全国特级教师会编学习指南

高中数学

王连笑　李必成　张济华
张祖望　周沛耕　郝昌盛
谢在举　戴洪祥

全册在手　名师指点
过"关"斩"将"一举夺冠

天津人民出版社

（津）新登字001号

全国特级教师会编学习指南

高 中 数 学

王连笑　李必成　张济华　张祖望
司沛耕　郗昌盛　谢在皋　戴宏祥　著

*

天津人民出版社出版

（天津市赤峰道130号）

河北省永清印刷厂印刷　新华书店天津发行所发行

*

787×1092毫米 32开本 10.75印张 289千字

1992年8月第1版　　1992年8月第1次印刷

印数：1—26，300

ISBN 7—201—01088—3G·474

定价：4.55元

编 者 的 话

优秀的教师是我国教育事业的宝贵财富，他们具有坚实的知识基础，精到的业务专长和丰富的教学经验，从而在教学过程中培育了一批又一批杰出人才。特级教师是优秀教师中的突出部分。但目前我国特级教师为数甚少，分布很不普遍。有鉴于此，我社组织全国部分特级教师编写了这套“全国特级教师会编学习指南”，以让全国广大勤于上进的同学，都能领受这些名师的启迪与指点，从而使自己的学习成绩更上一层楼。

本丛书是我国十二个省、市四、五十位特级教师通力合作的结果，也是其多年从事教学工作的心血结晶，在体例与编写方法上，与同类读物相比有很大不同。丛书各册不是对教材知识进行系统归纳与全面讲解，即知识搬家，而是只抓住教学内容中的重点和疑、难点进行典型剖析，讲出掌握的方法及要诀，并通过例题加以说明。本书各节均包括高考试题举例、小结和精要检测三部分。高考试题举例精选具有典型性和代表性的最新高考试题（题后括号内注明了考题的使用时间和地区），并给出分析与解答，着重在共性问题的剖析与题目意义的引伸、推广，解开“扣子”，点拨思路，小结是对各节涉及内容中重点、疑点、难点带有规律性和实用性的总结，不求详尽，但求精到，一语中的，使之融会贯通，以收举一反三之功效。从而提高学生运用所学知识分析问

题、解决问题的实际能力，以裨从根本上领会和掌握这些重点和疑、难点，使学习成绩和实际水平有一个全面的升华。

本丛书在组织编写过程中，得到了包括天津市著名特级教师陈冬生先生在内的许多同志的无私帮助。还有些特级教师虽因种种原因未能参加这一工作，但也给予了我们宝贵支持。在此，谨向这些同志表示真诚的感谢。

我们囿于见闻和条件，此次未能邀请全国所有特级教师来参加这一工作，为此深感遗憾！在全国范围内组织如此众多的特级教师编写一套丛书，目前尚属首次。由于能力所限，不足之处在所难免，敬祈批评指正。我社衷心希望全国广大师生，包括尚未参加这一工作的特级教师和其他优秀教师，继续关心和支持我们的工作，为提高全国普教质量共同努力！

参加本书编写的有（以姓氏笔画为序）：王连笑（天津市，第十四章）、李必成（福州市，第二、三章）、张济华（天津市，第一、六章）、张祖望（苏州市，第四、五章）、周沛耕（北京市，第七、十一章）、郗昌盛(天津市，第九、十章)、谢在皋（长春市，第八章)、戴宏祥（天津市，第十二、十三章）八位特级教师。王连笑、张济华、郗昌盛、戴宏祥老师参与了本书编写纲目的讨论，王连笑老师承担了样稿的拟定工作，张济华老师承担了全书的统稿工作，在此一并致谢。

天津人民出版社

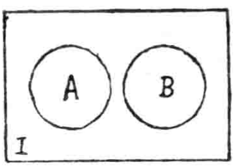
1992年3月

目　录

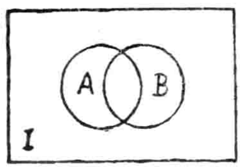
第一章　幂函数、指数函数和对数函数

§1. 集合之间的关系

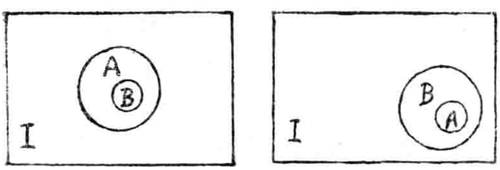
集合之间的关系既抽象，又复杂，因此，在解有关问题时首先应进行概念形象化分析，使问题明朗化，问题就很容易解决了。例如，任意两个非空集合A与B，它们之间的相互关系可以形象的分成以下四种情形：



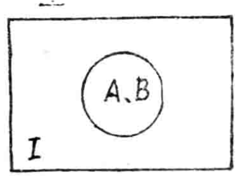
相　离



相　交



相互包含



相　等

要特别注意符号$A \neq B$，$A \not\subseteq B$，$A \cap B \neq \phi$的真正的含意和它所包括的各种情形。

【高考试题举例】

【例1】设S、T是两个非空集合，且$S\nsubseteq T$，$T\nsubseteq S$，令$X=S\cap T$，那么$S\cup X$等于（　　）。

（A）X。（B）T。（C）ϕ。（D）S.

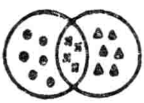
（1987，全国理工）

（分析与解答）此题首先应当弄清满足条件$S\nsubseteq T$，$T\nsubseteq S$的S、T的相互关系，它们只可能是相离或相交。而对于这两种情形，由$X=S\cap T$得知：$X\subset S$。至此，可以很清楚的得到$S\cap X=S$，所以答案是（D）。

【例2】已知集合A和集合B各含有12个元素，$A\cap B$含有4个元素，试求同时满足下面两个条件的集合C的个数：（i）$C\subset A\cup B$，且C中含有3个元素，（ii）$C\cap A\neq\phi$（ϕ表示空集）。

（1986，全国理工）

（分析与解答）此题应首先对集合A和集合B按照题设条件进行形象化分析如下：其后再考虑同时满足（i）和（ii）两条件的集合C的个数。满足（i）的集合C的三个元素必须属于$A\cup B$，而同时满足（ii）的集合C的三个元素中必须有A的元素。用排列与组合的法则即可用下述两种方法得出：



（1）$C_{12}^{2}\cdot C_{3}^{2}+C_{12}^{2}\cdot C_{8}^{1}+C_{12}^{3}=1084$（个）。

（2）$C_{20}^{3}-C_{8}^{3}=1084$（个）。

【例3】设全集为R，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x\mid f(x)\neq 0\}$，$N=\{x\mid g(x)\neq 0\}$，那么集合$\{x\mid f(x)\cdot g(x)=0\}$等于（　　）。

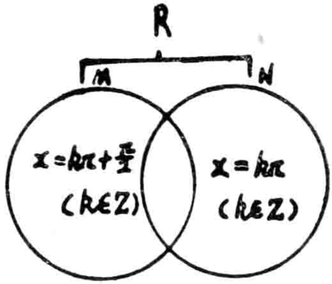
（A）$\overline{M}\cap\overline{N}$（$B$）$\overline{M}\cup N$（$C$）$M\cup\overline{N}$（$D$）$\overline{M}\cup\overline{N}$

（1991，全国理工）

（分析与解答）此题首先应对集合M和N之间的关系进行形象化分析如下：

由此图可清楚地看出，$\overline{M}=\{x\mid x=k\pi,\ (k\in Z)\}$中的元素和$\overline{N}=\{x\mid x=k\pi+\frac{\pi}{2},\ (k\in Z)\}$中的元素都属于集合$\{x\mid f(x)g(x)=0\}$，所以集合$\{x\mid f(x)g(x)=0\}=\overline{M}\cup\overline{N}$

（也就是$\overline{M \cap N}$），故此题的答案应是（D）。



【例4】 设a，b是两个实数，$A=\{(x,\ y)\mid x=n,\ y=na+b,\ n\text{是整数}\}$，$B=\{(x,\ y)\mid x=m,\ y=3m^2+15,\ m\text{是整数}\}$，$C=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$，是平面$XOY$内的点集合。讨论是否存在$a$和b使得（1）$A\cap B\neq\phi$（$\phi$表示空集）；（2）$(a,\ b)\in C$同时成立。

（1985，全国理工）

（分析与解答） 此题由于题目的性质，应采用探究法。假定实数a和b使条件（1）、（2）同时成立；由（1）知A和B的相互关系只可能是相交，故必存在整数n，由$A\cap B=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ \begin{cases}y=na+b\\ y=3n^2+15,\end{cases}\ n\text{是整数}\right\}$，

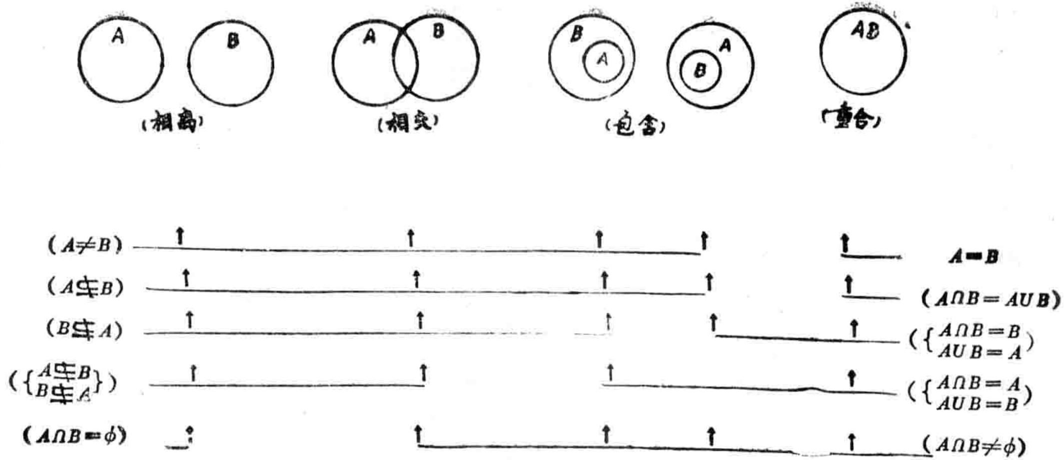
得$b=3n^2+15-na$；由(2)必有$a^2+b^2\leqslant 144$，即$a^2+(3n^2+15-na)^2\leqslant 144$，整理可得关于$a$的二次不等式$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0$，它的判别式$\triangle=4n^2(3n^2+15)^2-4(1+n^2)[(3n^2+15)^2-144]=-36(n^2-3)^2$，$\because n$是整数，$n^2-3\neq 0$，$\therefore\triangle<0$而$1+n^2>0$，故知二次不等式不可能有实数解$a$。这说明同时使(1)、(2)成立的实数$a$和b不存在。

【小结】

（1）对于任意两个非空集合A，B的相互关系，可以形象的展示如下页：

（2）恰当的应用以下几个基本关系式：

$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$；$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$；$A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A$，$A\cup B=B$；$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$A\cup\overline{A}=I$；$A\cap\overline{A}=\phi$。


A
B
(相离)
A
B
(相交)
B
A
B
A
(包含)
AB
(重合)
$(A \neq B)$
$(A \nsubseteq B)$
$(B \nsubseteq A)$
$\left(\left\{\begin{matrix} A \nsubseteq B \\ B \nsubseteq A \end{matrix}\right\}\right)$
$(A \cap B = \phi)$
$A = B$
$(A \cap B = A \cup B)$
$\left(\left\{\begin{matrix} A \cap B = B \\ A \cup B = A \end{matrix}\right.\right)$
$\left(\left\{\begin{matrix} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{matrix}\right.\right)$
$(A \cap B \neq \phi)$

（3）关于点集：

若$A=\{(x, y)|f(x, y)=0\}$，$B=\{(x, y)|g(x, y)=0\}$

则$A\cap B=\left\{(x, y)\left|\begin{cases}f(x, y)=0\\g(x, y)=0\end{cases}\right.\right\}$，

$A\cup B=\{(x, y)|f(x, y)\cdot g(x, y)=0\}$

【精要检测】

1．已知$A=\{a, b\}$，$B=\{x|x\subseteq A\}$，试确定A与B的关系，并写出B的元素。

2．设A，B是两个非空集合，全集是I，有$A\subseteq I$，$B\subseteq I$且$A\nsubseteq B$，$B\nsubseteq A$

（1）令$X=A\cap B$，$Y=A\cup B$，求$\overline{X\cap Y}$，$X\cup Y$，$\overline{X}$，$\overline{Y}$；

（2）若$A\cap B\subseteq\overline{A}$，求$A\cap B$。

3．设$A_1=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，$A_2=\{1, 4, 7, 10\}$，$A_3=\{x|2x^2-17x+35\geqslant0$且$x\in Z\}$，若$X\neq\phi$，$X\cap A_1=\phi$且$X\cap A_2=X$，求$X\cap A_3$。

4．设全集$I=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$，且$A\cap B=\{2, 8, 14\}$，$\overline{A}\cap B=\{10, 12\}$，$\overline{A\cup B}=\{6\}$，求$A$和$B$。

5．设全集$I=\{a, b, c, d, e\}$．知$A\subseteq I$，$B\subseteq I$，求满足条件$A\cap B=\{a, b\}$的集合A和B的组数。

6．设全集$I=\{(x, y)|x, y\in R\}$集合$M=\left\{(x, y)\left|\frac{y-3}{x-2}=1\right.\right\}$，$N=\{(x, y)|y\neq x+1\}$，那么$\overline{M\cup N}$等于（　　）。

（A）ϕ　（B）$\{(2, 3)\}$　（C）$(2, 3)$　（D）$\{(x, y)|y=x+1\}$

7．设$A=\{(x, y)|x+ay=1\}$，$B=\{(x, y)|ax+y=1\}$，$C=\{(x, y)|x^2+y^2=1\}$

求：（1）当a为何值时集合$(A\cup B)\cap C$的元素个数为2？写出这个集合；

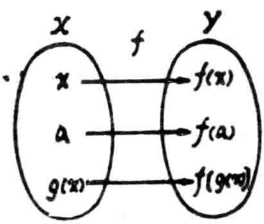
（2）当a为何值时集合$(A\cup B)\cap C$的元素个数为3？写出这个集合。

8. 设$A=\{(x, y) \mid y=x^2-2x+2\}$，$B=\{(x, y) \mid y=-x^2 2x+\frac{1}{2}\}$，$C=\{(x, y) \mid y=ax+b\}$，试问当$a$，b 为何整数时使得$(A \cup B) \cap C=\phi$成立？

§2. 函数的记号、定义域和值域

关于函数的记号是指反映函数的映衬的对应法则，它和函数的定义域和值域构成函数的三大要素。有关函数对应法则的问题，常常是在$f(x)$与$f[g(x)]$之间展开的，在此时，应当明确地把握住自变量x(或$g(x)$)与函数值$f(x)$（或$f[g(x)]$)之间的对应法则f，如图：

定义域



值域

图12

在这种理解下，就不致步入歧途。

关于函数的定义域有三种基本模式，即$f(x)=\frac{1}{x}$，$x \in(-\infty, 0) \cup(0, +\infty)$；$f(x)=\sqrt{x}$，$x \in(0, +\infty)$；$f(x)=\lg x$，$x \in(0, +\infty)$。在综合问题求解时，要充分利用不等式组，以利无误地得到解答。关于求函数的值域问题，在中学阶段没有一般的方法，只有依据函数的对应规律，把握住函数值域的概念，运用不同的数学手段来求得其解。而解决函数值域问题（包括解决求函数最值问题)的最基本、最可靠的方法是作出函数的图象。

【高考试题举例】

【例1】 设函数$f(x)$的定义域是$[0, 1]$，求函数$f(x^2)$的定义域。 （1985，全国理工）

（分析与解答） 此题中两函数$f(x)$与$f(x^2)$具有同一的对应过程f，从这个角度我们可以认为，在$f(x^2)$中的x^2就相当于在$f(x)$中的x，所以我们得到不等式$0 \leqslant x^2 \leqslant 1$，由$x^2 \leqslant 1$即$x^2-1 \leqslant 0$得

$-1\leqslant x\leqslant 1$，所以我们得到函数$f(x^2)$的定义域是$[-1, 1]$。

【例2】已知 $f(x)=8+2x-x^2$，如果 $g(x)=f(2-x^2)$，那么 $g(x)$（　　）。

（A）在区间（-2，0）上是增函数

（B）在区间（0，2）上是增函数

（C）在区间（-1，0）上是减函数

（D）在区间（0，1）上是减函数

（1989，全国理工）

（分析与解答）此题$f(x)$与$g(x)$有同一的对应过程f，所以得 $g(x)=8+2(2-x^2)-(2-x^2)^2=8+2x^2-x^4$，对于判定$g(x)$在各个指定区间上的增减性最基本、最可靠的方法是用定义（这里不赘述），判定知$g(x)$在（-1，0）上是减函数，所以答案应是（C）。

【例3】求函数$y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$的定义域。

（1985，全国文史）

（分析与解答）此题由上述求函数定义域的基本模式，可列出不等式组为

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$$

在这里要强调：充分利用不等式组，就是明确所求函数的定义域是所列每一个不等式的解集的交集。

得到
$$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x\neq 1\end{cases}$$

求不等式组的解，最好用下面形式去求：

得$-2\leqslant x<1$或$1<x\leqslant 2$，

所以所求函数的定义域为：$\{x\mid -2\leqslant x<1\}\cup\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$。

【例4】函数$y=\dfrac{\sin x}{|\sin x|}+\dfrac{|\cos x|}{\cos x}$

$+\frac{tgx}{|tgx|}+\frac{|ctgx|}{ctgx}$的值域是（　　）。

（A）$\{-2, 4\}$（B）$\{-2, 0, 4\}$（C）$\{-2, 0, 2, 4\}$

（D）$\{-4, -2, 0, 4\}$　　　　　　　　（1990，全国理工）

（分析与解答）此题由函数的结构可知每一个分式函数其值不是1就是－1。根据三角函数的符号规律，依次在各象限内分别进行讨论，知在第一象限内$y=4$，在第二象限内$y=-2$，在第三象限内$y=0$，在第四象限内$y=-2$，因此函数y的值域为$\{-2, 0, 4\}$，故答案为（B）。

【小结】

1．有关函数的记号问题，大体可有两种形式：第一，已知函数$f(x)$的定义域是M，求出数$f[g(x)]$的定义域。此类问题着眼于函数对应法则f，由$g(x)\in M$，便可得到x的取值范围，即是函数$f[g(x)]$的定义域。

第二，已知$f[g(x)]=h(x)$，求$f[\phi(x)]$。此类问题，应将（x）化为用$g(x)$表示的表达式，从而明确的显示出f的对对应关系，在$f[g(x)]$的表达式中，以$\phi(x)$代$g(x)$即可得到$f[\phi(x)]$。

2．求函数的定义域问题，要正确运用三个基本模式：①$y=\frac{1}{x}$，$x\in(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$；②$y=\sqrt{x}$，$x\in(0, +\infty)$；③$y=\lg x$，$x\in(0, +\infty)$。对于较复杂的函数，要充分利用不等式组，运用划线法求解。

3．求函数的值域问题，是用初等手段较难加以一般性解决的问题，可以分类总结方法。例如，型如$y=\frac{ax+b}{cx+d}$的函数可用反函数法求解。而最可靠、最直接、最迅速的方法是根据函数的规律作出它的图象。

【精要检测】

1．已知$f(x-1)=x^2-4x$，求$f(x+1)$。

2. 已知函数$y=f(x)$的定义域为(0, 1)，求函数$y=f(2^x-1)$的定义域。(0, 1)

3. 求函数$y=\log_2(1+2x-3x^2)$的定义域。$(-\frac{1}{3},$

4. 求函数$y=\log_a(\log_a x)$，($y>0$)的定义域。

5. 求函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^x-k\beta^x}}$，($\alpha$，$\beta$，$k$均为正数)的定义域。

6. 求函数$y=\dfrac{\sqrt{x^2-5x-6}}{\lg(2x-1)}+\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$的定义域。

7. 求函数$y=\dfrac{3-2x}{3x+5}$的值域。

8. 求函数$y=\dfrac{3}{x^2}+2x^2-1$的值域，并作出函数的图象。

§3. 重视反函数的概念

反函数的概念是一个重要概念，它建立在对函数概念的正确掌握和对映射概念的正确理解的基础上。要特别注意总结反函数的求法以及函数与反函数在定义域和值域方面的交换关系，及函数与反函数的图象关于直线$y=x$的对称性。

【高考试题举例】

【例1】 函数$y=\dfrac{x-2}{2x-1}\left(x\in R,\ 且x\neq\dfrac{1}{2}\right)$的反函数是(　　)。

(A) $y=\dfrac{x-2}{2x-1}\left(x\in R,\ 且x\neq\dfrac{1}{2}\right)$

(B) $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$ ($x\in R$，且$x\neq2$)

(C) $y=\dfrac{x+2}{2x-1}\left(x\in R,\ 且x\neq\dfrac{1}{2}\right)$

(D) $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ ($x\in R$，且$x\neq-2$)　　(1988，全国文史)

(分析与解答) 此题是比较简单的求反函数的试题，同学们可能很容易地得到(A)是正确的。但是，做对了并不一定完全正确地理

解解题过程，在此我们进行一次分析。同学们大都这样求解：

由$y=\dfrac{x-2}{2x-1}$，可得 $(2x-1)y=x-2$。

$$\text{得 } (2y-1)x=y-2, \qquad ①$$

$$\text{得} x=\frac{y-2}{2y-1}, \qquad ②$$

写成习惯式 $y=\dfrac{x-2}{2x-1}\left(x\neq\dfrac{1}{2}\right)$，因而选（$A$）。

上面的解法对不对？你是否就是这样解这道题的？请同学先不要看下面的叙述，再回过头来检查一遍。

事实上在这样解的过程中是有问题应当考虑的。很明显，当从①式推导到②式是需要用$2y-1$去除式子两边，那么我们不禁要问，$2y-1$是否不等于零?这是必须要考虑的，在这里要判定$2y-1$不等于零，还需要用下述的反证法：

假设$2y-1=0$，即 $y=\dfrac{1}{2}$，由已知

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{x-2}{2x-1}$得$2x-1=2x-4$，此式显然不能成立，因而 $2y-1\neq0$，经过这一番推证，我们才能够对①式两边同除以$2y-1$，才会有②式，才能有结果(A)。

如果说，上面指出的思维上的破绽在解选择题时被掩盖了，那么在解综合题时就可能暴露无遗。请看下面的完全类似的题目。

【例2】给定实数a，$a\neq0$，且$a\neq1$，设函数

$$y=\frac{x-1}{ax-1}\left(x\in R,\text{且 } x\neq\frac{1}{a}\right)$$

证明：（1）经过这个函数图象上任意两个不同的点的直线不平行于x轴；

（2）这个函数的图象关于直线$y=x$成轴对称图形。

（1988，全国理工）