College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

高等数学

习题全解指南

下册

同济·第七版

同济大学数学系 编

高等教育出版社

College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

高等数学
习题全解指南

下册

同济·第七版

同济大学数学系 编

GAODENG SHUXUE XITI QUANJIE ZHINAN

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与同济大学数学系编写的《高等数学》(第七版)相配套的学习辅导书,由同济大学数学系的教师编写。本书内容由三部分组成,第一部分是按《高等数学》(第七版)(下册)的章节顺序编排,给出习题全解,部分题目在解答之后对该类题的解法作了小结、归纳,有的提供了多种解法;第二部分是全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解,所选择的试题以工学类为主,少量涉及经济学类试题;第三部分是同济大学高等数学试卷选编以及考题的参考解答。

本书对教材具有相对的独立性,可为学习高等数学的工科和其他非数学类专业学生以及复习高等数学准备报考硕士研究生的人员提供解题指导,也可供讲授高等数学的教师在备课和批改作业时参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解指南:同济第7版.下册/同济大学数学系编.--北京:高等教育出版社,2014.8

ISBN 978-7-04-039692-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①同… Ⅲ.①高等数学-高等学校-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第123222号

策划编辑 王 强　责任编辑 田 玲　封面设计 王凌波　版式设计 于 婕
插图绘制 郝 林　责任校对 杨凤玲　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	高教社(天津)印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	21.75	版　　次	2014年8月第1版
字　　数	400千字	印　　次	2014年10月第2次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	31.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　39692-00

目录

一、《高等数学》(第七版)下册习题全解

二、全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解

三、同济大学高等数学试卷选编

一、《高等数学》(第七版)下册

习题全解

第八章

向量代数与空间解析几何

习题 8-1　向量及其线性运算

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$

$=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

证　如图 8-1，设四边形 $ABCD$ 中 AC 与 BD 交于点 M，已知 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$. 故

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}.$$

即 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

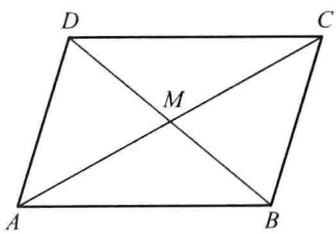

图 8-1

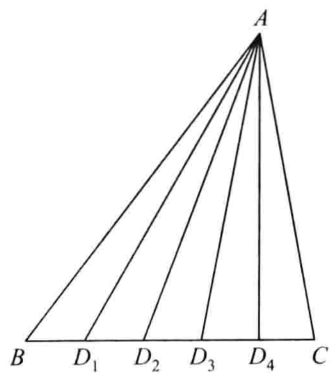

图 8-2

3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1,D_2,D_3,D_4，再把各分点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

证　如图 8-2，根据题意知

$$\overrightarrow{BD_1}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{D_1D_2}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{D_2D_3}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{D_3D_4}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a},$$

故

$$\overrightarrow{D_1A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_1})=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

$$\overrightarrow{D_2A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_2})=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

$$\overrightarrow{D_3A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_3})=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

$$\overrightarrow{D_4A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_4})=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}.$$

4. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,-1-1,0-2)=(1,-2,-2)$.

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4)$.

5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

解 向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,故平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{1}{11}(6,7,-6)=\pm\left(\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{-6}{11}\right),$$

其中 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$.

6. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限?

$$A(1,-2,3),B(2,3,-4),C(2,-3,-4),D(-2,-3,1).$$

解 A 点在第四卦限,B 点在第五卦限,C 点在第八卦限,D 点在第三卦限.

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征?指出下列各点的位置:

$$A(3,4,0),B(0,4,3),C(3,0,0),D(0,-1,0).$$

解 在坐标面上的点的坐标,其特征是表示坐标的三个有序数中至少有一个为零. 比如 xOy 面上的点的坐标为 $(x_0,y_0,0)$,xOz 面上的点的坐标为 $(x_0,0,z_0)$,yOz 面上的点的坐标为 $(0,y_0,z_0)$.

在坐标轴上的点的坐标,其特征是表示坐标的三个有序数中至少有两个为零,比如 x 轴上的点的坐标为 $(x_0,0,0)$,y 轴上的点的坐标为 $(0,y_0,0)$,z 轴上点的坐标为 $(0,0,z_0)$.

A 点在 xOy 面上,B 点在 yOz 面上,C 点在 x 轴上,D 点在 y 轴上.

8. 求点 (a,b,c) 关于(1)各坐标面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标.

解 (1)点 (a,b,c) 关于 xOy 面的对称点为 $(a,b,-c)$,关于 yOz 面的对称点是 $(-a,b,c)$,关于 zOx 面的对称点为 $(a,-b,c)$.

(2)点 (a,b,c) 关于 x 轴的对称点是 $(a,-b,-c)$,关于 y 轴的对称点是 $(-a,b,-c)$,关于 z 轴的对称点是 $(-a,-b,c)$.

(3)点 (a,b,c) 关于坐标原点的对称点是 $(-a,-b,-c)$.

9. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标.

解 设空间直角坐标系如图 8-3,根据题意,P_0F 为点 P_0 关于 xOz 面的垂线,垂足 F 坐标为 $(x_0,0,z_0)$;P_0D 为点 P_0 关于 xOy 面的垂线,垂足 D 坐标为 $(x_0,y_0,0)$;P_0E 为点 P_0 关于 yOz 面的垂线,垂足 E 坐标为 $(0,y_0,z_0)$.

P_0A 为点 P_0 关于 x 轴的垂线,垂足 A 的坐标为 $(x_0,0,0)$;P_0B 为点 P_0 关于 y 轴

的垂线,垂足 B 的坐标为 $(0,y_0,0)$;P_0C 为点 P_0 关于 z 轴的垂线,垂足 C 的坐标为 $(0,0,z_0)$.

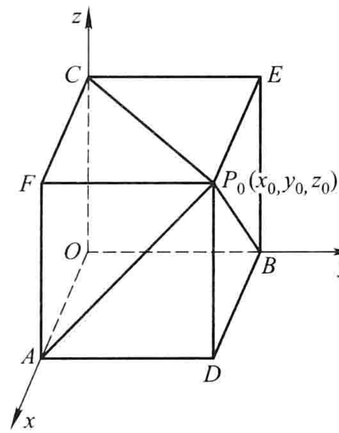

图 8－3

10. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

解　如图 8－4,过 P_0 且平行于 z 轴的直线 l 上的点的坐标,其特点是,它们的横坐标均相同,纵坐标也均相同.

而过点 P_0 且平行于 xOy 面的平面 π 上的点的坐标,其特点是,它们的竖坐标均相同.

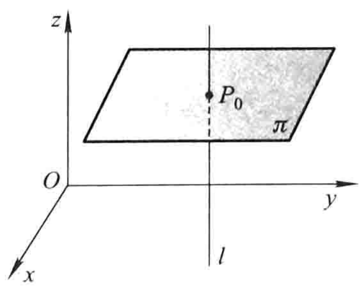

图 8－4

11. 一边长为 a 的正方体放置在 xOy 面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴和 y 轴上,求它各顶点的坐标.

解　如图 8－5,已知 $AB=a$,故 $OA=OB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$,于是各顶点的坐标分别为

$A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$,$B\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$,$C\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$,$D\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$,$E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$,$F\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$,

$G\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$,$H\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$.

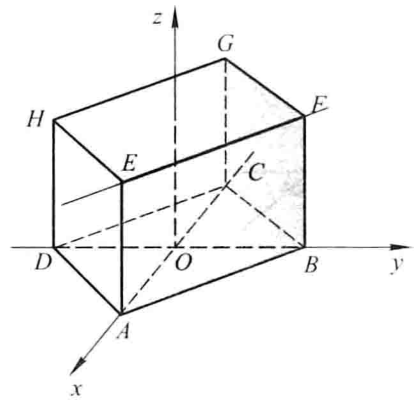

图 8－5

12. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

解　点 M 到 x 轴的距离 $d_1=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$，点 M 到 y 轴的距离 $d_2=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，点 M 到 z 轴的距离 $d_3=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$.

13. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

解　所求点在 yOz 面上，不妨设为 $P(0,y,z)$，点 P 与三点 A,B,C 等距离.

$$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2},\ |\overrightarrow{PB}|=\sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2},$$
$$|\overrightarrow{PC}|=\sqrt{(y-5)^2+(z-1)^2}.$$

由 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$ 知

$$\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2}=\sqrt{(y-5)^2+(z-1)^2},$$

即

$$\begin{cases}9+(y-1)^2+(z-2)^2=16+(y+2)^2+(z+2)^2,\\9+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2.\end{cases}$$

解上述方程组，得 $y=1,z=-2$. 故所求点坐标为 $(0,1,-2)$.

14. 试证明以三点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证　由 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$,

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7,$$
$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$$

知 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$ 及 $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2$. 故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解　向量

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(3-4,0-\sqrt{2},2-1)=(-1,-\sqrt{2},1),$$

其模 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$. 其方向余弦分别为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma=\frac{1}{2}.$$

方向角分别为 $\alpha=\frac{2}{3}\pi,\beta=\frac{3}{4}\pi,\gamma=\frac{\pi}{3}$.

16. 设向量的方向余弦分别满足(1) $\cos\alpha=0$;(2) $\cos\beta=1$;(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$,问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解　(1)由 $\cos\alpha=0$ 知 $\alpha=\frac{\pi}{2}$,故向量与 x 轴垂直,平行于 yOz 面.

(2)由 $\cos\beta=1$ 知 $\beta=0$,故向量与 y 轴同向,垂直于 xOz 面.

(3)由 $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 知 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$,故向量垂直于 x 轴和 y 轴,即与 z 轴平行,垂直于 xOy 面.

17. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4,它与 u 轴的夹角是$\frac{\pi}{3}$,求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影.

解　已知 $|\boldsymbol{r}|=4$,则 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\theta=4\cdot\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$.

18. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$,它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, -4 和 7. 求这向量的起点 A 的坐标.

解　设 A 点坐标为 (x,y,z),则

$$\overrightarrow{AB}=(2-x,\ -1-y,7-z),$$

由题意知

$$2-x=4,\ -1-y=-4,7-z=7,$$

故 $x=-2,y=3,z=0$,因此 A 点坐标为 $(-2,3,0)$.

19. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$. 求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解　
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})\\&=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13,在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

习题 8-2　　数量积　向量积　*混合积

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$;(3) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

解　(1)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(3,-1,-2)\cdot(1,2,-1)\\&=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3,\end{aligned}$$

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=(5,1,7).$$

(2) $(-2a)\cdot 3b=-6(a\cdot b)=-6\times 3=-18$,

$a\times 2b=2(a\times b)=2(5,1,7)=(10,2,14)$.

(3) $\cos(\widehat{a,b})=\dfrac{a\cdot b}{|a||b|}=\dfrac{3}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$.

2. 设 a,b,c 为单位向量,且满足 $a+b+c=0$,求 $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a$.

解 已知 $|a|=|b|=|c|=1$,$a+b+c=0$,故 $(a+b+c)\cdot(a+b+c)=0$. 即 $|a|^2+|b|^2+|c|^2+2a\cdot b+2b\cdot c+2c\cdot a=0$. 因此

$$a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=-\frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2+|c|^2)=-\frac{3}{2}.$$

3. 已知 $M_1(1,-1,2)$,$M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$. 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$,$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-1,3-(-1),1-2)=(2,4,-1)$,

$\overrightarrow{M_2M_3}=(3-3,1-3,3-1)=(0,-2,2)$,

由于 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_2}$,$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直,故所求向量可取为

$$a=\frac{\pm(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3})}{|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}|},$$

由

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=(6,-4,-4),$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}|=\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$

知

$$a=\frac{\pm 1}{2\sqrt{17}}(6,-4,-4)=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}}\right).$$

4. 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$,计算重力所作的功(坐标系长度单位为 m,重力方向为 z 轴负方向).

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-3,4-1,2-8)=(-2,3,-6)$,

$F=(0,0,-100\times 9.8)=(0,0,-980)$,

$W=F\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=(0,0,-980)\cdot(-2,3,-6)=5\,880(\mathrm{J})$.

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处,有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 F_1 作用着;在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处,有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 F_2 作用着(图 8-6). 问 $\theta_1,\theta_2,x_1,x_2,|F_1|,|F_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持

平衡？

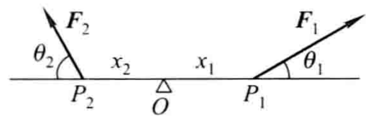

图 8－6

解　如图 8－6，已知有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和为零，又由对力矩正负符号的规定可得杠杆保持平衡的条件为

$$|\boldsymbol{F}_1|x_1\sin\theta_1-|\boldsymbol{F}_2|x_2\sin\theta_2=0,$$

即
$$|\boldsymbol{F}_1|x_1\sin\theta_1=|\boldsymbol{F}_2|x_2\sin\theta_2.$$

6. 求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上的投影.

解　$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{(4,-3,4)\cdot(2,2,1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{6}{3}=2.$

7. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 λ 与 μ 有怎样的关系，能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直？

解　$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\lambda(3,5,-2)+\mu(2,1,4)=(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu).$

要 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直，即要 $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\perp(0,0,1)$，即

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot(0,0,1)=0,$$

亦即
$$(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)\cdot(0,0,1)=0,$$

故 $-2\lambda+4\mu=0$，因此当 $\lambda=2\mu$ 时能使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直.

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证　如图 8－7，设 AB 是圆 O 的直径，C 点在圆周上，要证 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$. 只要证 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 即可. 由

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})\\&=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BO}+|\overrightarrow{OC}|^2\\&=-|\overrightarrow{AO}|^2+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2=0,\end{aligned}$$

故 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，$\angle ACB$ 为直角.

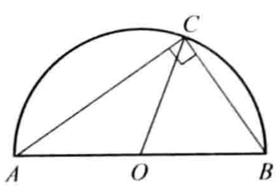

图 8－7

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算：

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$; (2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$; (3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2,-3,1)\cdot(1,-1,3)=8$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(2,-3,1)\cdot(1,-2,0)=8$,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}&=8(1,-2,0)-8(1,-1,3)=(0,-8,-24)\\&=-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-3,1)+(1,-1,3)=(3,-4,4)$,

$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(1,-1,3)+(1,-2,0)=(2,-3,3)$,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-4&4\\2&-3&3\end{vmatrix}=(0,-1,-1)=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

(3) $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-1&3\\1&-2&0\end{vmatrix}=2.$$

10. 已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,求$\triangle OAB$的面积.

解 由向量积的几何意义知

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|,$$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&3\\0&1&3\end{vmatrix}=(-3,-3,1),$$

$$\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+1}=\sqrt{19}.$$

故 $$S_{\triangle OAB}=\frac{\sqrt{19}}{2}.$$

***11**. 已知$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$,试利用行列式的性质证明:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

证 因为$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$,$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}$,

$$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix},$$

而由行列式的性质知$\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_x&c_y&c_z\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$,故

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

12. 试用向量证明不等式:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant |a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

其中 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 为任意实数. 并指出等号成立的条件.

证 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$. 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 知,

$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,从而

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2},$$

当 a_1,a_2,a_3 与 b_1,b_2,b_3 成比例,即$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$时,上述等式成立.

习题 8-3 平面及其方程

1. 求过点$(3,0,-1)$且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

解 所求平面与已知平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行. 因此所求平面的法向量可取为 $\boldsymbol{n}=(3,-7,5)$,设所求平面为

$$3x-7y+5z+D=0.$$

将点$(3,0,-1)$代入上式得 $D=-4$. 故所求平面方程为

$$3x-7y+5z-4=0.$$

2. 求过点 $M_0(2,9,-6)$且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

解 $\overrightarrow{OM_0}=(2,9,-6)$. 所求平面与$\overrightarrow{OM_0}$垂直,可取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OM_0}$,设所求平面方程为

$$2x+9y-6z+D=0.$$

将点 $M_0(2,9,-6)$代入上式,得 $D=-121$. 故所求平面方程为

$$2x+9y-6z-121=0.$$

3. 求过$(1,1,-1)$,$(-2,-2,2)$和$(1,-1,2)$三点的平面方程.

解 由 $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -2-1 & -2-1 & 2+1 \\ 1-1 & -1-1 & 2+1 \end{vmatrix}=0$,得 $x-3y-2z=0$,即为所求平面方程.

注 设 $M(x,y,z)$为平面上任一点,$M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3)$为平面上已知点. 由$\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=0$,即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

它就表示过已知三点 $M_i(i=1,2,3)$的平面方程.

4. 指出下列各平面的特殊位置,并画出各平面:

(1) $x=0$; (2) $3y-1=0$;