

物理学

上册

难题集萃

舒幼生 胡望雨 陈秉乾 编著

力学 热学 电磁学
近代物理学

物理学

难题集萃

上册

舒幼生 胡望雨 陈秉乾 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是一部具有资料保存价值的巨著,在内容结构上,包含了大量的难题;在题目的难度和广度上,加进了从某些科研项目简化出来的题目;在解题分析上,编者不仅用准确、精炼的物理语言揭示了难题的难点所在,对关键步骤作了细致的分析,而且提供了不少独辟蹊径的解题方法.若非编者长期从事物理教学及研究工作,并全身心投入国际物理奥林匹克竞赛及国内各种物理竞赛工作,是难以编成本书的.

本书分上、下两册,本分册为上册,内容包括力学、热学和电磁学.

本书可供各类高等学校物理专业师生使用,对国内外研究生考试有参考价值,也可作为中学各级物理竞赛的培训资料,以及中学物理教师的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

物理学难题集萃.上册/舒幼生,胡望雨,陈秉乾编著. —合肥:中国科学技术大学出版社, 2014. 8

ISBN 978-7-312-03461-9

I. 物… II. ①舒…②胡…③陈… III. 物理学—习题集 IV. O4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 171679 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
<http://press.ustc.edu.cn>
印刷 合肥市宏基印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 43
字数 1100 千
版次 2014 年 8 月第 1 版
印次 2014 年 8 月第 1 次印刷
印数 1—5000 册
定价 86.00 元

前 言

解题是物理教学中的一个重要环节. 它对于正确地、深入地理解基本内容, 培养分析问题和解决问题的能力, 以及从中汲取广博的实际知识等等, 具有不可替代的重要作用. 索末菲曾经写信告诫他的学生海森堡: “要勤奋地去做练习, 只有这样, 你才会发现, 哪些你理解了, 哪些你还没有理解.” 杨振宁回忆他的大学生活时说过: “西南联大教学风气是非常认真的, 我们那时所念的课, 一般老师准备得很好, 学生习题做得很多.” 因而, 编制、收集、选用各种题目特别是难题, 并借此有效地提高学生的解题能力, 已经成为广大师生瞩目的课题.

北京大学物理系普通物理教研室从 1952 年建立以来, 走过了 60 多年漫长的教学历程. 长期的教学实践, 各种类型考试、竞赛的命题工作, 特别是 30 余年来承担的参加国际中学生物理奥林匹克 (IPhO) 的中国队的培训、选拔和参赛任务, 使我们积累了大量的资料和经验. 应各方面的强烈呼吁, 1993 年 6 月, 我们编纂的《物理学难题集萃(附基本题, 附详解)》(以下简称《原书》) 由高等教育出版社出版. 《原书》精选普通物理难题 358 题, 基本题 285 题, 全书共 643 题, 约百万字. 出版后, 受到广泛欢迎, 近万册书很快销售一空. 1997 年, 我们重新编纂出版了《物理学难题集萃(增订本)》(以下简称《增订本》). 《增订本》删除了《原书》中的基本题, 保留了《原书》中的难题, 并作了大量增补. 另外, 还精选了我们在培训、选拔参加 IPhO 中国队工作中编制的各种试题, 作为《增订本》的最后部分, 公诸于世. 《增订本》中的难题仍大体按普通物理课程定位, 共 668 题, 都有详细的分析和解答. 《增订本》再次获得了广大读者的普遍认可, 早已售罄. 应中国科学技术大学出版社之邀, 我们欣然决定对《增订本》进行重版. 此次重版, 书名仍用《物理学难题集萃》, 我们仅替换了少量题目, 最大的变化是将原厚达 1300 多页的书分成了上、下两册, 更方便读者阅读.

为了帮助读者更好地使用本书, 下面谈谈我们在编纂过程中的一些基本想法和意图.

本书以“难题集萃”为名, 显然, 如何精选题目是编者面临的第一个关键问题.

我们的做法是: 首先, 从内容上说, 尽力确保类型齐全, 新颖先进, 实用有效. 为此, 我们整理并保留了一批传统的普物难题, 又从近年国内、外各种考试和竞赛中大量汲取了颇具新意的各类普物难题, 其中还包括我们自己编制的各类普物难题. 我们希望帮助读者了解各类普物难题大致可能深入和伸展到什么范围, 涉及什么内容. 我们希望勾画出各类普物难题演变和发展的历史轨迹. 同时, 还特别注意普物与后继课程之间的“结合部”即俗称“三不管”的内容, 以及运用普通物理的原理和高等数学的工具可能解决的具有典型意义的各种理论问题和实际问题. 相信本书提供的丰富资料会大大拓宽读者的视野.

值得指出的是, 在本书中, 我们并不是单纯地引用收罗到的各类普物难题, 而是经过分析和提炼, 力图把握住各类普物难题的核心, 编纂成一系列题意简单明确而内涵丰富的题目. 相信这将有助于读者登堂入室, 逐步懂得难题的奥秘. 体会到编者用心的教师, 可取本书所列难题为素材, 加工出适合各种用途的高层次难题; 学生若也能有所体会, 则表明其驾驭难题的能力已经大大提高了.

其次,题目的难易固然主要表现为物理内容和所需数学手段的深浅、繁简,但同时也在提问角度的变化,综合、类比、联想能力的考验,以及能否正确地解决各种具体问题,等等.有鉴于此,我们不仅在内容上力求类型齐全,而且力图使读者能够接触到具有不同风格、形式、提问角度,乃至叙述方式的各类典型普物难题.

有了好的题目,怎样充分地加以利用,以便有效地提高学生的解题能力呢?这是编者面临的第二个关键问题.

我们认为,所谓解题,无非是分析、表达和演算.所谓分析,是指对具体问题的定性物理分析,即分析涉及的现象和过程,分析在各种条件下可能出现的结果或变化,以及导致这些结果或变化的物理原因.通过分析,才能建立起物理现象或过程的正确物理图像,把复杂的问题分解成各个相互联系的局部,判定各个局部的性质和特点,明确需要寻找的关系,把握住解题的关键.然后,在正确运用基本规律的基础上理出解题的线索,确定解题的步骤.所谓表达,是指对物理内容的数学表述,即赋予各种条件、要求和关系以确切的数学形式.所谓演算,不言自明,是数学工具的运用,应该准确、快捷和规范化.定性的物理分析,恰当的数学表述和准确的定量演算是不可分割的,解题的成功正在于三者的完美结合.其中,我们想特别强调对题目的分析,因为它是表达和演算的根据,只有在分析基础上的解题才是自觉的、主动的和透彻的,才能避免盲目性和随意性.重在分析,务求透彻,讲究质量,并持之以恒,确有举一反三、触类旁通之功效,这是培养和提高解题能力的关键.本书每题在求解之前都先作分析,目的正在于此.

应该指出,我们从理论上把解题概括为分析、表达、演算三个环节,决不是试图树立某种新的教条或模式,而是力图根除乱套公式、片面追求数量、不求甚解的弊病.不仅如此,从某种意义上讲,实际的理论研究工作也都离不开提出问题、分析、表达、演算等环节.因此,通过解题,自觉地培养和提高定性物理分析的能力,积累和总结数学表达的经验,掌握熟练准确地运用各种数学工具的本事,或许正是解题的本意.当然,解题能力的提高决不是孤立的事情,而是教学质量和学生水平的综合反映.另外,解题也只是培养物理人才的一个方面,过分夸大亦非所宜.

我们这一代从20世纪五六十年代开始任教的教师都已先后退休,新一代的精英已经或即将登台执教,因而在新老交替之际,总结经验,积累资料,培训师资,继往开来,适应时代发展的需要,已经成为当务之急.就习题而言,目前,各类普物习题集并不少见,但以精选难题并附详细分析、求解为内容的书籍并不多见,本书试图弥补这一空缺,从这方面给年轻教师以切实的帮助,同时,也是对我们自己在这方面工作的回顾和纪念.

蔡伯濂教授拨冗审阅《增订本》全书,谨此致谢.

本书适合于各类高校讲授、学习普通物理的师生,中学物理教师,以及有志于各类物理竞赛的大、中学生使用和参考.

编者

2014年夏于北京大学

目 录

前言	(i)
----------	-------

第一部分 力学

第一章 运动学	(2)
第二章 牛顿运动定律	(24)
第三章 功、能和动量	(57)
第四章 角动量、有心运动	(116)
第五章 静力平衡	(146)
第六章 刚体动力学	(163)
第七章 振动与波动	(215)

第二部分 热学

第一章 平衡态、理想气体状态方程	(300)
第二章 热力学第一、第二定律	(316)
第三章 气体动理论	(355)
第四章 范德瓦耳斯气体、液体、固体、相变	(405)

第三部分 电磁学

第一章 静电场、导体介质	(430)
第二章 磁场、磁介质	(499)
第三章 电磁感应	(548)
第四章 电流、直流电路	(582)
第五章 交流电路、暂态过程及其他	(640)

≡ 力 学 ≡

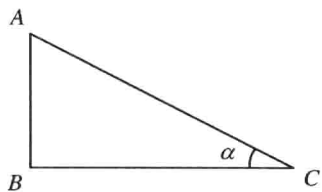
力学是研究物体运动规律的一门科学。它包括静力学、运动学和动力学三个部分。静力学研究物体在力的作用下保持平衡的条件；运动学研究物体运动的规律；动力学研究物体运动的原因。力学是物理学的基础，也是工程技术的基石。

力学是研究物体运动规律的一门科学。它包括静力学、运动学和动力学三个部分。静力学研究物体在力的作用下保持平衡的条件；运动学研究物体运动的规律；动力学研究物体运动的原因。力学是物理学的基础，也是工程技术的基石。

力学是研究物体运动规律的一门科学。它包括静力学、运动学和动力学三个部分。静力学研究物体在力的作用下保持平衡的条件；运动学研究物体运动的规律；动力学研究物体运动的原因。力学是物理学的基础，也是工程技术的基石。

第一章 运 动 学

【题 1】 如力图 1.1.1 所示, 直角三角形 ABC 在铅垂平面内, 斜边 AC 与水平边 BC 的夹角为 α , 一质点从 A 点由静止出发, 在重力作用下到达 C 点. 当所循路径为从 A 经 AB 和 BC 时, 从 A 到 B 需时 t_1 , 从 B 到 C 需时 t_2 ; 当所循路径为 AC 时, 需时 t_3 , 假定质点拐折时不花费时间, 且只改变速度方向而速度大小不变.



力图 1.1.1

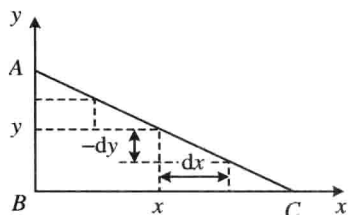
1. 为使循上述两条路径由 A 到 C 所需时间相等, 即使 $t_1 + t_2 = t_3$, 试问: 角 α 应为多大?

2. 设角 α 取上述值, 且质点只能在三角形范围内沿竖直线段和水平路径从 A 点到达 C 点, 显然有无穷多种选择. 试问: 什么路径花费的时间最多? 什么路径花费的时间最少?

所需的最长时间与最短时间之比是多少?

【分析】 质点在 AB 段和 AC 段均做匀加速直线运动, 前者的加速度为 g , 后者的加速度为 $g \sin \alpha$, 在 BC 段做匀速直线运动. 运用运动学公式可找到各段所需时间之间的关系, 再根据 $t_1 + t_2 = t_3$ 的要求即可确定相应的特定角度 α .

如力图 1.1.2 所示, 符合题意的路径除了 AC 路径外, 还有由许多水平段以及把各水平段连接起来的各竖直段所构成的各种路径. 符合题意的各种路径中, 各竖直段长度之和等于直角边 AB , 各水平段长度之和等于直角边 BC , 由于质点拐折时不花费时间且速度大小也不改变, 故走完各竖直段所需的总时间 $t_{\text{总}}$ 就等于直接从 A 经 AB 到达 B 所需的时间 t_1 . 但走完各水平段所需的总时间与质点在各水平段的速度大小有关, 即与各水平段的高度有关. 如果选择的路径, 使各水平段均位于三角形的底部 (即 BC 边), 则质点在该水平段具有的速度最大, 所需时间就最短. 反之, 如果选择的路径, 使各水平段位于尽可能高的位置 (当然, 以不超出边线 AC 为条件), 则质点在各该水平段具有的速度最小, 所需时间应最长. 所以, 需时最长的路径为力图 1.1.2 中虚线所示的锯齿状路径, 各锯齿的水平段 dx 和竖直段 dy 均为无穷小量, 各锯齿紧靠着 AC 而又都不超出 AC 边. 确定了需时最短和最长的路径, 求出相应的最短和最长时间, 即可得出两者之比.



力图 1.1.2

【解】 1. 设 $AC = L$, 由运动学公式, 有

$$L \sin \alpha = \frac{1}{2} g t_1^2 \quad (1)$$

$$L \cos \alpha = g t_1 t_2 \quad (2)$$

$$L = \frac{1}{2}(g \sin \alpha) t_3^2 \quad (3)$$

由式(1)、式(2),得

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L \sin \alpha}{g}}, \quad t_2 = \cos \alpha \sqrt{\frac{L}{2g \sin \alpha}} \quad (4)$$

故

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{L}{g}} \left(\sqrt{2 \sin \alpha} + \cos \alpha \sqrt{\frac{1}{2 \sin \alpha}} \right) \quad (5)$$

把式(3)代入式(5),得

$$t_1 + t_2 = t_3 \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha \right)$$

由题意,要求

$$t_1 + t_2 = t_3 \quad (6)$$

故应有

$$\sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha = 1$$

即

$$2 \sin \alpha + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 2$$

解出

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{或} \quad \cot \alpha = \frac{4}{3}$$

所以

$$\alpha = 36.8^\circ$$

2. 根据上述分析,需时最短的路径为由 A 点经 AB 和 BC 到达 C 点,或由 A 点经 AC 到达 C 点.需时最长的路径为力图 1.1.2 中虚线所示的锯齿状路径,各锯齿的水平段 dx 和竖直线段 dy 均为无穷小量,且紧靠着 AC 而又都不超过 AC 边.

对于需时最短的路径,所需时间为 $t_{\min} = t_1 + t_2$.由式(4)及第 1 问的答案可得

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{2} \cot \alpha = \frac{2}{3}$$

故

$$t_{\min} = t_1 + \frac{2}{3} t_1 = \frac{5}{3} t_1$$

对于需时最长的路径,所有竖直段所需总时间 $t_{\text{总}} = t_1$,所有水平段所需总时间用 τ_2 表示,则需时为 $t_{\max} = t_1 + \tau_2$.为了计算 τ_2 ,考虑高度为 y 的任一水平段 dx ,质点以速度 v 经过 dx 所需时间为

$$d\tau_2 = \frac{dx}{v} = \frac{dx}{\sqrt{2g(L \sin \alpha - y)}}$$

因 $\cot \alpha = -\frac{dx}{dy}$,故

$$d\tau_2 = -\frac{\cot \alpha}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{L \sin \alpha - y}}$$

所有水平段所需总时间为

$$\tau_2 = \int d\tau_2 = -\frac{\cot \alpha}{\sqrt{2g}} \int_{L \sin \alpha}^0 \frac{dy}{\sqrt{L \sin \alpha - y}} = \cot \alpha \sqrt{\frac{2L \sin \alpha}{g}} = t_1 \cot \alpha = \frac{4}{3} t_1$$

所以

$$t_{\max} = t_1 + \tau_2 = \left(1 + \frac{4}{3}\right) t_1 = \frac{7}{3} t_1$$

t_{\max} 与 t_{\min} 之比为

$$\frac{t_{\max}}{t_{\min}} = \frac{7}{5}$$

【题 2】 一质点以初速度 v_0 做直线运动, 所受阻力与其速度成正比. 试求当质点速度减为 v_0/n ($n > 1$) 时, 质点经过的距离与质点所能行经的总距离之比.

【分析】 由题设, 质点的加速度 $a = dv/dt = -kv$, 积分可得出 $v(t)$, 再积分可得出 $x(t)$, 积分常数由初始条件 $t=0$ 时 $v=v_0, x=0$ 确定. 上述 $v(t)$ 和 $x(t)$ 是 t 时刻质点的速度和位置, $x(t)$ 即经 t 时间后质点经过的距离. 总距离 x_m 是 $t \rightarrow \infty$ 时的 x 值, 速度减为 $v_1 = v_0/n$ 时所经距离 $x(t_1)$ 则可由速度从 v_0 减为 v_1 所需的时间 t_1 求出.

【解】 质点沿直线运动, 取该直线为 x 坐标, 取原点 $x=0$ 为质点在 $t=0$ 时刻以初速度 v_0 开始运动的位置.

由题设, 在任意时刻 t , 质点的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv$$

式中: k 是常数. 分离变量, 得

$$\frac{dv}{v} = -k dt$$

积分, 得

$$\ln v = -kt + C \quad (1)$$

式中: C 为积分常量. 初始条件为

$$t = 0 \text{ 时, } v = v_0$$

故

$$C = \ln v_0$$

代入式(1), 得

$$v = v_0 e^{-kt} \quad (2)$$

可见质点的速度 v 随时间 t 按指数衰减, 如力图 1.2.1 所示.

由

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}$$

积分, 得

$$x = v_0 \int e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + C' \quad (3)$$

初始条件为

$$t = 0 \text{ 时, } x = 0$$

故积分常量为

$$C' = \frac{v_0}{k}$$

代入式(3),得

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) = x_m(1 - e^{-kt}) \quad (4)$$

这是质点行经的距离 x 随时间 t 的变化关系,式中 $x_m = v_0/k$ 是 $t \rightarrow \infty$ 时的 x 值,即为质点所经过的总距离,如力图 1.2.1 所示.

设经 t_1 时间后,质点的速度减为 $v_1 = v_0/n$,由式(2),得

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{n} = e^{-kt_1}$$

取对数,得

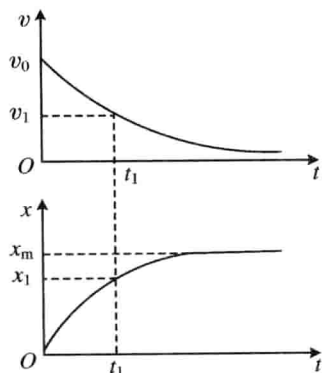
$$t_1 = \frac{\ln n}{k} \quad (5)$$

由式(4)、式(5),当质点速度减为 $v_1 = v_0/n$ 时所经距离 x_1 与质点所经过的总距离 x_m 之比为

$$\frac{x_1}{x_m} = 1 - e^{-kt_1} = 1 - e^{-\ln n} = 1 - \frac{1}{n}$$

因此,在任一时刻 t ,质点的位置 x 与速度 v 遵循以下规律:

$$\frac{v}{v_0} + \frac{x}{x_m} = 1$$



力图 1.2.1

【题 3】 一质点以初速度 v_0 做直线运动,所受阻力与其速度的三次方成正比.试求质点速度和位置随时间的变化规律以及速度随位置的变化规律.

【分析】 与上题相仿,从 $a = dv/dt = -kv^3$ 出发,通过积分可得 $v(t)$ 和 $x(t)$,消去 t 即可得出 $v(x)$, $v(x)$ 也可直接通过积分求得.

【解】 取质点运动所循的直线为 x 轴,取坐标原点 $x=0$ 为质点在 $t=0$ 时刻以初速度 v_0 开始运动的位置.由题设,质点的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^3 \quad \text{或} \quad \frac{dv}{v^3} = -k dt$$

积分,得

$$\frac{1}{2v^2} = kt + C \quad \text{或} \quad \frac{1}{v^2} = 2kt + C' \quad (1)$$

初始条件为

$$t = 0 \text{ 时, } v = v_0$$

故积分常量

$$C' = \frac{1}{v_0^2}$$

代入式(1),得

$$v(t) = v_0 \left(\frac{1}{1 + 2kv_0^2 t} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

因 $v = dx/dt$,故

$$dx = v_0 \left(\frac{1}{1 + 2kv_0^2 t} \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

积分,得

$$x = \frac{1}{kv_0} \sqrt{1 + 2kv_0^2 t} + C \quad (3)$$

初始条件为

$$t = 0 \text{ 时, } x = 0$$

故积分常量

$$C = -\frac{1}{kv_0}$$

代入式(3),得

$$x(t) = \frac{1}{kv_0}(\sqrt{1+2kv_0^2 t} - 1) \quad (4)$$

由式(2)、式(4),消去 t ,得

$$v(x) = \frac{v_0}{1+kv_0 x} \quad (5)$$

又,因

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad \text{及} \quad a = \frac{dv}{dt} = -kv^3$$

故

$$v \frac{dv}{dx} = -kv^3 \quad \text{或} \quad \frac{dv}{v^2} = -k dx$$

积分,得

$$-\frac{1}{v} = -kx + C \quad (6)$$

初始条件为

$$t = 0 \text{ 时, } v = v_0, \quad x = 0$$

故积分常量

$$C = -\frac{1}{v_0}$$

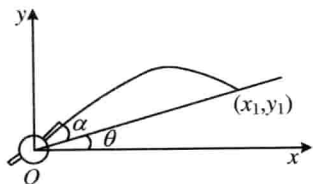
代入式(6),得

$$\frac{1}{v} = kx + \frac{1}{v_0} = \frac{1+kv_0 x}{v_0} \quad \text{或} \quad v(x) = \frac{v_0}{1+kv_0 x}$$

此即式(5).

【题4】 如力图 1.4.1 所示,在倾角为 θ 的山坡平面上有一门大炮,大炮相对于山坡的仰角为 α ,发射炮弹的初速为 v_0 .试求炮弹着点的位置,并求能达到最大射程的仰角(忽略空气阻力).

【分析】 炮弹射出后,只受重力作用,水平方向的运动是匀速直线运动,竖直方向的运动是匀加速直线运动,由此不难求出炮弹的轨迹方程 $y(x)$,它和山坡的轨迹方程 $y = x \tan \theta$ (直线)联立求解得出的 (x_1, y_1) 就是炮弹着点的位置.显然, x_1 (或 y_1) 将随仰角 α 变化,最大射程相应的仰角可由极值条件 $dx_1/d\alpha = 0$ (或 $dy_1/d\alpha = 0$) 求出.也可由 x_1 (或 y_1) 的表达式给出射程的表达式,由后者得出最大射程相应的仰角.



力图 1.4.1

【解】 如力图 1.4.1 所示,取直角坐标 Oxy ,原点 O 在大炮处, $t = 0$ 时刻发射炮弹,于是炮弹的初始位置、初速度和加速度分别为

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ v_{0x} = v_0 \cos(\theta + \alpha) \\ v_{0y} = v_0 \sin(\theta + \alpha) \\ a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

炮弹的运动方程为

$$\begin{cases} x = tv_0 \cos(\theta + \alpha) \\ y = tv_0 \sin(\theta + \alpha) - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

消去时间 t , 得出炮弹的轨迹方程为

$$y = x \tan(\theta + \alpha) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta + \alpha)} x^2 \quad (1)$$

山坡的轨迹方程为

$$y = x \tan \theta \quad (2)$$

式(1)、式(2)联立求解, 得出炮弹着点的位置为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{v_0^2}{g} [\sin 2(\theta + \alpha) - 2 \tan \theta \cos^2(\theta + \alpha)] \\ y_1 = \frac{v_0^2}{g} [\sin 2(\theta + \alpha) - 2 \tan \theta \cos^2(\theta + \alpha)] \tan \theta \end{cases} \quad (3)$$

最大射程相应的仰角应满足的条件是

$$\frac{dx_1}{d\alpha} = 0$$

即

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\alpha} &= \frac{v_0^2}{g} [2 \cos 2(\theta + \alpha) + 4 \tan \theta \cos(\theta + \alpha) \sin(\theta + \alpha)] \\ &= \frac{2v_0^2}{g} [\cos 2(\theta + \alpha) + \tan \theta \sin 2(\theta + \alpha)] = 0 \end{aligned}$$

整理得

$$\tan \theta = -\cot 2(\theta + \alpha) \quad \text{即} \quad \cot 2(\theta + \alpha) = -\tan \theta = \cot\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

也即

$$2(\theta + \alpha) = \theta + \frac{\pi}{2}$$

故达到最大射程的仰角为

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

又, 由式(3)得出射程 R 的公式为

$$\begin{aligned} R &= \frac{x_1}{\cos \theta} = \frac{v_0^2}{g \cos \theta} [\sin 2(\theta + \alpha) - 2 \tan \theta \cos^2(\theta + \alpha)] \\ &= \frac{2v_0^2}{g \cos \theta} [\tan(\theta + \alpha) - \tan \theta] \cos^2(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

$$= \frac{2v_0^2}{g \cos \theta} \cdot \frac{\cos(\theta + \alpha) \sin \alpha}{\cos \theta} = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \theta} [\sin(\theta + 2\alpha) - \sin \theta]$$

当

$$\theta + 2\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \text{即} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

时,达到最大射程,为

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \theta} (1 - \sin \theta)$$

【题 5】 两质点在地面上同一地点以相同速率 v_0 从不同抛射角抛出. 试证明: 当两质点的射程 R 相同时, 它们在空中飞行时间的乘积为 $2R/g$. 忽略空气阻力.

【分析】 由质点斜抛运动的轨迹方程 $y(x)$ 及落地点 P 的纵坐标 $y=0$, 联立求解可得出射程公式, 进而得出飞行时间公式. 显然, 射程 R 和飞行时间 t 都会随初速率 v_0 以及抛射角 α 变化. 现在, 两质点的抛射角 α_1, α_2 不同, 而射程相同, 均为 R , 这要求 α_1 和 α_2 满足一定的关系. 把这一关系代入飞行时间公式, 当可证明 $t_1 t_2 = 2R/g$.

【解】 取坐标如力图 1.5.1 所示, 当质点从 O 点以初速率 v_0 和抛射角 α 抛出时, 有

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

消去时间 t , 得出斜抛运动的轨迹方程为

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (1)$$

落地点 P 的纵坐标为零, 即

$$y = 0 \quad (2)$$

由式(1)、式(2)联立解出的 x 即为射程 R , 可得

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

相应的飞行时间为

$$t = \frac{R}{v_0 \cos \alpha} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

现两质点从同一地点 O 以相同初速率 v_0 抛出, 抛射角不同, 分别为 α_1 和 α_2 , 但射程相同, 故有

$$\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2 \quad (3)$$

式(3)的一个解是 $\alpha_1 = \alpha_2$, 不合题意, 舍去. 另一解为

$$2\alpha_1 = \pi - 2\alpha_2, \quad \text{即} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

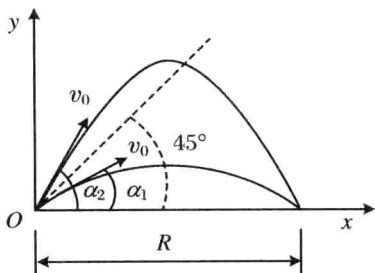
若 $\alpha_1 < \pi/4$, 则 $\alpha_2 > \pi/4$, 故

$$\alpha_2 - \frac{\pi}{4} = -\alpha_1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \alpha_1$$

因此, 为使射程相同, 两质点的抛射方向与 45° 方向所夹的角度应相等.

两质点飞行时间的乘积为

$$t_1 t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha_1}{g} \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha_2}{g} = \frac{4v_0^2}{g^2} \sin \alpha_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) = \frac{2v_0^2}{g^2} \sin 2\alpha_1 = \frac{2R}{g}$$



力图 1.5.1

【题6】 如力图 1.6.1 所示,位于地面的水枪与一竖直墙的垂直距离为 $d = 3.0 \text{ m}$,墙高 $h = 4.0 \text{ m}$.从水枪喷出初速恒定的水流,为使水流刚好能越过墙顶,试问:水流从枪口喷出的初速 v_0 的最小值以及水枪的仰角 α 各为多少?忽略空气阻力,重力加速度 g 取 10 m/s^2 .

【分析】 喷出的水流的轨迹为抛物线,轨迹方程是已知的,其中包含初速 v_0 和仰角 α 两个参量.水流刚好能越过墙顶,是指该抛物线应通过墙的顶点(注意,并不意味着墙高等于射高),将墙顶点的坐标代入轨迹方程,可得出满足此要求的 v_0 的表达式.从此式可看出 v_0 达最小值时,仰角 α 必须满足的条件,从而求得 v_0 的最小值以及相应的仰角 α .

【解】 取平面直角坐标 Oxy 如力图 1.6.1 所示,取水枪枪口为原点 O ,取水平方向为 x 轴,竖直方向为 y 轴,则水流的抛物线轨迹方程为

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (1)$$

要求该抛物线通过墙顶,墙的顶点的坐标为

$$x = d, \quad y = h \quad (2)$$

由式(1)、式(2),得

$$h = d \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} d^2 \quad (3)$$

因

$$\tan \theta = \frac{h}{d}$$

式(3)可改写为

$$\tan \alpha - \tan \theta = \frac{gd}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

利用三角公式

$$\tan \alpha - \tan \theta = \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\cos \alpha \cos \theta}$$

得

$$v_0^2 = \frac{gd}{2\cos^2 \alpha (\tan \alpha - \tan \theta)} = \frac{gd \cos \theta}{2\cos \alpha \sin(\alpha - \theta)} \quad (4)$$

式(4)的分母可简化为

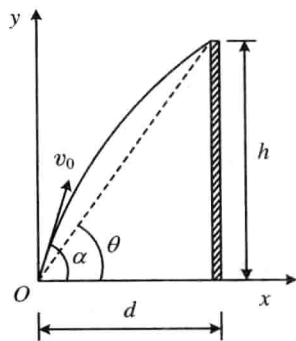
$$\begin{aligned} 2\cos \alpha \sin(\alpha - \theta) &= 2\cos \alpha \sin \alpha \cos \theta - 2\cos^2 \alpha \sin \theta = \sin 2\alpha \cos \theta - \cos 2\alpha \sin \theta - \sin \theta \\ &= \sin(2\alpha - \theta) - \sin \theta \end{aligned}$$

所以

$$v_0^2 = \frac{gd \cos \theta}{\sin(2\alpha - \theta) - \sin \theta} = \frac{gd^2}{\sqrt{d^2 + h^2} \sin(2\alpha - \theta) - h} \quad (5)$$

式(5)就是为使水流刚好越过墙顶,水流的初速 v_0 以及水枪的仰角 α 应满足的关系,可见 v_0 是随 α 变化的.当 α 满足 $2\alpha - \theta = 90^\circ$ 时,有

$$\sin(2\alpha - \theta) = 1$$



力图 1.6.1

v_0 为最小值. 故最小初速应满足

$$v_0^2 = \frac{gd^2}{\sqrt{d^2 + h^2} - h} = g(\sqrt{d^2 + h^2} + h)$$

代入有关数据, 得

$$v_0 = 9.5 \text{ m/s}$$

使 v_0 为最小值的仰角 α 为

$$\alpha = \frac{1}{2}(90^\circ + \theta) = 45^\circ + \frac{1}{2} \arctan \frac{h}{d} = 45^\circ + \frac{1}{2} \arctan \frac{4}{3} = 71.6^\circ$$

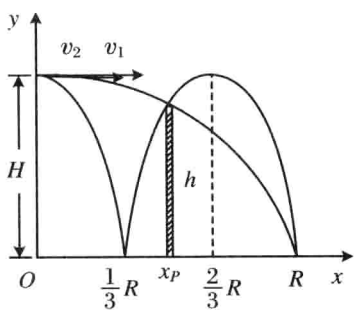
【题 7】 如力图 1.7.1 所示, 球 1 和球 2 均从同一点水平抛出, 起抛点离水平地面的高度为 H . 两球的水平初速分别为 v_1 和 v_2 ($v_1 > v_2$). 球 1 抛出后刚好能越过位于 x_P 处的竖直杆的顶端, 并落于地面上的 R 点, R 点与 O 点的距离为 R . 球 2 抛出后落于地面, 与地面做弹性碰撞, 反弹后也刚好越过杆顶, 并落在同一点 R . 试求:

1. 比值 v_1/v_2 ;
2. 杆的位置 x_P ;
3. 杆的高度 h .

【分析】 小球做平抛运动的轨迹方程为

$$y = H - \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

式中: v_0 为水平初速, H 为起抛点的高度. 球 1 抛出后, 刚好越过杆顶, 并直接落在 R 点, 其抛物线轨迹应包括起抛点、杆顶和 R 点, 如力图 1.7.1 所示. 球 2 抛出后, 第一次落地, 经反



力图 1.7.1

弹后刚好越过杆顶, 第二次落在地面 R 点. 由于球 2 与地面做弹性碰撞, 无机械能损失, 反弹后速度的水平分量和射高不变, 所以球 2 反弹前后的抛物线轨迹是类似的. 由此可以断定, 球 2 第一次落地点位于 $x = R/3$ 处, 反弹后在 $x = 2R/3$ 处达到与地面相距 H 的最高点, 第二次落地点位于 $x = R$ 处, 如力图 1.7.1 所示. 球 2 的抛物线轨迹应包括起抛点、反弹点(第一次落地点)、杆顶和第二次落地点. 写出两球的轨迹方程, 将落地点坐标代入, 即可求得初速之比 v_1/v_2 . 写出球 2 反弹后的轨迹方程, 并与球 1 的轨迹方程联立, 可以解得两轨迹交点(即杆顶)的坐标, 于是杆

的位置 x_P 和高度 h 可求.

【解】 1. 取平面直角坐标 Oxy 如力图 1.7.1 所示, 由平抛运动的轨迹方程, 球 1 的轨迹方程及球 2 的轨迹方程(抛出后、反弹前)分别为

$$y_1 = H - \frac{g}{2v_1^2}x^2, \quad y_2 = H - \frac{g}{2v_2^2}x^2$$

球 1 落地点坐标为

$$x = R, \quad y = 0$$

球 2 落地点(第一次落地点即反弹点)坐标为

$$x = \frac{R}{3}, \quad y = 0$$

代入各自的轨迹方程,得

$$0 = H - \frac{g}{2v_1^2}R^2 \quad (1)$$

$$0 = H - \frac{g}{2v_2^2}\left(\frac{R}{3}\right)^2 \quad (2)$$

由式(1)、式(2),得

$$\frac{v_1}{v_2} = 3$$

即球1的水平初速 v_1 应为球2水平初速 v_2 的3倍.

2. 球2反弹后的轨迹最高点移到了 $x = 2R/3$ 处,故球2反弹后的轨迹方程可表为

$$y_2 = H - \frac{g}{2v_2^2}x'^2$$

式中

$$x' = x - \frac{2}{3}R$$

代入,得

$$y_2 = H - \frac{g}{2v_2^2}\left(x - \frac{2}{3}R\right)^2$$

把球2反弹后的轨迹方程与球1的轨迹方程联立,求两轨迹的交点.交点的 x 坐标满足

$$H - \frac{g}{2v_1^2}x^2 = H - \frac{g}{2v_2^2}\left(x - \frac{2}{3}R\right)^2$$

把 $v_1/v_2 = 3$ 代入,得

$$x^2 = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2\left(x - \frac{2}{3}R\right)^2 = 9\left(x - \frac{2}{3}R\right)^2 = (3x - 2R)^2$$

即

$$3x - 2R = \pm x$$

解出

$$x = R \quad \text{或} \quad x = \frac{R}{2}$$

其中 $x = R$ 是两球的公共落地点,与所求杆的位置无关,舍去.故杆的位置为

$$x_p = \frac{R}{2}$$

3. 把杆的位置 $x = R/2$ 代入球1的轨迹方程,可求出杆顶的 y 坐标,此即杆的高度 h ,为

$$h = H - \frac{g}{2v_1^2}\left(\frac{R}{2}\right)^2 \quad (3)$$

球1落地点的坐标为 $x = R, y_1 = 0$,把它代入球1的轨迹方程,得

$$0 = H - \frac{g}{2v_1^2}R^2 \quad (4)$$

由式(4)得出 v_1 与 H, R 的关系为

$$2v_1^2 = \frac{gR^2}{H}$$