及里逐步设中间变量,因此,复合函数的分层俗称**剥皮法**. 正确而熟练掌握这一方法,将给今后学习带来很多方便. 另外,研究复合函数时,还常常用到**换元法**(变量替换法)和**还原法**.

例 2 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x+1}{x-2}$,求 $f(x)$.

思路 利用换元法,结合函数与变量记号无关的特性.

解 令 $\frac{1}{x}=u$,则 $x=\frac{1}{u}$,由题设得 $f(u)=\dfrac{\frac{1}{u}+1}{\frac{1}{u}-2}=\frac{1+u}{1-2u}$.

故 $f(x)=\frac{1+x}{1-2x}$.

例 3 设 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=3-x^2-\frac{1}{x^2}$,求 $f(\sin x)$.

思路 若令 $x-\frac{1}{x}=u$,不便求出 x,可把 $3-x^2-\frac{1}{x^2}$ 直接还原成 $x-\frac{1}{x}$ 的表达式.

解 因为 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=3-x^2-\frac{1}{x^2}=1-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$,所以 $f(u)=1-u^2$.

故有 $f(\sin x)=1-\sin^2 x=\cos^2 x$.

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义,若 $\forall y\in W=\{y\,|\,y=f(x),x\in I\}$,通过 $y=f(x)$都有唯一确定的 x 与 y 对应,则得到一个以 y 为自变量,x 为因变量的函数 $x=g(y)$,该函数称为函数 $y=f(x)$的**反函数**,习惯上写成 $y=g(x)$,并记为 $f^{-1}(x)=g(x)$. 由已知函数获得反函数的运算过程称为**反演运算**.

由于 $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$,所以函数与其反函数的图像关于直线 $y=x$ 是对称的.

注 单调区间上的函数一定有反函数. 比如,函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0)$内的反函数为 $y=-\sqrt{x},x>0$;函数 $y=e^x$ 在$(-\infty,+\infty)$的反函数为 $y=\ln x,x>0$.

三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x$ 在包含锐角的单调区间上,即函数

$$y=\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ y=\cos x,x\in[0,\pi],$$

$$y=\tan x,x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ y=\cot x,x\in(0,\pi)$$

的反函数,依次记为

$$y=\arcsin x,x\in[-1,1],\ y=\arccos x,x\in[-1,1],$$
$$y=\arctan x,x\in(-\infty,+\infty),y=\operatorname{arccot} x,x\in(-\infty,+\infty).$$

如,由反三角函数的定义,可得 $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$,$\arccos\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{6}\pi$.

利用函数的四则运算(分项法)、复合运算(分层法)和反演运算(反演法)这些基本运算研究函数的某些性质,有时可以起到化繁为简的作用.

以函数奇偶性的四则运算为例,(不难证得)在共同有定义的对称区间内,函数的奇偶性有如下的运算规律:

奇+奇=奇,偶+偶=偶,奇+偶=非奇非偶;

$$\text{奇}\times\text{奇}=\text{偶},\text{偶}\times\text{偶}=\text{偶},\text{奇}\times\text{偶}=\text{奇}.$$

其中“奇＋偶＝非奇非偶”的规律不包含恒为零的函数.

例 4　判别 $f(x)=x\sin x+|x|\cos x$ 的奇偶性.

解　因为 $x,\sin x$ 是奇函数，所以 $x\sin x$ 是偶函数；又因为 $|x|,\cos x$ 是偶函数，所以 $|x|\cos x$ 是偶函数，于是 $f(x)=x\sin x+|x|\cos x$ 是偶函数.

请思考：(1)若 f 和 g 都是奇函数，问 $f[g(x)]$ 是奇还是偶函数？

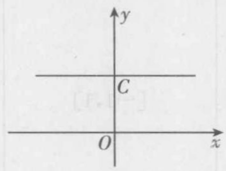
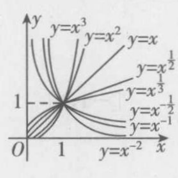
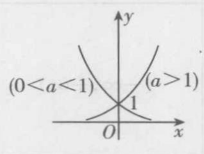
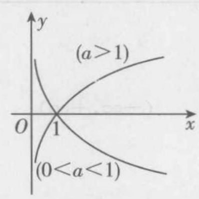
(2)若 f 和 g 在 I 上都单调增加，则 $f(x)+g(x)$，$f(x)g(x)$ 在 I 上是否一定单调增加？

四、函数的基本类型

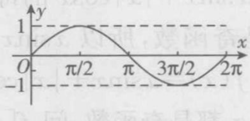
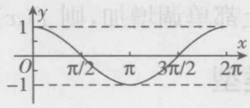
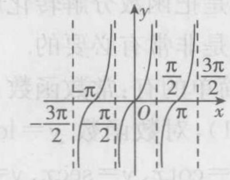
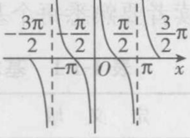
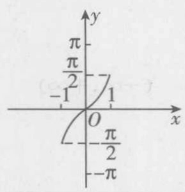
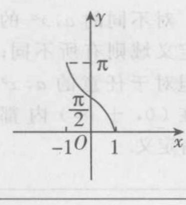
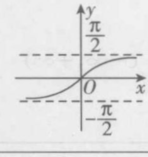
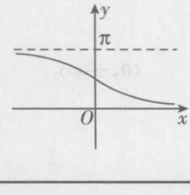
研究复杂函数通常都是把函数分解转化成简单的函数，然后利用相关运算来研究，因此记住一些简单函数的性质是非常有必要的.

在各种函数中，比较简单的有：常数函数 $y=C$，幂函数 $y=x^a$（a 是常数），指数函数 $y=a^x$（a 是常数且 $a>0,a\neq1$），对数函数 $y=\log_a x$（a 是常数且 $a>0,a\neq1$），三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$ 等，这些函数统称为**基本初等函数或基本函数**，它们是构成各种各样复杂函数的“零件”. 因此，读者要熟悉每个基本函数的定义域、图像、特性等(见表 1-1-1).

表 1-1-1　基本函数的图像与特性

名　称	表　达　式	定　义　域	图　　像	特　　性
常数函数	$y=C$ (C 为常数)	$(-\infty,+\infty)$		值域为 $\{C\}$；图像是一条平行于 x 轴的直线；是偶函数
幂函数	$y=x^a(a\neq0)$	对不同的 a，x^a 的定义域则有所不同；但对于任意的 a，x^a 在 $(0,+\infty)$ 内都有定义.		图像总过点(1,1)；图像在第一象限的部分都是单调的：当 $a>0$ 时是增函数；当 $a<0$ 时是减函数
指数函数	$y=a^x$ $(0<a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$		因为图像在 x 轴上方，值域：$(0,+\infty)$；总经过点(0,1)；当 $0<a<1$ 时是减函数；当 $a>1$ 时是增函数
对数函数	$y=\log_a x$ $(0<a\neq1)$	$(0,+\infty)$		图像在 y 轴右侧，且总经过点(1,0)；当 $0<a<1$ 时是减函数；当 $a>1$ 时是增函数

续表

<table>
<tr><th colspan="2">名 称</th><th>表 达 式</th><th>定 义 域</th><th>图 像</th><th>特 性</th></tr>
<tr><td rowspan="4">三角函数</td><td>正弦函数</td><td>$y=\sin x$</td><td>$(-\infty,+\infty)$</td><td>
</td><td>周期为 2π;奇函数,图像关于原点对称;是有界函数,图像介于两平行直线 $y=\pm1$ 之间,即 $|\sin x|\leqslant1$</td></tr>
<tr><td>余弦函数</td><td>$y=\cos x$</td><td>$(-\infty,+\infty)$</td><td>
</td><td>周期为 2π;偶函数,图像关于 y 轴对称;有界函数,图像介于两平行直线 $y=\pm1$ 之间,即 $|\cos x|\leqslant1$</td></tr>
<tr><td>正切函数</td><td>$y=\tan x$</td><td>$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$
$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$</td><td>
</td><td>周期为 π;奇函数;在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内增加</td></tr>
<tr><td>余切函数</td><td>$y=\cot x$</td><td>$x\neq k\pi$
$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$</td><td>
</td><td>周期为 π;奇函数;在 $(0,\pi)$ 内减少</td></tr>
<tr><td rowspan="4">反三角函数</td><td>反正弦函数</td><td>$y=\arcsin x$</td><td>$[-1,1]$</td><td>
</td><td>增函数,奇函数;值域 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$</td></tr>
<tr><td>反余弦函数</td><td>$y=\arccos x$</td><td>$[-1,1]$</td><td>
</td><td>减函数;值域 $[0,\pi]$</td></tr>
<tr><td>反正切函数</td><td>$y=\arctan x$</td><td>$(-\infty,+\infty)$</td><td>
</td><td>增函数,奇函数;值域 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>反余切函数</td><td>$y=\text{arccot}\,x$</td><td>$(-\infty,+\infty)$</td><td>
</td><td>减函数;值域 $(0,\pi)$</td></tr>
</table>

由基本函数经有限次四则运算或复合运算所得到的函数称为**初等函数**.

注　由于运算有限次,因而初等函数在整个定义域上必可用一个式子表出.

例如,多项式 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,有理函数$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$(其中 $P(x)$,$Q(x)$是多项式),对有理函数施以开方运算而成的无理函数等,统称为**代数函数**,代数函数是初等函数.

代数函数以外的初等函数统称为**超越函数**.

工程技术中常用的**双曲函数**是超越函数,其定义如下:

$$\mathrm{sh}x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},\mathrm{ch}x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2},\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}},$$

依次读作“双曲正弦”,“双曲余弦”,“双曲正切”. 它们具有类似于三角函数的性质,如 $\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$,$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$,$\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}x$,等等.

设 $f(x)$,$g(x)$是两个初等函数,且 $f(x)>0$,则函数 $y=[f(x)]^{g(x)}$,既不是幂函数,也不是指数函数,称其为**幂指函数**,它是一个初等函数. 这是因为

$$y=[f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}.$$

上式对幂指函数的恒等变形用到了对数恒等式和对数性质,即

$$N=\mathrm{e}^{\ln N},\ln N^a=a\ln N.$$

注　研究初等函数所采用的方法有分项法、分层法、反演法、换元法、恒等法等.

初等函数是最经常见到的函数,之前所列的函数均是初等函数. 但在实际问题中,有时会遇到在整个定义域内不能只用一个式子表示的函数,例如邮资计费、个人所得税收取等. 又如,电脉冲发生器发出一个三角形的脉冲波,电压 U(伏)和时间 t(微秒)之间的函数关系是

$$U=\begin{cases}1.5t, & 0\leqslant t\leqslant 10,\\ -1.5t+30, & 10\leqslant t\leqslant 20.\end{cases}$$

在自变量不同的取值范围内用不同的式子表示的一个(而不是几个)函数,即分段表示的函数,称为**分段函数**.

例 5　绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$是分段函数.

例 6　符号函数 $y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$是分段函数.

例 7　设 x 为任意数,不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记作$[x]$. 例如$[1/3]=0$,$[\sqrt{3}]=1$,$[2]=2$,$[-\pi]=-4$. 若把 x 看成自变量,则函数 $y=[x]$称为**取整函数**,是个分段函数.

注　分段函数的定义域是各段表示式的定义域的并集,分段函数的函数值是自变量所在的段的函数的值,分段函数作图时必须分段分别作图(各段的图像可能相连接,也可能断开),研究处理分段函数的方法常称为**分段法**.

下面看一个利用分段法解决的问题.

例 8 设 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & 0<x\leqslant 1,\\ 2-(x-2)^2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ (1)求 $f(x+1)$；(2)求 $y=f(x)$ 的反函数,并确定反函数的定义域.

思路 求分段函数的反函数,要逐段计算,并注意相应的取值范围.

解 (1)当 $0<x+1\leqslant 1$ 即 $-1<x\leqslant 0$ 时,$f(x+1)=2(x+1)-1=2x+1$;

当 $1<x+1\leqslant 2$ 即 $0<x\leqslant 1$ 时,$f(x+1)=2-(x+1-2)^2=2-(x-1)^2$,所以

$$f(x+1)=\begin{cases}2x+1, & -1<x\leqslant 0,\\ 2-(x-1)^2, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

(2)当 $0<x\leqslant 1$ 时,$y=2x-1$,所以 $-1<y\leqslant 1$,且 $x=\dfrac{y+1}{2}$;

当 $1<x\leqslant 2$ 时,$y=2-(x-2)^2$,所以 $1<y\leqslant 2$,且 $x=2-\sqrt{2-y}$(其中 $x=2+\sqrt{2-y}$ 舍弃),

合并得
$$x=\begin{cases}\dfrac{y+1}{2}, & -1<y\leqslant 1,\\ 2-\sqrt{2-y}, & 1<y\leqslant 2,\end{cases}$$

即所求的反函数是
$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}, & -1<x\leqslant 1,\\ 2-\sqrt{2-x}, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

它的定义域为 $(-1,1]\cup(1,2]=(-1,2]$.

利用分段法讨论问题是一个难点,要注意结论的合并即先分后合的解题格式.这也是重要的数学思想方法之一——**分类与整合**.

分段函数一般不是初等函数.如符号函数 $y=\mathrm{sgn}x$,取整函数 $y=[x]$ 就不是初等函数,因为它们都不能用一个式子表示,因此不是初等函数(这个判断还不是很严谨,以后可利用初等函数的连续性结合反证法加以证明).

有些分段函数可化为初等函数.如,绝对值函数 $|x|$ 虽是分段函数,但由于 $|x|=\sqrt{x^2}$,因此它也是初等函数.

分段函数 $t(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 它可写成 $t(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2}}{2x}$,$x\neq 0$,因此它也是初等函数.该函数称为区间 $(0,+\infty)$ 上的特征函数.用它可以把一些分段函数拼接成初等函数.如 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ 2^x, & x>0\end{cases}=t(-x)\cdot x^2+t(x)\cdot 2^x$.

初等函数与分段函数,都是直接用自变量的表达式来表示因变量的,可总称为**直接函数**.

若函数 $y=y(x)$ 是由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 来确定的,则称 $y=y(x)$ 是由 $F(x,y)=0$ 确定的**隐式函数**.若函数 $y=y(x)$ 是由含参数 t 的方程组 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$ 来确定的,则称