◉ 严士健　刘秀芳／编著

北京师范大学现代数学课程教材

测度与概率

Ce Du Yu Gai Lü

北京师范大学出版社

北京师范大学现代数学课程教材

测度与概率

严士健　刘秀芳　著

北京师范大学出版社
北　京

内容简介

本书论述测度论和以测度为基础的概率论的基本知识和方法，包括集及其势、距离空间、测度与概率、可测函数与随机变量、积分与数学期望、乘积测度与独立、 Radon-Nikodym 定理与条件期望、概率极限理论等. 本书的特点是读者不必学习实变函数论而学习测度论；测度论与概率论的基本内容紧密结合而更有利于理解二者的关系及其实质；在本书的基本目标下，尽可能使内容现代化；本书文字通畅、条理清楚、论述严谨、便于学习；每节后都配有较多的不同要求的习题，以便加深对内容的理解和掌握.

本书可以作为有关专业的高年级学生或研究生的测度论（或实变函数论）、概率论或两者的教材或参考书，也可供有关教师和科技工作者参考.

图书在版编目（ CIP ）数据

测度与概率 / 严士健，刘秀芳著. - 北京：北京师范大学出版社，1994.11

ISBN 7-303-03790-X

I. 测 ··· II. ①严 ··· ②刘 ··· III. ①测度论 - 基本知识 ②概率论 - 基本知识 IV. ① O174.12 ② O211.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（ 94 ）第 15129 号

北京师范大学出版社出版发行

（北京新街口外大街 19 号　邮政编码：100875）

出版人：常汝吉

北京师范大学印刷厂印刷　全国新华书店经销

开本：850mm×1 168mm　1/32　印张：13.25　字数：330 千字

2003 年 4 月第 2 版　2003 年 4 月第 1 次印刷

印数：1～3 000 册　定价：16.80 元

前　言

这是一本为统计与概率专业而写作的教材. 考察概率论与数理统计发展过程, 测度论不但已经成为概率论 (特别是随机过程论) 的基础, 而且对于数理统计来说, 很多基本概念和问题, 离开了测度论很难说清楚. 这与 30 年前的情况大不相同, 从发展看, 这种依赖测度论的趋势将在未来的世纪中大大加强. 因此, 我们认为在统计与概率专业中应该学习以测度论为基础的概率论基础. 为此只学经典的实变函数论是不够的, 需要学习测度论. 而在讲授测度论时, 如果充分以经典的“长度”和概率概念为背景, 是可以不必先修实变函数论的. 本书就是在这种认识下编写的, 其目的是希望它能够作为在不先修实变函数论的条件下, 学习测度论基础和以测度论为基础的概率论的教材. 所以我们在测度论的内容之前, 编写了集合、势以及距离空间等内容.

介绍距离空间, 更重要的是由于现代概率论以及某些数理统计的题材更适宜于以距离可测空间上的概率测度为框架. 介绍这方面的必要知识, 可以使测度和概率的一些性质在距离空间的基础上讲授, 以使学生具有更广泛的基础, 便于以后的学习和应用. 当然如果学生在学习本书之前, 已经学习过距离空间的知识, 自然就可以越过这一段或作简单地复习. 这种想法来自一个更广泛的考虑, 即教材要适应学生的水平, 同时也应该适应学科的现代发展. 本书除了将测度与概率尽量建立在距离空间的框架上外, 对于有关的题材也向这方面作了一些努力. 例如, 在书中介绍了 Hausdorff 维数的概念; 证明了完备可分距离空间的无穷维乘积空间上的 Колмогоров 相容性定理等.

实际情况告诉我们: 测度论虽然是概率论理论的必要基础,

但是有时出现学了前者而不能很好地应用于后者的情况. 因此我们认为在统计与概率专业的教学中, 将二者结合讲授是适宜的. 这种看法也许得到概率统计的许多同行的赞同, 因为我们和王隽骧教授合著的《概率论基础》[YWL] 曾经得到广泛的传播. 本书仍然按照这种观点设计. 但是上述著作有其不便之处, 例如费了很多篇幅讲解多维分布的情形, 作为参考材料可以, 作为教材则一些技术细节容易分散学生理解方法的实质的努力. 因此本书在分布函数决定测度、L–S 积分、特征函数等题材上, 讲解一维情形, 但注意方法的一般性. 希望能收到举一反三的效果.

本书虽然是为统计与概率专业而写, 但是如果只采用第一至第五章以及第六、七、八章的前一部分, 也可作为其他专业的测度论或实变函数论课的教材或参考书. 将有关概率的一些概念作为一般测度的具体例子, 也许对学生理解测度论的作用有帮助, 而且还可以扩大学生的知识面.

本书先后在北京师范大学数学系的统计与概率专业试用四次. 栗演兵和张余辉两位先后帮助整理了部分笔记, 录入软盘, 指出错误. 对此我们表示深深的感谢. 我们还要感谢那些对讲课提出意见的同学, 他们的意见使得本书有可能更加适用; 感谢潘淑琴、何青和韩丽娟对编辑工作的指导. 最后我们要特别提出, 没有北京师范大学原自然科学处, 出版委员会和出版社的支持和慷慨资助, 本书将难以出版. 对此我们表示衷心地感谢!

本次修订对原书的一些错误进行了改正, 感谢张余辉提供了许多修改意见; 感谢吕建生对本书在体例和内容上都做了多处修正.

作 者

2003 年 2 月于

北京师范大学数学系

目录

第一章 集合、映射与势

1.1 集合及其运算

1.1.1 定义 一个给定的 **集合** (或称为 **集**), 是指具有某种性质的事物的全体. 组成集合的每个事物称为该集合的 **元素** (或称为 **元**).

设 A 是一个集合, a 是 A 的元素, 则记作 $a \in A$(读作 "a 属于 A") 或 $A \ni a$(读作 "A 包含 a"). 若 a 不是 A 的元素, 则记成 $a \notin A$.

给出集合时, 一定要有明确的规则用来判定一个事物是否是它的元素. 事实上, 这不算是定义, "元素" 和 "集合" 是不定义的名词, 还有一个不定义的关系 ——"属于". 这些是集合论的公理化问题. 有些拓扑方面的书都设一附录说明, 这里就不再仔细推敲.

一般地, 用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集合, 用小写字母 $a, b, c, \cdots$ 表示元素, 不够用时可加各种足码.

有时用描述法给出集合, 即用 $\{\cdots : \cdots\}$ (或 $\{\cdots \mid \cdots\}$) 表示集合. 括号中 ":" (或 "|") 号之前表示元的记法, 之后表示该集合的元所具有的性质. 例如, 设 $\mathbf{R}$ 为实数集, $\{x : x \in \mathbf{R}, 1 < |x| \leqslant 2\}$ 或 $\{x \in \mathbf{R} : 1 < |x| \leqslant 2\}$ 表示绝对值大于 1 而不超过 2 的全体实数作成的集合. 又例如, 设 $\mathbf{C}$ 表示复数集, $\{x \in \mathbf{C} : 1 < |x| \leqslant 2\}$ 表示模大于 1 而不超过 2 的全体复数.

有时, 用列举法即用 $\{\cdots\}$ 表示集. 括号中 "$\cdots$" 列出了该集合的所有元. 例如: $\{2, 3, 4, 5, 8\}$ 表示由 2, 3, 4, 5, 8 组成的集合, $\{u, v\}$ 表示由 u, v 组成的集合.

若集合 A 的元只有有限多个，则称 A 为 **有限集**, 否则称为 **无限集**. 不含任何元素的集合称为 **空集**, 例如 $\{x \in \mathbf{R} : |x| < 0\}$, $\{x \in \mathbf{R} : x^2 + 1 = 0\}$ 都是空集.

以下用逻辑符号 "$\exists$" 表示存在， "$\forall$" 表示 "对一切" (或 "对任何"). 自然数集 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 通常记为 $\mathbf{N}$, 如果没有特殊声明，本书中的 $\mathbf{N}$ 表示非零的自然数集. 整数集为 $\mathbf{Z}$, 非负整数集为 $\mathbf{Z}_+$.

1.1.2 定义　设 A, B 是两个集合：

(1) 集合 A **包含** 集合 B (记作 $B \subset A$ 或 $A \supset B$) 是指对一切 $x \in B$ 必有 $x \in A$.

(2) 集合 A, B **相等** (记作 $A = B$) 是指：　$A \subset B$ 且 $B \subset A$.

若 $A \subset B$, 则称 A 为 B 的 **子集**; 若还有 $A \neq B$ (即存在 $y \in B$ 使 $y \notin A$), 则称 A 为 B 的 **真子集**, 记作 $A \subsetneq B$. 约定空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

关系 "$\subset$" 具有：

(i) 自反性：对任何集合 $A \subset A$;

(ii) 传递性：若 $A \subset B, B \subset C$, 则 $A \subset C$;

(iii) 反对称性：若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则 $A = B$.

(i), (ii), (iii) 表明集类对关系 "$\subset$" 作成一个偏序集.

1.1.3 定义　(**集合的运算**) 为了以后书写方便，我们采用符号 $A := B$ 表示 A 用 B 定义.

设 A, B 是两个给定的集合，定义

$A \cup B := \{x : x \in A$ 或 $x \in B\}$, 称为 A, B 的 **并集**;

$A \cap B := \{x : x \in A$ 且 $x \in B\}$, 称为 A, B 的 **交集**;

$A \setminus B := \{x : x \in A$ 且 $x \notin B\}$, 称为 A, B 的 **差集**,

当 $B \subset A$ 时， $A \setminus B$ 也称为 B 对 A 的 **余集**; 如果只考虑某固定集合 Ω 的子集时，将 $\Omega \setminus B = \{x \in \Omega : x \notin B\}$ 称为 B 的 **余集**, 记作 B^c.

$A\Delta B=\{x: x\in A$ 且 $x\notin B$, 或 $x\in B$ 且 $x\notin A\}$, 称为 A,B 的 **对称差**. 实际上, $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha:=\{x:\exists\alpha\in I,\text{使}x\in A_\alpha\};$$

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha:=\{x:\forall\alpha\in I,\text{均有}x\in A_\alpha\},$$

其中 I 为一指标集.

例 1 若 $A_n:=(n,n+1]$, $B_n:=(0,n]$, $C_n:=(n,n+1)$, $n=0,1,2,\cdots$, 则

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n=(0,\infty),\quad \bigcup_{n=0}^{\infty}B_n=(0,\infty),\quad \bigcup_{n=0}^{\infty}C_n=(0,\infty)\setminus\mathbf{N}.$$

例 2 若 $A_n:=(0,1+\frac{1}{n})$, $B_n:=(0,1-\frac{1}{n})$, $n=1,2,3,\cdots$, 则

$$\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n=(0,1],\quad \bigcup_{n=0}^{\infty}B_n=(0,1).$$

下列各定理的证明是容易的 (请读者作为习题自证).

1.1.4 定理 集合的交、并运算具有下列性质:

(1) $A\cup A=A,\quad A\cap A=A$; **(幂等性)**

(2) $A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$; **(交换律)**

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$; **(结合律)**

(4) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$. **(分配律)**

1.1.5 定理 集合的差运算具有下列性质:

(1) $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$;

(2) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$;

(3) 若 $A, B \subset \Omega$, 则 $A \setminus B = A \cap B^c$;

(4) 设 Ω 是任意一个集合, $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ 是 Ω 的一族子集, 则有

$$\Omega \setminus (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (\Omega \setminus A_\alpha),$$

$$\Omega \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (\Omega \setminus A_\alpha),$$

这个性质称为 **de Morgan法则**.

1.1.6 定义 设 $\{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ 为一集序列. 称

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} A_n := \{x : x\text{属于}A_n, n \in \mathbf{N}, \text{中的无穷多个}\}$$

为此 **集序列的上极限**. 称

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} A_n := \{x : x\text{不属于}A_n, n \in \mathbf{N}, \text{中的有限多个}\}$$

为此 **集序列的下极限**. 若

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} A_n = \underline{\lim_{n \to \infty}} A_n,$$

则称 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 的极限存在, 而上式中的共同集合称为此 **集序列的极限**, 记作 $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$.

若 $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbf{N}$, 则称 $\{A_n\}_1^\infty$ **单调增**, 记作 $A_n \uparrow$; 若 $A_n \supset A_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$, 则称 $\{A_n\}_1^\infty$ **单调减**, 记作 $A_n \downarrow$. 单调增和单调减集序列统称为 **单调集列**.

1.1.7 定理 设 $\{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ 为任一集序列.

(1) $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^\infty \bigcup\limits_{k=n}^\infty A_k$, $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^\infty \bigcap\limits_{k=n}^\infty A_k$.

(2) 若 $\{A_n\}$ 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 存在, 且

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \begin{cases} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, & 若\{A_n\}单调增, \\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n, & 若\{A_n\}单调减. \end{cases}$$

只需注意:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x : \forall n \in \mathbf{N}, \exists k \geqslant n, 使 x \in A_k\},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x : \exists n \in \mathbf{N}, 使 \forall k \geqslant n, x \in A_k\}.$$

详细证明留作习题.

1.1.8 例 设

$$A_n = \begin{cases} B, & 当n是偶数, \\ C, & 当n是奇数. \end{cases}$$

则由定理 1.1.7 知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = B \cup C, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = B \cap C.$$

1.1.9 定义 设 Ω 是一给定的非空集, $A \subset \Omega$, 则称函数

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

为 A 的 **示性函数**, 有时也记成 χ_A.

对于 Ω 的一切子集来说, I_A 完全刻划 A, I_A 与 A 之间一一对应, 它是联系集合与函数的一个重要工具, 需要熟练掌握并会灵活运用, 它与集合的关系为下述定理所述.

1.1.10 定理 给定非空集合 Ω, 下述集合都是 Ω 的子集, 则 $\forall x\in\Omega$,

(1) $A=\Omega \Longleftrightarrow I_A(x)\equiv 1$;

(2) $A=\varnothing \Longleftrightarrow I_A(x)\equiv 0$;

(3) $A\subset B \Longleftrightarrow I_A(x)\leqslant I_B(x),\forall x\in\Omega$;

(4) $I_{\bigcup\limits_{\alpha\in J}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in J}I_{A_\alpha}(x),\quad I_{\bigcap\limits_{\alpha\in J}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in J}I_{A_\alpha}(x)$;

(5) $I_{\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=\varlimsup\limits_{n\to\infty}I_{A_n}(x),\quad I_{\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=\varliminf\limits_{n\to\infty}I_{A_n}(x)$.

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}I_{A_n}$ 存在 (即 $\forall x\in\Omega$, $\lim\limits_{n\to\infty}I_{A_n}(x)$ 存在), 且 $I_{\lim\limits_{n\to\infty}A_n}=\lim\limits_{n\to\infty}I_{A_n}$.

证明 (1), (2), (3), (4) 留作习题, 我们只证 (5).

$$\begin{aligned}
I_{\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n}(x)&=I_{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k}(x)=\min_{n\geqslant 1}I_{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k}(x)\\
&=\min_{n\geqslant 1}\max_{k\geqslant n}I_{A_k}(x)=\inf_{n\geqslant 1}\sup_{k\geqslant n}I_{A_k}(x)\\
&=\varlimsup_{n\to\infty}I_{A_n}(x),\\
I_{\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n}(x)&=I_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k\geqslant n}A_k}(x)=\max_{n\geqslant 1}\min_{k\geqslant n}I_{A_k}(x)\\
&=\sup_{n\geqslant 1}\inf_{k\geqslant n}I_{A_k}(x)=\varliminf_{n\to\infty}I_{A_n}(x).
\end{aligned}$$

习题 1.1

1. 证明: $(A\cup B)\setminus B=A \Longleftrightarrow A\cap B=\varnothing$.

2. 证明: $(A\setminus B)\cup B=A \Longleftrightarrow B\subset A$.

3. $(A\setminus B)\cup C=A\setminus(B\setminus C)$ 成立的充分必要条件是什么?

4. 证明下述等式:

(1) $A\cap B=A\setminus(A\setminus B)$;

(2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

(3) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

(4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

(5) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$;

(6) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$;

(7) $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$;

(8) $B \cap (\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in I}(B \cap A_\alpha)$;

(9) $B \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in I}(B \cup A_\alpha)$.

5. 下列等式是否成立？若不成立，有怎样的包含关系？

(1) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;

(2) $A \cup (B\Delta C) = (A \cup B)\Delta(A \cup C)$;

(3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

(4) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$.

6. 试化简集合 $(A \cup B^c \cup C^c) \cap (A \cup (B \cup C^c))$.

7. 设 $\{A_n : n = 1, 2, \cdots\}$ 为单调减集序列，则有

$$A_1 = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1})\right),$$

且右端各项互不相交.

8. 设 $\mathcal{R}$ 为 Ω 的一切子集组成的集类，则 $\mathcal{R}$ 对集合的交 (看成乘法)、对称差 (看成加法) 运算作成一个环. Ω 是单位元，$\varnothing$ 是零元.

9. 设 $\{A_n : n = 1, 2, \cdots\}$ 是一集序列，令 $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus (\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k)$, 则 $B_n, n = 1, 2, \cdots$ 两两不交，且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

10. 试证明定理 1.1.7.

11. 试举例说明: $\{A_n : n = 1, 2, \cdots\}$ 不单调, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 存在.

12. 设 $\forall k = 1, 2, \cdots$, 定义

$$A_{2k+1} = [0,\, 2 - \frac{1}{2k+1}],\quad A_{2k} = [0, 1 + \frac{1}{2k}],$$

试求 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$, 和 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

13. 给定非零自然数 m 及 m 个集合 $B_0, \cdots, B_{m-1}$, 设 $A_n = B_k$, 当 m 整除 $n-k$ 时, 试求 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

14. 试证定理 1.1.10 的 (1), (2), (3), (4).

15. 设 $A, B \subset \Omega$, 试将 $I_{A\setminus B}, I_{A^c}, I_{A\Delta B}$ 用 I_A, I_B 表示出来.

1.2 映射与势

1.2.1 定义 **映射** $f : A \mapsto B$ 是指对一切 $x \in A$, 存在惟一的 $y \in B$, 使得 $f(x) = y$. 称 A 为 f 的 **定义域**; 对 $F \subset A$, 称 $f(F) := \{y \in B : \exists x \in F$, 使得 $f(x) = y\}$ 为 F在f 之下的 **象**, 而称 $f(A)$ 为 f 的 **值域**(显然应有 $f(A) \subset B$). 若有 $f(A) = B$, 则称 f 是 **满射**; 若由 $f(x_1) = f(x_2)$ 必得 $x_1 = x_2$, 则称 f 是 **单射**; 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 是 A 到 B 上的 **一一映射**(**双射**).

设 f 是 A 到 B 的映射, g 是 B 到 C 的映射, 则把由等式

$$g \circ f(x) := g(f(x)),\ \forall x \in A,$$

定义的映射 $g \circ f : A \mapsto C$ 称为 g, f 的 **复合映射**.

注意: $g \circ f$ 与 $f \circ g$ 不同, 且在上述情形 $f \circ g$ 未必有定义.

设 $f: A \mapsto B$, 则

$$f^{-1}(\{y\}) := \{x \in A : f(x) = y\}, \quad y \in B;$$

$$f^{-1}(F) := \{x \in A : f(x) \in F\}, \quad F \subset B.$$

且称 $f^{-1}(F)$ 为 F 在 f 之下的 **逆象**.

下面给出象与逆象的一些性质.

设 $A_0, A_1, A_2 \subset A, B_1, B_2 \subset B$.

(1) $A_1 \subset A_2 \longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$;

(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

(3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;

(4) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

(5) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{1}(B_2)$;

(6) $f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0$.

若 f 为 A 到 B 的单射, 则可定义 $f(A)(\subset B)$ 到 A 上的 **逆映射** $f^{-1}: f^{-1}(y) := x, \quad$ 若 $f(x) = y, \forall y \in f(A)$.

注意此时 $f^{-1}(y)$ 与上面的 $f^{-1}(\{y\})$ 的意义不同.

1.2.2 定义 给定集合 A, B 若存在 A 到 B 的一一映射, 则称 A 与 B **对等**, 记作 $A \sim B$.

例 1 $\mathbf{N} \sim 2\mathbf{N} := \{2n : n \in \mathbf{N}\}$.

对等关系 "$\sim$" 满足:

(i) 自反性: 对任何集合 A 有 $A \sim A$;

(ii) 传递性: 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$;

(iii) 对称性: 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$.

因此, 对等关系是一个等价关系. 如果两个集合对等, 称它们具有相同的 **势**. 对等集组成的类中集合的势相同. 集合 A 的势记作 $\bar{\bar{A}}$. 设 $n \in \mathbf{N}$, 则具有 n 个元素的集合作成的类是一个等价类,

这类集合的共同标志是有 n 个元素，因此可以认为此类集合的势为 n. 对于无限集的情形则不同，请看下例.

例 2 $(-1,1)\sim\mathbf{R}$. 取映射 $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$, $x\in(-1,1)$, 则 f 是 (-1, 1) 到 $\mathbf{R}$ 的一一映射.

例 3 (-1, 1]~(-1, 1).

注意到

$$(-1,1]\setminus(\{1-\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\}\cup\{1\})=(-1,1)\setminus\{1-\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\},$$

而

$$\{1-\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\}\cup\{1\}\sim\{1-\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\}.$$

这是因为可取一一映射

$$f:f(1)=0,\ f(1-\frac{1}{n})=1-\frac{1}{n+1},n\geqslant 1.$$

实际上，无限集能和它的真子集对等，而有限集则不行. 有些集合论的专著就是利用这一事实定义有限集和无限集，再用自然数表示有限集的势.

由上述例 2 可以看出：有时很容易从直观上看出是对等的集合，如 (-1, 1] 和 (-1, 1), 但是证明其对等却并不容易. 为此我们证明下面的定理.

1.2.3 定理 (Bernstein) 给定集合 A,B, 若存在 $A_1\subset A$, $B_1\subset B$, 且 $A_1\sim B$, $B_1\sim A$, 则 $A\sim B$.

证明 (i) 首先给出一个事实 (证明留作习题): 设 $\{A_\alpha:\alpha\in I\}$, $\{B_\alpha:\alpha\in I\}$ 是两个集类， $\forall\alpha\in I, A_\alpha\sim B_\alpha$. 且 $A_\alpha,\alpha\in I$ 两两不交， $B_\alpha,\alpha\in I$ 两两不交，则

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\sim\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha.$$