高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版哈工大理论力学教研室编

理论力学教程

（第三版）

同步辅导及习题全解

主　编　苏正明

◆ 知识点窍　◆ 逻辑推理　◆ 习题全解

◆ 全真考题　◆ 名师执笔　◆ 题型归类

新版

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

理论力学教程（第三版）同步辅导及习题全解

主　编　苏正明

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是与高等教育出版社出版，周衍柏主编的《理论力学教程（第三版）》一书配套的同步辅导及习题全解辅导书。

本书共有五章，分别介绍质点力学、质点组力学、刚体力学、转动参考系、分析力学。本书按教材内容安排全书结构，各章均包括知识结构图、基本要求、重点、难点、知识点归纳、复习思考题解答六部分内容。全书按教材内容，针对各章节习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习“理论力学教程（第三版）”课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课命题作为参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

理论力学教程（第三版）同步辅导及习题全解 / 苏正明主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2014.4
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-1837-7

Ⅰ. ①理… Ⅱ. ①苏… Ⅲ. ①理论力学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O31

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第056196号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：杨元泓　加工编辑：孙　丹　封面设计：李　佳

书　名	高校经典教材同步辅导丛书 **理论力学教程（第三版）同步辅导及习题全解**
作　者	主　编　苏正明
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　格	170mm×227mm　16 开本　9.75 印张　240 千字
版　次	2014 年 4 月第 1 版　2014 年 4 月第 1 次印刷
印　数	0001—5000 册
定　价	15.80 元

前言

周衍柏主编的《理论力学教程(第三版)》以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《理论力学教程(第三版)》同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑"理论力学教程(第三版)"这门课程的特点,我们在内容上作了以下安排:

1. 知识结构图。每章的知识网络图系统全面地涵盖了本章的知识点,使学生能一目了然地浏览本章内容框架结构,全面把握教材的理论体系。

2. 基本要求。说明本章包括的主要内容、学习的重点及需要掌握的知识点。

3. 重点与难点。每章前面均对本章的知识要点进行了整理。综合众多参考资料,归纳了本章几乎所有的考点,便于读者学习与复习。

4. 知识点归纳。对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确,有的放矢。

5. 复习思考题解答。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题进行了详细的讲解。

由于时间较仓促,编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编 者

2014 年 1 月

目录
contents

目录

contents

第一章

质点力学

知识结构图

- 质点力学
  - 运动的描述方法
    - 参考系与坐标系
      - 参考系
      - 坐标系
        - 直角坐标系、极坐标系
        - 柱面坐标系、球面坐标系、自然坐标系
    - 运动学方程与轨道
      - 运动学方程
      - 轨道
        - 直线运动
        - 曲线运动
    - 位移、速度和加速度
      - 位移
        - 位移
        - 路程
      - 速度
        - 速度
        - 速率
      - 加速度
  - 速度、加速度的分量表示式
    - 直角坐标系
    - 极坐标系
      - 速度
        - 径向速度 v_r
        - 横向速度 v_θ
      - 加速度
        - 径向加速度 a_r
        - 横向加速度 a_θ
    - 切向加速度与法相加速度
      - 切向加速度 a_t
      - 法相加速度 a_n
  - 平动参考系
    - 速度
      - 绝对速度 v
      - 相对速度 v'
      - 牵连速度 v_0
    - 加速度
      - 绝对加速度 a
      - 相对加速度 a
      - 牵连加速度 a_0

- 质点力学
  - 质点运动定律
    - 牛顿运动定律
      - 牛顿第一定律（惯性定律）
      - 牛顿第二定律 $F = ma$
      - 牛顿第三定律 $F_2 = -F_1$
    - 相对性原理
      - 惯性参考系
      - 非惯性参考系
  - 质点运动微分方程
    - 运动微分方程的建立：质点运动微分方程
    - 运动微分方程的解
      - 力只是时间 t 的函数
      - 力只是速度的函数
      - 力只是坐标的函数
  - 非惯性系动力学（一）
    - 在加速平动参考系中的运动
    - 惯性力
  - 功与能
    - 功和功率
      - 功 W（单位：焦耳 J）
      - 功率 P（单位：瓦特 W）
    - 能：机械能
      - 动能 T
      - 势能 V
    - 保守力、非保守力与耗散力
    - 势能
  - 质点动力学的基本定理与基本守恒定律
    - 动量定理与动量守恒定律
      - 动量定理 $F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$
      - 动量守恒定律的应用
    - 力矩与动量矩（角动量）
    - 动量矩定理与动量矩守恒定律
      - 动量矩定理 $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = M$
      - 动量矩守恒定律的应用
    - 动能定理与机械能守恒定律
      - 动能定理 $\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F \cdot \mathrm{d}r$
      - 机械能守恒定律的应用
  - 有心力
    - 有心力的基本性质
    - 轨道微分方程——比耐公式
    - 平方反比引力——行星的运动
    - 开普勒定律
      - 开普勒第一定律
      - 开普勒第二定律
      - 开普勒第三定律
    - 宇宙速度和宇宙航行：宇宙速度
      - 第一宇宙速度（环绕速度）
      - 第二宇宙速度（逃逸速度）
      - 第三宇宙速度
    - 圆形轨道的稳定性
    - 平方反比斥力——粒子的散射

基本要求

(1) 了解运动的描述方法，能够运用相关知识描述质点的运动情况。

(2) 了解极坐标系中的径向速度、横向速度和径向加速度、横向加速度的相关知识，掌握切向加速度和法相加速度的定义和应用。

(3) 掌握平动参考系中的绝对速度(加速度)、相对速度(加速度) 和牵连速度(加速度) 三者的关系，并能用于计算相关问题。

(4) 掌握牛顿三定律的相关知识。

(5) 掌握建立质点运动微分方程的方法，并能求解运动微分方程。

(6) 掌握非惯性参考系和牛顿运动定律的关系，并学会在非惯性参考系中应用牛顿运动定律。

(7) 掌握功和功率的求解方法，了解保守力、非保守力和耗散力的定义。

(8) 掌握动量定理、动量矩定理和动能定理的相关知识，并能够运用动量守恒定律、动量矩守恒定律和机械能守恒定律来解决实际问题。

(9) 了解有心力的定义和一般性质，了解轨道微分方程、平方反比引力、开普勒定律、万有引力定律、宇宙速度和平方反比斥力的相关知识和应用。

重　点

(1) 平动参考系中质点的绝对速度(加速度)、相对速度(加速度) 和牵连速度(加速度) 在实际计算中的运用。

(2) 质点运动微分方程的建立和求解。

(3) 质点的功和功率的求解。

(4) 动量定理、动量矩定理和动能定理的定义以及动量守恒定律、动量矩守恒定律和机械能守恒定律的实际应用。

难　点

(1) 轨道微分方程的应用。

(2) 平方反比引力和斥力相关知识的应用。

(3) 圆形轨道稳定性的判断依据的应用。

知识点归纳

(1) 参考系：描述物体运动时被选做参考的另一物体叫做参考系。

轨道：运动指点在空间上一连串所占据的点形成的连续曲线，其方程可由运动学方程消去时间 t 得到。

(2) 速度的矢量表示式为 $v=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$。径向速度表达式为 $v_r=\dot{r}$，横向速度表达式为 $v_\theta=r\dot{\theta}$。

加速度的矢量表达式为 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$。径向加速度表达式为 $a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$，横向加速度表达式为 $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})$，切向加速度表达式为 $a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，法向加速度表达式为 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$。

(3) 匀速直线运动的参考系为：绝对速度 $v=$ 相对速度 $v'+$ 牵连速度 v_0；绝对加速度 $a=$ 相对加速度 a'。加速直线运动的参考系为：绝对速度 $v=$ 相对速度 $v'+$ 牵连速度 v_0；绝对加速度 $a=$ 相对加速度 $a'+$ 牵连加速度 a_0。

(4) 牛顿第一定律（惯性定律）：任何物体（质点）如果没有受到其他物体的作用，都将保持静止或匀速直线运动的状态。也就是说，物体如果不受其他物体的作用，它的速度将保持不变。

牛顿第二定律：当一物体（质点）受到外力作用时，该物体所获得的加速度和外力成正比，和物体本身的质量成反比，加速度的方向和外力的方向一致。牛顿第二定律的数学表达式可写为 $F=ma$。

牛顿第三定律：当一物体 A 对另一物体 B 有一个作用力 F_1 的同时，另一个物体 B 同时也对物体 A 有一个反作用力 F_2，作用力与反作用力的量值相等，方向相反，并且在同一直线上，即 $F_2=-F_1$。

牛顿运动定律成立的参考系叫做惯性参考系；牛顿运动定律不能成立的参考系叫做非惯性参考系。

(5) 质点如果不受任何约束而运动，则叫自由质点。质点运动的微分方程可写为 $m\ddot{r}=F(r,\dot{r},t)$。

如果质点受到某种约束，例如被限制在某曲线或曲面上运动，不能脱离该线或该面而做任意的运动并占据空间任意的位置，则叫非自由质点。此时该线或该面叫约束，而该线或该面的方程则叫做约束方程。

(6) 质点受恒力作用而做直线运动时，如果令 F 代表力，Δr 代表位移，F 和 r 间所加的角为 θ，该力沿位移 Δr 所做的功 W 为：$W=F\cdot\Delta r=F\mid\Delta r\mid\cos\theta$。

机械能分为两大类：一类是由于物体有一定的速度而具有的能量，通常叫动能，用符号 T 表示；另一类则是由于物体间相对位置发生变化所具有的能量，通常叫势能，用符号 V 表示。

(7) 设质点的质量是 m，它运动的速度是 v，那么 m 和 v 的乘积叫做质点的动量。动量定理的表达式为：$F=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$。自由质点不受外力作用时，它的动量 p 保持不变，即将做惯性运动，这个关系叫做动量守恒定律，其表达式为：$p=mv$。

动量对空间某点或某轴线的矩叫做动量矩，也叫角动量。力矩能使动量矩发生变化，叫做动量矩定理，其表达式为：$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=M=r\times F$。如果质点不受外力作用，或虽受外力作用，但诸外力对某点的合力矩恒为零，则对该点来讲，质点的动量矩 J 为一常矢量，这个关系叫做动量矩守恒定律。

质点动能的微分等于作用在该点上的力 F 所做的元功，这个关系叫做质点的动能定理，其公式为：$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=F\cdot\mathrm{d}r$。当质点所受的力都是保守力时，质点的动能与势能虽可互相消长，但总机械能的数值恒保持不变，这就是机械能守恒定律，其公式为：$T+V=E$。

(8) 如果运动质点所受的力的作用线始终通过某一定点，我们就说这个质点所受的力是有心力，而这个定点叫做力心。

轨道的微分方程(比耐公式)：$h^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u\right)=-\frac{F}{m}$，其中 $u=\frac{1}{r}$。

质点在距质心为 r 时的引力势能为：$V(r)=\int_{\infty}^{r}\frac{k^2m}{r^2}\mathrm{d}r=-\frac{k^2m}{r}$。

开普勒第一定律：行星绕太阳做椭圆运动，太阳位于椭圆的一个焦点上；开普勒第二定律：行星和太阳之间的连线(失径)，在相等时间内所扫过的面积相等；开普勒第三定律：行星公转的周期的平方和轨道半长轴的立方成正比。

第一宇宙速度(环绕速度)：$v_1=\sqrt{gr}=\sqrt{9.8\times 6\,400/1\,000}\,\mathrm{km/s}=7.9\,\mathrm{km/s}$；第二宇宙速度(逃逸速度)：$v_2=\sqrt{2gr}=\sqrt{2}v_1=1.4\times 7.9\,\mathrm{km/s}=11.2\,\mathrm{km/s}$；第三宇宙速度：$v_3=\sqrt{(12)^2+(11.2)^2}\,\mathrm{km/s}\approx 16.5\,\mathrm{km/s}$。

圆形轨道稳定性的判据：$\frac{uP'}{P}<3$，其中 $u=\frac{1}{r}$，$P=\frac{-F}{m}$，$P'=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}u}$。

α 粒子的瞄准距离 ρ 和 α 粒子飞过力心后所发生的偏转角 φ 之间的关系为：$\rho=\frac{k'}{mv_\infty^2}\cot\frac{\varphi}{2}$。

卢瑟福公式：$\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4}\left(\frac{k'}{mv_\infty^2}\right)2\,\frac{2\pi\sin\varphi}{\sin^4(\varphi/2)}\mathrm{d}\varphi$。

复习思考题解答

习题 1

1-1 沿水平方向前进的枪弹，通过某一距离 s 的时间为 t_1，而通过下一等距离 s 的时间为 t_2。试证明枪弹的减速度(假定是常数)为

$$\frac{2s(t_2-t_1)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$$

证　明　根据题意可知,枪弹为匀减速运动,设此运动的加速度为 a,通过第一段距离前的初速度为 v_0。

枪弹通过第一段距离时有:$s = v_0 t_1 - \frac{1}{2}at_1^2$　①

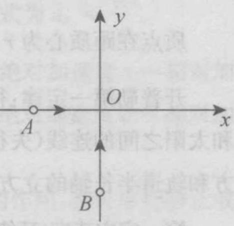
枪弹通过第二段距离时有:$2s = v_0(t_1 + t_2) - \frac{1}{2}a(t_1 + t_2)^2$　②

①② 式联立便可求得　$a = \frac{2s(t_2 - t_1)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)}$

此题得证。

1-2　某船向东航行,速率为 15 km/h,在正午经过某一灯塔。另一船以同样速度向北航行,在下午 1 时 30 分经过此灯塔。问在什么时候,两船的距离最近?最近的距离是多少?

解题过程　设东西方向为 x 轴且东方为正方向,南北方向为 y 轴且北方为正方向,以灯塔为坐标原点,建立直角坐标系如图所示。



解题 1-2 图

设 A 船向东行驶经过 t_0 时间到达灯塔,则 B 船向北行驶经过 $(t_0 + 1.5)$ 小时经过灯塔。

由题意可得,时刻 t 时 A 船和 B 船的坐标分别为:

$$\begin{cases} x_A = -150t_0 + 15t \\ y_A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_B = 0 \\ y_B = -15(t_0 + 1.5) + 15t \end{cases}$$

设 A、B 两船的距离为 d,则

$$d^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

代入数据得

$$\begin{aligned} d^2 &= (-15t_0 + 15t)^2 + [-15(t_0 + 1.5) + 15t]^2 \\ &= 450t^2 - (900t_0 + 675)t + 450t_0^2 + 675t_0 + 506.25 \end{aligned}$$

对时间 t 求导得

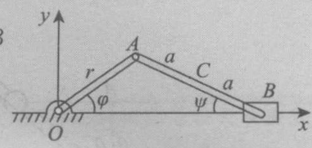
$$\frac{\mathrm{d}(d^2)}{\mathrm{d}t} = 900t - (900t_0 + 675)$$

令 $\frac{\mathrm{d}(d^2)}{\mathrm{d}t} = 0$,得 $t - t_0 = 0.75$ h

得 $t - t_0 = 0.75$ 代入得

$$S_{\min} = \sqrt{(15 \times 0.75)^2 + (15 \times 0.75 - 15 \times 1.5)^2} = 15.9\ \text{km}$$

1-3 曲柄 $OA = r$，以匀角速度 ω 绕定点 O 转动。此曲柄借连杆 AB 使滑块 B 沿直线 Ox 运动。求连杆上 C 点的轨道方程及速度。设 $AC = CB = a$，$\angle AOB = \varphi$，$\angle ABO = \psi$。



习题 1-3 图

解题过程 (1) 根据题意得：在 $\triangle AOB$ 中，由正弦定理有 $\frac{2a}{\sin\varphi} = \frac{r}{\sin\psi}$ ①

根据 C 点在图中的几何关系，可得 C 点的坐标为

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi + a\cos\psi & ② \\ y = a\sin\psi & ③ \end{cases}$$

①③ 联立得 $\quad \sin\varphi = \frac{2a\sin\psi}{r} = \frac{2y}{r}$ ④

根据 $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

由 ② 得 $\cos\varphi = \frac{x - a\cos\psi}{r} = \frac{x - \sqrt{a^2 - y^2}}{r}$ ⑤

再根据 ④^2 + ⑤^2 = 1，得

$$\frac{4y^2}{r^2} + \frac{x^2 - y^2 + a^2 - 2x\sqrt{a^2 - y^2}}{r^2} = 1$$

整理上式便能得到 C 点的轨道方程：

$$(x^2 + 3y^2 + a^2 - r^2)^2 = 4x^2(a^2 - y^2)$$

(2) 分别对 ②③ 求导得

$$\begin{cases} \dot{x} = -r\omega\sin\varphi - \frac{r\omega\cos\varphi}{2\cos\psi}\sin\psi \\ \dot{y} = \frac{r\omega\cos\varphi}{2} \end{cases} \quad 其中\ \omega = \dot{\varphi}$$

根据 ① 得 $\quad r\sin\varphi = 2a\sin\psi$

对等号两边分别求导得 $\quad \dot{\psi} = \frac{r\omega\cos\varphi}{2a\cos\psi}$

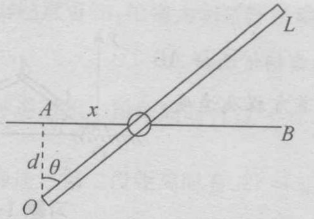
所以连杆上 C 点的速度为：

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

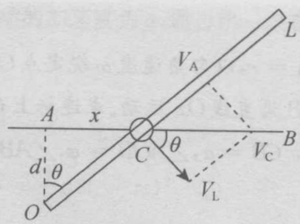
$$= \sqrt{\left(-r\omega\sin\varphi - \frac{r\omega\cos\varphi}{2\cos\psi}\sin\psi\right)^2 + \frac{r^2\omega^2\cos^2\varphi}{\psi}}$$

$$= \frac{r\omega}{2\cos\psi}\sqrt{\cos^2\varphi + 4\sin\varphi\cos\psi\sin(\varphi + \psi)}$$

1-4 细杆 OL 绕 O 点以匀角速度 ω 转动，并推动小环 C 在固定的钢丝 AB 上滑动。图中的 d 为一已知常数，试求小环的速度及加速度的量值。



习题 1-4 图



解题 1-4 图

解题过程 根据题意和图可知,C 点的速度 V_C 沿 AB 水平向右,且 V_C 由两部分组合而成,分别为平行于 OL 杆的分量 V_{11} 和垂直于 OL 杆的分量 $V_\perp$。

由于 OL 绕 O 点以匀角速度 w 转动,

所以 $V_\perp = \omega \times LOC = \omega\sqrt{d^2+x^2}$

由此可得 C 点的速度为 $V_C = V_\perp / \cos\theta = \dfrac{\omega\sqrt{d^2+x^2}}{\dfrac{d}{\sqrt{x^2+d^2}}} = \omega\dfrac{d^2+x^2}{d}$

对 C 点的速度求导便得到 C 点的加速度

$a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \omega d \cdot 2\sec\theta \cdot \sec\theta \cdot \tan\theta \cdot \dot{\theta}$,其中 $\dot{\theta} = \omega$

所以 $a = 2d\omega^2\sec^2\theta\tan\theta = 2\omega^2 x(d^2+x^2)/\mathrm{d}^2$

1-5 *矿山升降机做加速度运动时,其变加速度可用下式表示:$a = c\left(1-\sin\dfrac{\pi t}{2T}\right)$ 式中 c 及 T 为常数,试求运动开始时间 t 后升降机的速度及其所走过的路程。已知升降机的初速度为零。*

解题过程 由于加速度 a 是速度 v 对时间 t 求导数的解结,所以欲求升降机运动时间为 t 后的速度,则要对加速度 a 求积结。

$v = \int_0^t a\mathrm{d}t = \int_0^t c\left(1-\sin\dfrac{\pi t}{2T}\right)\mathrm{d}t$

整理得 $\quad v = ct + \dfrac{2\pi}{\pi}c\cos\dfrac{\pi t}{2T} + C$(其中 C 为常数)

根据题意得:$t=0$ 时,$v=0$,代入上式得 $D = -\dfrac{2T}{\pi}C$

因此得到升降机的速度为:

$v = C\left[t + \dfrac{2T}{\pi}\left(\cos\dfrac{\pi t}{2T} - 1\right)\right]$

又因为速度 v 是路程 s 对时间 t 求导数的解结,所以

$S = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t c\left[t + \dfrac{2T}{\pi}\left(\cos\dfrac{\pi t}{2T} - 1\right)\right]\mathrm{d}t$

同样代入 $t=0$ 时，$s=0$，得升降机所去过的路程为：

$$S=c\left[\frac{t^2}{2}+\frac{2T}{\pi}\left(\frac{2T}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2T}-t\right)\right]$$

1-6 一质点沿位矢及垂直于位矢的速度分别为 λr 及 $\mu\theta$，式中 λ 及 μ 是常数。试证其沿位矢及垂直于位矢的加速度分别为 $\lambda^2 r-\frac{\mu^2\theta^2}{r}$ 和 $\mu\theta\left(\lambda+\frac{\mu}{r}\right)$。

证　　明　根据题意得

质点沿位矢的速度 $v_{\parallel}=\lambda r=\dot{r}$，所以 $\dot{r}$，$=\lambda r$　①

质点垂直于位矢的速度 $v_{\perp}=\mu\theta=\dot{\theta}r$，所以 $\dot{\theta}=\frac{\mu\theta}{r}$　②

因为　$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\vec{i})+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\dot{\theta}\vec{j})$

所以　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\vec{i})=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\dot{r}\frac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t}=\ddot{r}\vec{i}+\dot{r}\dot{\theta}\vec{j}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\dot{\theta}\vec{j})=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\vec{j}+r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\vec{j}+r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\dot{\theta}\vec{j}+r\ddot{\theta}\vec{j}-r\dot{\theta}^2\vec{j}$

所以　$a=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{i}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})j$

由此可得沿位矢方向的加速度　$a_{\parallel}=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$　③

垂直于位矢方向的加速度　$a_{\perp}=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$　④

对 ① 求导得　$\ddot{r}=\lambda\dot{r}=\lambda^2 r$　⑤

对 ② 求导得　$\ddot{\theta}=\frac{\mu\dot{\theta}}{r}-\frac{\mu\theta}{r^2}\dot{r}=\mu\theta\left(\frac{u}{r}+\lambda\right)$　⑥

将 ①②⑤⑥ 代入 ③④ 得

$$a_{\parallel}=\lambda^2 r-\frac{\mu^2\theta^2}{r}$$

$$a_{\perp}=\mu\theta\left(\lambda+\frac{\mu}{r}\right)$$

1-7 试自 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 出发，计算 $\ddot{x}$ 及 $\ddot{y}$。并由此推出径向加速度 a_r 及横向加速度 a_θ。

解题过程　对 $x=r\cos\theta$ 求导得：$\dot{x}=\dot{r}\cos\theta-r\sin\theta\cdot\dot{\theta}$　①

再对 ① 求导得：

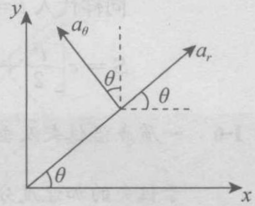
$\ddot{x}=\ddot{r}\cos\theta-2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta-r\ddot{\theta}\sin\theta-r\dot{\theta}^2\cos\theta$　②

对 $y=r\sin\theta$ 求导得：$\dot{y}=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta$　③

再对 ③ 求导得：

$\ddot{y}=\ddot{r}\sin\theta+\alpha\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta+r\ddot{\theta}\cos\theta-r\dot{\theta}^2\sin\theta$　④

设质点的径向加速度 a_r 和横向加速度 a_θ 在直角坐标系中的方位如解题 1-7 图所示，则



解题 1-7 图

$$\begin{cases}\ddot{x} = a_r\cos\theta - a_\theta\sin\theta \\ \ddot{y} = a_r\sin\theta + a_\theta\cos\theta\end{cases}$$

对上式中 $\ddot{x}$ 两端重 $\cos\theta$，$\ddot{y}$ 两端重 $\sin\theta$ 得

$$\begin{cases}\ddot{x}\cos\theta = a_r\cos^2\theta - a_\theta\sin\theta\cos\theta \quad ⑤ \\ \ddot{y}\sin\theta = a_r\sin^2\theta + a_\theta\sin\theta\cos\theta \quad ⑥\end{cases}$$

⑤＋⑥ 得 $\quad a_r = \ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta \quad$ ⑦

②④⑦ 联立得 $\quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$，此为径向加速度。

同理，对前面 $\ddot{x}$ 两端同时重 $\sin\theta$，$\ddot{y}$ 两端同时重 $\cos\theta$ 得

$$\begin{cases}\ddot{x}\sin\theta = a_r\sin\theta\cos\theta - a_\theta\sin^2\theta \quad ⑧ \\ \ddot{y}\cos\theta = a_r\sin\theta\cos\theta + a_\theta\cos^2\theta \quad ⑨\end{cases}$$

⑨－⑧ 得 $\quad a_\theta = \ddot{y}\cos\theta - \ddot{x}\sin\theta \quad$ ⑩

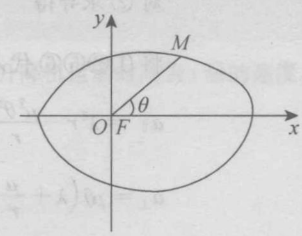
②④⑩ 联立得 $\quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$，此为横向加速度。

1-8 直线 FM 在一给定的椭圆平面内以匀角速 ω 绕其焦点 F 转动。求此直线与椭圆的交点 M 的速度。已知以焦点为坐标原点的椭圆的极坐标方程为

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

式中 a 为椭圆的半长轴，e 为偏心率，都是常数。

解题过程 建立以 B 为原点的平面直角坐标系，如解题 1-8 图所示，



解题 1-8 图

则我们可以得到 M 点的坐标为 $\begin{cases}x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\end{cases}$

由 M 点的坐标可以得到 M 点的速度为 $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$

对 x,y 两式分别求导得

$$\begin{cases}\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\end{cases}$$

将 $\dot{x},\dot{y}$ 代入，可得 M 点的速度为

$$v^2 = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2 = \dot{r}^2 + r^2w^2$$

上式中只有 $\dot{r}$ 是未知量，对 $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ 求导得

$\dot{r} = \dfrac{e\sin\theta w}{a(1-e^2)}r^2$（式中 $\dot{\theta}$ 且 w 代替）

由 $r=\dfrac{a(1-\mathrm{e}^2)}{1+\mathrm{e}\cos\theta}$ 求得 $\cos\theta=\dfrac{a(1-\mathrm{e}^2)-r}{r\mathrm{e}}$

所以 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\dfrac{a^2(1-\mathrm{e}^2)^2+r^2-2ar(1-\mathrm{e}^2)}{r^2\mathrm{e}^2}$

所以 $\dot{r}^2=\dfrac{\mathrm{e}^2w^2r^4}{a^2(1-\mathrm{e}^2)^2}\left[1-\dfrac{a^2(1-\mathrm{e}^2)^2+r^2-2ar(1-\mathrm{e}^2)}{r^2\mathrm{e}^2}\right]$

将 $\dot{r}^2$ 代入 $v^2=\dot{r}^2+r^2w^2$

得 $v^2=\dfrac{\mathrm{e}^2w^2r^4}{a^2(1-\mathrm{e}^2)^2}\left[1-\dfrac{a^2(1-\mathrm{e}^2)^2+r^2-2ar(1-\mathrm{e}^2)}{r^2\mathrm{e}^2}\right]+r^2w^2$

$$=\frac{r^2w^2}{a^2(1-\mathrm{e}^2)^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^2r^2-r^2+2ar(1-\mathrm{e}^2)}{1-\mathrm{e}^2}$$

$$=\frac{r^2w^2}{b^2}(2a-r)r$$

其中 $b^2=(1-\mathrm{e}^2)a^2$，b 为椭圆半矩轴。

所以直线与椭圆的交点 M 的速度为：

$$v=\frac{rw}{b}\sqrt{r(2a-r)}$$

1-9 质点做平面运动，其速率保持为常数。试证其速度矢量 v 与加速度矢量 a 正交。

证　明　设质点的速度表达式为 $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}$，$\theta$ 为位矢与 x 轴正向的夹角，质点的加速度 a 为速度 v 对时间 t 的导数

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+v_x\frac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+v_y\frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}-v_y\dot{\theta}\right)\vec{i}+\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+v_x\dot{\theta}\right)\vec{j}$$

要证明 $\vec{v}$ 与 $\vec{a}$ 正交，则只需证明 $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$

$$\vec{v}\cdot\vec{a}=(v_xi+v_yj)\left[\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}-v_y\dot{\theta}\right)i+\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+v_x\dot{\theta}\right)j\right]$$

$$=v_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}+v_y\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

又因为速率保持不变，所以 $v_x^2+v_y^2=c$（c 为常数）

对上式两边求导得 $2v_x\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}+2v_y\cdot\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=0$

所以 $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$

所以速度矢量 $\vec{v}$ 和加速度矢量 $\vec{a}$ 正交，此题得证。

1-10 一质点沿着抛物线 $y^2=2px$ 运动。其切向加速度的量值为法向加速度量值的 $-2k$ 倍。如此质点从正焦弦 $\left(\dfrac{p}{2},p\right)$ 的一端以速度 u 出发，试求其达到正焦弦另一端时的速率。