高等职业教育化工技术类专业“十二五”规划教材

化工应用数学

Applied Mathematics in Chemical Engineering

主　编　陶印修　陈　超

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等职业教育化工技术类专业“十二五”规划教材

化工应用数学

Applied Mathematics in Chemical Engineering

主　编　陶印修　陈　超

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书结合高等职业院校化工技术类专业的人才培养目标，按照化工技术类专业对数学基础理论课程的要求编写.

本书注重案例引导教学内容的安排模式，且有关化工方面案例较多. 本书内容包括函数与极限、一元函数微分学及应用、一元函数积分学及应用，每章各节附有训练任务，每章最后附有能力训练项目，由易到难，方便学生巩固所学知识，培养学生自主学习的能力.

本书可作为高职高专院校化工技术类专业教科书，也可作为高等院校其他相关专业的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

化工应用数学/陶印修，陈超主编. —天津：天津大学出版社，2012.8
高等职业教育化工技术类专业"十二五"规划教材
ISBN 978-7-5618-4429-8

Ⅰ. ①化… Ⅱ. ①陶…②陈… Ⅲ. ①化学工业-应用数学 Ⅳ. ①TQ011

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 197432 号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨欢
地　　址	天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话	发行部:022-27403647
网　　址	publish. tju. edu. cn
印　　刷	河北省昌黎县思锐印刷有限责任公司
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	185mm×260mm
印　　张	8.75
字　　数	218 千
版　　次	2012 年 9 月第 1 版
印　　次	2012 年 9 月第 1 次
印　　数	1-3 000
定　　价	25.00 元

前 言

近些年,我国的高等职业教育事业发展迅速,高职高专院校数量占高等院校数量的一半,其中开办化工技术类专业学校的数量和在校生规模都有大幅度的增加.本书就是为了适应高等职业教育快速发展和高等职业教育培养高技能应用型人才的需要,适应高等职业教育大众化发展的趋势,结合高等职业院校化工技术类专业的人才培养目标,在认真总结化工应用数学课程教学改革经验的基础上编写而成.

在本书编写过程中我们努力做到以下几点.

(1)严格按照化工技术类专业对数学基础理论课程的要求编写.

(2)改变了以“学科为导向、知识为目标、教师为主体、逻辑为载体”的传统课堂教学模式,注重案例引导教学内容的安排模式,有关化工方面案例较多.采用以案例引入概念,了解概念并最终回到数学应用的思想,加强对学生的数学应用意识、兴趣及能力培养.培养学生用数学的原理和方法消化吸收专业知识的能力.

(3)缓解课时少与教学内容多的矛盾,恰当把握教学内容的深度和广度,仅涉及一元函数的极限、连续、微分及积分的内容,遵循基础课理论知识以“必需、够用为度”的教学原则,不过分追求理论上的系统性和严密性,尽可能显示微积分的直观性和应用性.

(4)每章最后附有能力训练项目,由易到难,方便学生巩固所学知识,培养学生自主学习的能力.

本书包括函数与极限、一元函数微分学及应用、一元函数积分学及应用三部分,建议学时为56学时.

本书由陶印修、陈超担任主编,王莹、马幼梅担任副主编,赵红、徐云、王军参与编写.本书在编写过程中,得到天津渤海职业技术学院领导和基础教学部领导的大力支持与帮助,是在数学教研室教师们的共同努力下完成的,在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,书中定存不足之处,衷心希望同行及读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善.

编 者

2012年5月

目　　录

第 1 章　函数与极限

微积分是数学的重要分支，是高等数学的核心. 函数与极限则是微积分研究的对象与工具. 本章内容是在中学数学知识的基础上，对函数的概念及性质作进一步阐述，并介绍基本初等函数及初等函数的概念与性质，研究函数的极限及函数的连续性. 这些内容都是学习高等数学课程的重要基础，所涉及的数学思想、方法具有重要的启迪和引导作用.

1.1　函数

函数是数学中最重要的概念之一，是研究各种变量之间关系的重要工具，同时也是高等数学研究的主要对象.

1.1.1　函数的概念

在观察一个现象或一个过程时，往往会遇到几个变量，这些变量不是孤立存在的，而是相互联系、按照一定的规律变化的，这就是下面所要学习的函数.

例 1　半径为 r 的圆，面积 S 与 r 的关系为

$$S = \pi r^2.$$

当半径 r 在 $(0, +\infty)$ 内取定某一值时，由上式可唯一确定面积 S 的值.

例 1 中有两个变量，且变量之间有确定的对应关系. 当一个变量在一定范围内取定一个值后，由这个变量关系就可以得到另一变量所唯一对应的值. 两个变量间的这种关系，称为函数.

1. 函数定义

设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集. 若对于每个 $x \in D$，按照某种对应法则 f，y 总有唯一确定的值与它对应，则称 f 是定义在 D 上的一个**函数**(function). 一般将函数记作 $y=f(x)$（函数符号 $y=f(x)$ 是由德国数学家**莱布尼茨**(1646—1716)在 18 世纪引入的），其中把 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或**函数**.

数集 D 称为函数 $f(x)$ 的**定义域**. 定义域常用区间或集合表示.

当 x 取定 D 中的值 x_0 时，与 x_0 对应的 y 值称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，函数值记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$（记号 $|_{x=a}$ 称为赋值记号，它表示要计算符号左边表达式在 $x=a$ 处的值）.

对应于自变量 $x \in D$ 的函数值的全体，称为函数的**值域**，值域用字母 R 表示，即

$$R = \{y \mid y=f(x), x \in D\}.$$

通常函数有 3 种表示方法：**解析法、表格法、图像法**.

在例 1 这个实际问题中，S 是 r 的函数，其定义域由实际意义来决定，即 D 是 $(0, +\infty)$；而在一般的用解析法表示的函数中，求函数的定义域一般需遵循以下几个原则（下述情况同时在某函数中出现，应取其交集）：

(1) 分式的分母不能为 0；

(2) 偶次根号下的表达式必须大于或等于 0；

(3) 对数的真数必须大于 0；

(4) $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 中的 x 满足 $|x|\leqslant 1$.

根据函数的定义，函数的定义域和对应法则是确定函数的**两个要素**. 两个函数相同就是指这两个函数的定义域和对应法则都相同，与函数中的变量用什么字母表示无关；否则，两个函数不同.

例如，当 $r\in(0,+\infty)$、$x\in(0,+\infty)$ 时，$S=\pi r^2$ 和 $y=\pi x^2$ 表示同一个函数.

例 2 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{\sqrt{3+x}}{9-x^2}$；(2) $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$；(3) $y=\arccos\dfrac{x-1}{2}$；(4) $y=\sqrt{x^3-x^2}$.

解 (1) 由 $\begin{cases}3+x\geqslant 0,\\ 9-x^2\neq 0,\end{cases}$ 得 $-3<x<3$ 或 $3<x<+\infty$，故函数的定义域为 $(-3,3)\cup(3,+\infty)$.

(2) 由 $\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}>0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 得 $x>1$ 或 $x<0$，故函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

(3) 由 $-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1$，得 $-1\leqslant x\leqslant 3$，故函数的定义域为 $[-1,3]$.

(4) 由 $x^3-x^2\geqslant 0$，即 $x^2(x-1)\geqslant 0$，即 $x^2(x-1)>0$ 或 $x^2(x-1)=0$，解得 $x\neq 0$ 且 $x-1>0$ 或 $x=0$ 或 $x=1$，进一步解得 $x>1$ 或 $x=0$ 或 $x=1$，故该函数的定义域为 $\{0\}\cup[1,+\infty)$.

例 3 设 $f(x)=\sqrt{1+x^2}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)(a\neq 0)$.

解 $f(0)=\sqrt{1+0^2}=1$；$f(1)=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2}$；$f(-1)=\sqrt{1+(-1)^2}=\sqrt{2}$；

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{1}{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2}}=\frac{1}{|a|}\sqrt{1+a^2}.$$

例 4 判断下列各组中的两个函数是否相同，为什么？

(1) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 和 $y=x-2$；　　(2) $y=\sin x$ 和 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；

(3) $y=2u+5$ 和 $h=2t+5$；　　(4) $f(x)=\lg x^2$ 和 $g(x)=2\lg x$.

解 (1) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 的定义域为 $x\neq -2$，而 $x-2$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$；因为定义域不同，所以这两个函数不同.

(2) 虽然 $y=\sin x$ 和 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$ 的定义域相同，都是 $\mathbf{R}$，但它们的对应法则不同，$y=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$；因为对应法则不同，所以这两个函数不同.

例如，当 $x=\dfrac{7\pi}{6}$ 时，$y=\sin x$ 的函数值为 $-\dfrac{1}{2}$，而 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$ 的函数值为 $\dfrac{1}{2}$. 可见，两个函数不同.

(3) 虽然表示 $y=2u+5$ 和 $h=2t+5$ 的变量字母不同，但它们的定义域和对应法则都相同. 因此，这两个函数相同.

(4) $f(x)=\lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)=2\lg x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$；因为定义域不同，所以这两个函数不同.

如果将 $f(x)$ 的定义域限制在 $(0,+\infty)$ 内，那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 就是同一个函数.

2. 分段函数

在定义域的不同范围内用不同的解析式表示的函数称为**分段函数**.

例如，绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x\leqslant 0, \end{cases}$ 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0, \end{cases}$

都是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的分段函数，如图 1－1 和图 1－2 所示.

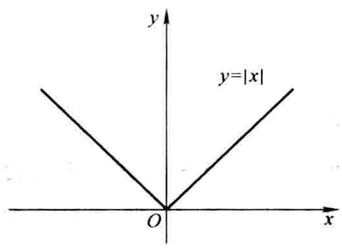


图 1－1

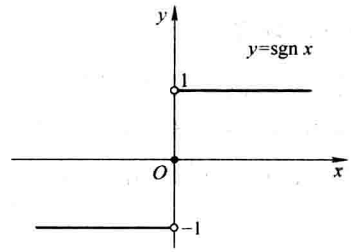


图 1－2

例 5 设分段函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<2, \\ -x+4, & 2\leqslant x<4, \\ x-4, & 4\leqslant x\leqslant 6, \end{cases}$ 确定其定义域，求 $f(1)$，$f(3)$，$f(6)$，并作出其图像.

解 函数的定义域为 $[0,2)\cup[2,4)\cup[4,6]=[0,6]$.

因 $1\in[0,2)$，则 $f(1)=1$；因 $3\in[2,4)$，则 $f(3)=-3+4=1$；因 $6\in[4,6]$，则 $f(6)=6-4=2$.

其图像如图1－3所示.

注意 分段函数是两个或两个以上不同的解析式表示的函数，在其整个定义域内是一个函数，而不是几个函数. 因此，分段函数定义域是各段定义域的并集.

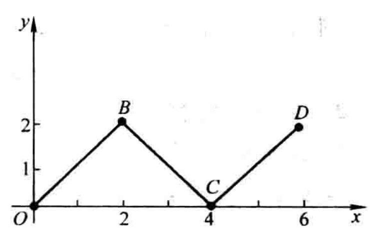


图 1－3

3. 反函数

在例 1 中，圆的面积 S 是半径 r 的函数，且 $S=\pi r^2$，这时对于自变量 $r\in(0,+\infty)$ 内的每一个值，都可以由 $S=\pi r^2$ 计算出面积 S 值.

如果研究相反的问题，由圆的面积计算圆的半径，就应该把面积 S 看成自变量，把半径 r 看成因变量，并且 $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$，$S\in(0,+\infty)$，称 $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ 为函数 $S=\pi r^2$ 的反函数.

一般地，反函数有如下定义.

定义 1 设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R . 若对于 R 中的每一个 y 值，按照某种对应法则 f^{-1}，在 D 中有唯一确定的 x 值与之对应，则称 f^{-1} 为定义在 R 上的以 y 为自变量的函

数，称其为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$ $(y\in R)$，而称 $y=f(x)$ 为**直接函数**（由于微积分中对**原函数**概念有专门的定义，所以不能称 $y=f(x)$ 为原函数）.

习惯上，总用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$（**本义反函数**）通常写成 $y=f^{-1}(x)$ $(x\in R)$，称为**矫形反函数**.

在直角坐标系中，直接函数 $y=f(x)$ 与其矫形反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，而直接函数 $y=f(x)$ 与其本义反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形为同一个.

例 6 求函数 $y=2x+3$ 的反函数.

解 由 $y=2x+3$ 解出 x，得 $x=\frac{1}{2}(y-3)$，将 y 与 x 互换，得 $y=\frac{1}{2}(x-3)$，故函数 $y=2x+3$ 的反函数为 $y=\frac{1}{2}(x-3)$.

利用反函数的定义，可以判断一个函数是否存在反函数.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上没有反函数.

事实上，由 $y=x^2$ 解出 x，得 $x=\pm\sqrt{y}$，其中的 x 不唯一（把 $x=\pm\sqrt{y}$ 称为**多值函数**），故函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上没有反函数. 但是，当 $x\in(-\infty,0]$ 时，$y=x^2$ 有反函数 $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$；当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$y=x^2$ 有反函数 $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$.

要知道，反函数是构造出来的，如对数函数是指数函数的反函数. 反函数的概念提供了构造新函数的第一个方法，反三角函数就是借助反函数的概念从三角函数中构造出来的. 后面讲的函数的单调性对理解反函数会大有帮助.

4. Δ 符号

用记号 Δx 表示自变量从 x_0 到 x 的**增量或改变量**，即 $\Delta x=x-x_0$. 由此可得

$$x=x_0+\Delta x\ .$$

当自变量从 x_0 变到 x 时，因变量从 y_0 变到 y，Δy 为相应的因变量的改变量，则

$$\Delta y=y-y_0=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

例如，函数 $y=f(x)=x^2$，$x_0=2$，$\Delta x=1$，则

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(3)-f(2)=3^2-2^2=5\ .$$

1.1.2 函数的特性

1. 函数的单调性

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义. 若对于区间 (a,b) 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加，(a,b) 称为函数 $y=f(x)$ 的**单调增加区间**；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调减少，(a,b) 称为函数 $y=f(x)$ 的**单调减少区间**.

单调增加函数与单调减少函数统称为**单调函数**.

单调增加区间与单调减少区间统称为**单调区间**.

单调增函数的图像沿 x 轴正向逐渐上升，如图 1－4 所示；单调减函数的图像沿 x 轴正向逐渐下降，如图 1－5 所示.

例 7 证明 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(-1,0)$ 内单调减少.

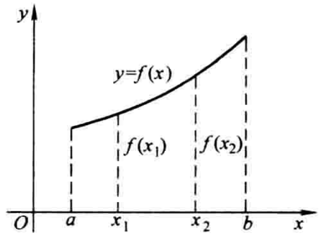


图 1－4

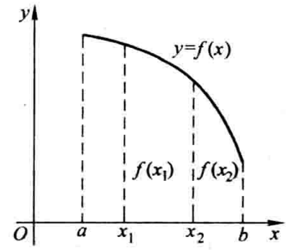


图 1－5

证明 在区间$(-1,0)$内任取两点x_1和x_2,不妨设$x_1<x_2$.

因为$f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0$,所以$f(x_1)>f(x_2)$.

根据函数单调减少的定义可知,$f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(-1,0)$单调减少,单调函数必存在反函数,且反函数的单调性与直接函数的单调性一致.

2. 函数的奇偶性

定义 3 设函数$y=f(x)$的定义域D关于原点对称.

(1)若对于任意的$x\in D$,有$f(-x)=f(x)$,则称$f(x)$为**偶函数**;

(2)若对于任意的$x\in D$,有$f(-x)=-f(x)$,则称$f(x)$为**奇函数**;

(3)若对于任意的$x\in D$,$f(x)$既非奇函数,也非偶函数,则称$f(x)$为**非奇非偶函数**.

不仅可以利用函数的奇偶性定义判定函数的奇偶性,而且可以利用下面讲的奇偶函数的图像特点判定函数的奇偶性(前提是容易知道函数的图像).

奇偶函数的图像特点如下:

(1)偶函数的图像关于y轴对称,如图 1－6(a)所示;

(2)奇函数的图像关于原点对称,如图 1－6(b)所示.

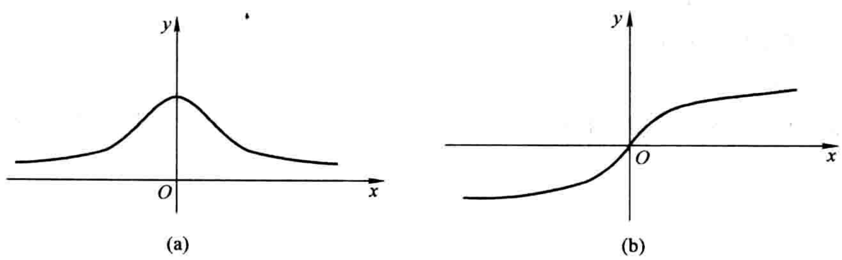


图 1－6

例 8 判断如下函数的奇偶性:

(1)$f(x)=x^2+1$;　　(2)$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;　　(3)$f(x)=3x^3-x+1$.

解 (1) 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,关于原点对称,对任意$x\in(-\infty,+\infty)$,

$$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x),$$

因此$f(x)=x^2+1$是$(-\infty,+\infty)$上的偶函数.

(2)函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,关于原点对称,对任意$x\in(-\infty,+\infty)$,

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-f(x),$$

因此$f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数.

(3)函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,关于原点对称,对任意$x\in(-\infty,+\infty)$,

$$f(-x)=3(-x)^3-(-x)+1=-3x^3+x+1,$$

由于$f(-x)\neq -f(x)$,说明$f(x)$非奇函数,又由于$f(-x)\neq f(x)$,说明$f(x)$非偶函数,因此$f(x)=3x^3-x+1$ 为$(-\infty,+\infty)$上的非奇非偶函数.

3. 函数的有界性

定义 4 设函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,若存在一个正数M,使得对于区间(a,b)内的一切x值,对应的函数值$y=f(x)$都有$|f(x)|\leqslant M$成立,则称函数$y=f(x)$在区间(a,b)内**有界**;若这样的M不存在,则称函数$y=f(x)$在区间(a,b)内**无界**(函数是否有界,不仅与函数有关,而且与给定的区间有关).

有界函数的图像必介于平行于x轴的两条直线$y=\pm M$之间,如图 1-7 所示.

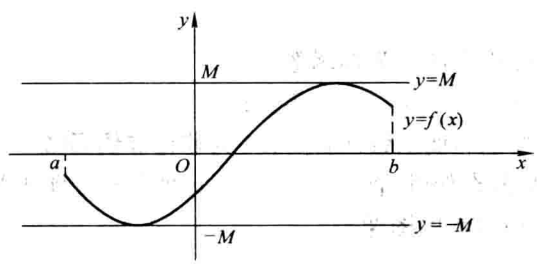


图 1-7

例如,函数$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内有界;函数$y=\log_2 x$在$(0,+\infty)$内无界;函数$y=\frac{1}{x}$在$[1,2]$上有界,而在$(0,1)$内无界.

4. 函数的周期性

定义 5 对于函数$y=f(x)$,若存在一个不为 0 的正数T,使得对于定义域内的一切x,等式$f(x+T)=f(x)$都成立,则称$f(x)$为**周期函数**,且T为函数$f(x)$的周期.

显然,若T是函数$f(x)$的周期,则nT也是函数$f(x)$的周期$(n=\pm1,\pm2,\cdots)$. 通常周期函数的周期指的是**最小正周期**.

例如,$y=\sin x$的周期$T=2\pi$,$y=\tan x$的周期$T=\pi$.

从图像上看,周期为T的函数$y=f(x)$的图像沿x轴相隔T个单位重复一次,如图 1-8 所示.

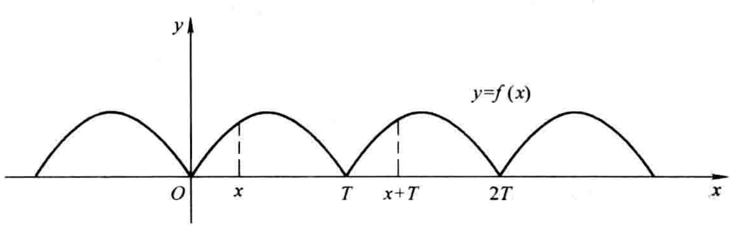


图 1-8

1.1.3 初等函数

1. 基本初等函数

定义 6 把常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这 6 种函数

叫做基本初等函数.

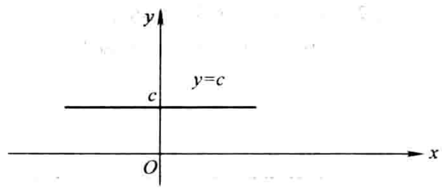
下面表格给出这 6 种函数的函数解析式、图像及主要性质.

1)常数函数

把函数 $y=c$(c 为常数)称为**常数函数**,其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

常数函数的图像、主要性质见表 1-1.

表 1-1

图　　像	主要性质
	1. 偶函数($c=0$ 时也是奇函数) 2. 有界

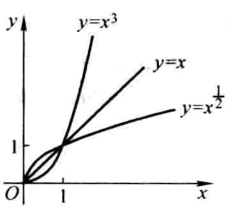
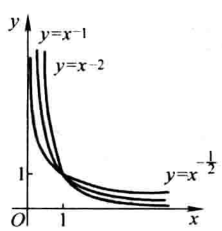
注意　也可以不把常数函数放在基本初等函数中,而把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这 5 种函数叫做基本初等函数. 以后谈到的基本初等函数就是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这 5 种函数.

2)幂函数

把函数 $y=x^a$(a 为任意实数)称为**幂函数**,幂函数的定义域与 a 的值有关,但无论 a 取何值,$y=x^a$ 在$(0,+\infty)$内都有定义.

幂函数的图像、主要性质见表 1-2.

表 1-2

图　　像	主要性质
$a>0$ 	1. $a>0$ 时,图像过$(0,0)$及$(1,1)$点 2. 在$(0,+\infty)$内是单调增函数
$a<0$ 	1. $a<0$ 时,图像过$(1,1)$点 2. 在$(0,+\infty)$内是单调减函数

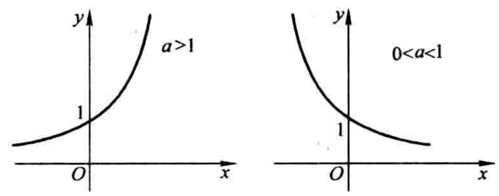
注意　把函数 $y=[\varphi(x)]^a$(a 为任意实数)称为**幂函数型**.

3)指数函数

把函数 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)称为**指数函数**,其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

指数函数的图像、主要性质见表 1－3．

表 1－3

图　像	主要性质
$y=a^x$ 	1. 图像过(0,1)点 2. 当 $a>1$ 时，函数单调增加 3. 当 $0<a<1$ 时，函数单调减少

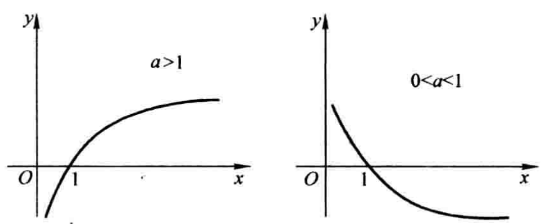
注意　把函数 $y=a^{\varphi(x)}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）称为**指数函数型**.

4）对数函数

把函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）称为**对数函数**，其定义域为$(0,+\infty)$．特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，$y=\ln x$ 称为**自然对数**；当 $a=10$ 时，$y=\lg x$ 称为**常用对数**.

对数函数的图像、主要性质见表 1－4．

表 1－4

图　像	主要性质
$y=\log_a x$ 	1. 图像过(1,0)点 2. 当 $a>1$ 时，函数单调增加 3. 当 $0<a<1$ 时，函数单调减少

注意　把函数 $y=\log_a\varphi(x)$（$a>0$ 且 $a\neq1$）称为**对数函数型**.

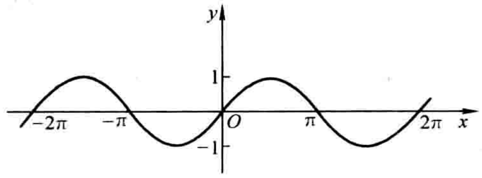
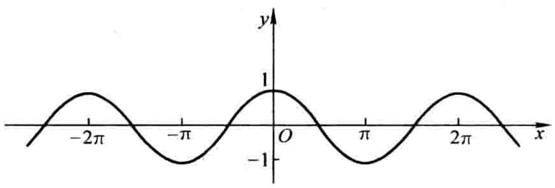
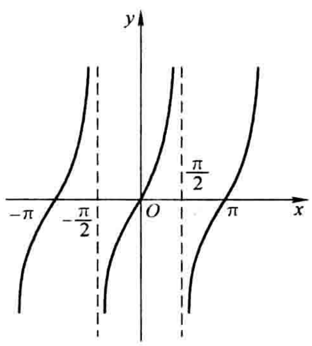
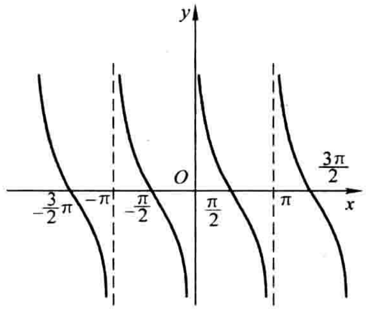
5）三角函数

把函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 分别称为**正弦函数，余弦函数，正切函数，余切函数，正割函数，余割函数**. 其中 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$．

把正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$，正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\csc x$ 统称为**三角函数**.

前 4 种三角函数的图像、主要性质见表 1－5．

表 1-5

图　　像	主要性质
$y=\sin x$ 	1. 定义域为 $\mathbf{R}$ 2. 奇函数 3. 周期 $T=2\pi$ 4. 有界函数 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$
$y=\cos x$ 	1. 定义域为 $\mathbf{R}$ 2. 偶函数 3. 周期 $T=2\pi$ 4. 有界函数 $\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$
$y=\tan x$ 	1. 定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 2. 奇函数 3. 周期 $T=\pi$ 4. 在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
$y=\cot x$ 	1. 定义域为 $x\neq 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 2. 奇函数 3. 周期 $T=\pi$ 4. 在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少

注意　把函数 $y=\sin\varphi(x)$，$y=\cos\varphi(x)$，$y=\tan\varphi(x)$，$y=\cot\varphi(x)$，$y=\sec\varphi(x)$，$y=\csc\varphi(x)$ 分别称为**正弦函数型**，**余弦函数型**，**正切函数型**，**余切函数型**，**正割函数型**，**余割函数型**.

把正弦函数型 $y=\sin\varphi(x)$，余弦函数型 $y=\cos\varphi(x)$，正切函数型 $y=\tan\varphi(x)$，余切函数型 $y=\cot\varphi(x)$，正割函数型 $y=\sec\varphi(x)$，余割函数型 $y=\csc\varphi(x)$ 统称为**三角函数型**.

6) 反三角函数

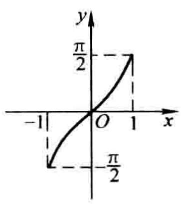
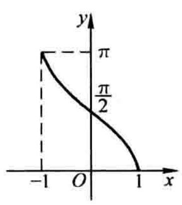
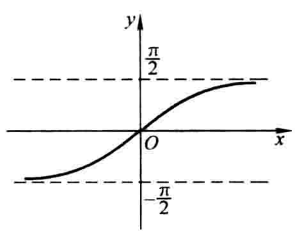
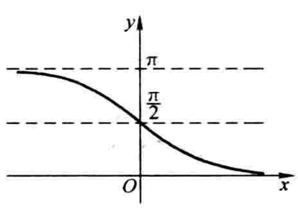
把函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 分别称为**反正弦函数，反余弦函数，反正切函数，反余切函数**.

把反正弦函数 $y=\arcsin x$，反余弦函数 $y=\arccos x$，反正切函数 $y=\arctan x$，反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 统称为**反三角函数**.

反三角函数是三角函数在某个区间上的反函数.

反三角函数的图像、主要性质见表 1－6 .

表 1－6

图　　像	主 要 性 质
$y=\arcsin x$ 	1. 定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 2. 奇函数，有界 3. 在 $[-1,1]$ 上单调增加
$y=\arccos x$ 	1. 定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$ 2. 有界 3. 在 $[-1,1]$ 上单调减少
$y=\arctan x$ 	1. 定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 2. 奇函数，有界 3. 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加
$y=\operatorname{arccot} x$ 	1. 定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(0,\pi)$ 2. 有界 3. 在 $(-\infty\ +,\infty)$ 上单调减少

注意 把函数 $y=\arcsin\varphi(x)$，$y=\arccos\varphi(x)$，$y=\arctan\varphi(x)$，$y=\operatorname{arccot}\varphi(x)$ 分别称为**反正弦函数型，反余弦函数型，反正切函数型，反余切函数型**.

把反正弦函数型 $y=\arcsin\varphi(x)$，反余弦函数型 $y=\arccos\varphi(x)$，反正切函数型 $y=\arctan\varphi(x)$，反余切函数型 $y=\operatorname{arccot}\varphi(x)$ 统称为**反三角函数型**.

以上这些函数在学习微积分时会经常用到，是研究微积分的一个重要基础.

2. *复合函数*

定义 7 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ，值域为 R_φ．当 $D_f\cap R_\varphi$ 不是空集时，y 通过 u 成为 x 的函数，这个函数称为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 是中间变量.

注意 只有满足 $D_f\cap R_\varphi$ 不是空集的两个函数才能复合成一个复合函数；复合函数的概念可以推广到由两个以上的更多个函数复合而成的复合函数.

例 9 设 $y=f(u)=\arcsin u$，$u=\varphi(x)=2+x^2$，问 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 能否复合成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$？

解 因为 $y=f(u)$ 的定义域为 $D_f=[-1,1]$，$u=\varphi(x)$ 的值域为 $R_\varphi=[2,+\infty)$，由于 $D_f\cap R_\varphi$ 为空集，所以 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 不能复合成复合函数.

例 10 求由函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 构成的复合函数.

解 将 $u=1-x^2$ 代入 $y=\sqrt{u}$ 中，得 $y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$，故 $y=\sqrt{1-x^2}$ 为所求复合函数（求复合函数就是代入与整理）.

例 11 指出下列复合函数的复合过程（一个中间变量的情形）：

（1）$y=\sqrt{x+1}$；　（2）$y=e^{\frac{x}{x+1}}$；　（3）$y=\ln(\ln x)$；

（4）$y=\cos(x+1)$；　（5）$y=\arcsin e^x$.

解 （1）$y=\sqrt{x+1}$ 是幂函数型，由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x+1$ 复合而成；

（2）$y=e^{\frac{x}{x+1}}$ 是指数函数型，由 $y=e^u$ 和 $u=\dfrac{x}{x+1}$ 复合而成；

（3）$y=\ln(\ln x)$ 是对数函数型，由 $y=\ln u$ 和 $u=\ln x$ 复合而成；

（4）$y=\cos(x+1)$ 是三角函数型，由 $y=\cos u$ 和 $u=x+1$ 复合而成；

（5）$y=\arcsin e^x$ 是反三角函数型，由 $y=\arcsin u$ 和 $u=e^x$ 复合而成.

例 9、例 10 和例 11 指出复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的复合过程与基本初等函数密切相关，即复合函数为取函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 为基本初等函数或由常数与基本初等函数经过有限次的四则运算所得到的函数.

例 12 指出下列复合函数的复合过程（两个中间变量的情形）：

（1）$y=[\ln(\ln x)]^4$；　（2）$y=\cos^3(x+1)$；　（3）$y=\arcsin e^{x^2}$.

解 （1）$y=[\ln(\ln x)]^4$ 是由 $y=u^4$，$u=\ln v$，$v=\ln x$ 复合而成；

（2）$y=\cos^3(x+1)$ 是由 $y=u^3$，$u=\cos v$，$v=x+1$ 复合而成；

（3）$y=\arcsin e^{x^2}$ 是由 $y=\arcsin u$，$u=e^v$，$v=x^2$ 复合而成.

3. *初等函数*

定义 8 由常数与基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的函数复合步骤构成

的，且用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

例如，$y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$，$y=\arcsin e^{\frac{x}{2}}$，$y=\lg(\sin x)$ 等都是初等函数；而分段函数由于往往不能用一个解析式表示，故不能称为初等函数，但绝对值函数 $y=|x|$是初等函数.

训练任务 1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$；　　(2) $y=\frac{x}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\frac{\sqrt{2+x}}{\lg(1-x)}$；　　(4) $y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x<0,\\ \sqrt{3-x}, & 0\leqslant x<2.\end{cases}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x\geqslant 1,\\ x^2, & x<1.\end{cases}$ 作出 $f(x)$ 的图像，并求 $f(5)$ 和 $f(-2)$ 的值.

3. 判断下列各题中两个函数是否相同，为什么？

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$，$g(x)=1$；　　(2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$g(x)=1$；

(3) $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$，$g(x)=\frac{1}{2}\ln(x-1)$；

(4) $f(x)=|x-3|$，$g(x)=\begin{cases}3-x, & x<3,\\ 0, & x=3,\\ x-3, & x>3;\end{cases}$

(5) $f(x)=x^2$，$g(t)=t^2$（其中 x、$t\in\mathbf{R}$）.

4. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y=2^x+1$；　　(3) $y=\frac{1}{x^2}$ $(x>0)$.

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=(x^2+1)\cos x$；　　(2) $f(x)=3x^2-x^3$；

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

6. 证明函数 $y=\lg x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是增函数.

7. 求下列函数的周期：

(1) $y=\cos\frac{1}{2}x$；　　(2) $y=1+\tan 3x$；

(3) $y=\sin x\cos x$；　　(4) $y=\sin x+\cos x$.

8. 写出由下列函数构成的复合函数：

(1) $y=\sqrt{u}$，$u=2^x-1$；　　(2) $y=\arcsin u$，$u=x^2$；

(3) $y=\cos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x+1$；　　(4) $y=\frac{1}{u}$，$u=\ln v$，$v=x-1$.

9. 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$.

10. 指出下列复合函数的复合过程：