奥林专家担纲 著名教练主笔

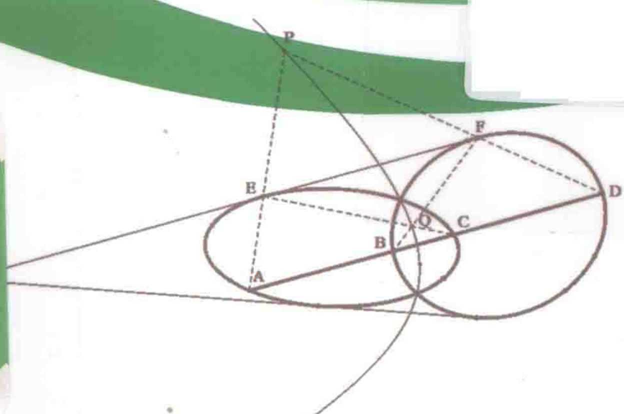
浙大优学

从自主招生到竞赛

CONG
ZIZHU ZHAOSHENG
DAO
JINGSAI

高中数学

上册



主　编　金蒙伟　李胜宏
副主编　陈相友　沈虎跃　马洪炎

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

从自主招生到竞赛

高中数学　上册

主　编　金蒙伟　李胜宏

副主编　陈相友　沈虎跃　马洪炎

编　委　伏奋强　李亚章　周海军　胡克元

江厚利　陈相友　胡浩鑫　周顺钿

王希年　许康华　邵　达　马洪炎

张春杰　张　玮　卞　勇　斯理炯

吕峰波　范东晖　赵　洋　李惟峰

虞金龙　梅红卫　陈寒极　蔡小雄

沈宝伟　沈虎跃　陈守湖

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

从自主招生到竞赛. 高中数学. 上册 / 金蒙伟，李胜宏主编. —杭州：浙江大学出版社，2014.1(2014.7 重印)
ISBN978-7-308-12519-2

Ⅰ.①从… Ⅱ.①金… ②李… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 277803 号

从自主招生到竞赛. 高中数学. 上册
金蒙伟　李胜宏　主编

责任编辑　杨晓鸣
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　浙江时代出版服务有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　27.25
字　　数　663 千
版 印 次　2014 年 1 月第 1 版　2014 年 7 月第 3 次印刷
书　　号　ISBN978-7-308-12519-2
定　　价　48.00 元

浙江大学出版社发行部联系方式　(0571)88925591；http://zjdxcbs.tmall.com

目　　录

第一章　集合与逻辑用语

第一节　集合的概念与运算

项目一　知识概要

1. 集合的概念

(1)集合是数学中的原始概念，是不可定义的概念. 具有某种性质的对象全体称为一个集合，对象称为集合的元素，集合中的元素具有确定性、互异性和无序性.

(2)集合的分类：元素个数为有限个的集合称为有限集；元素个数为无限个的集合称为无限集. 特别地，不含任何元素的集合称为空集，用$\varnothing$表示.

(3)集合的表示方法：列举法、描述法和韦恩(Venn)图法. 常用的集合还有约定的字母符号表示(如实数集用$\mathbf{R}$、空集用$\varnothing$表示等等).

2. 元素与集合、集合之间的关系

(1)元素与集合之间的关系有“属于$\in$”或“不属于$\notin$”.

(2)集合之间的关系

①包含关系：包含关系与子集的概念等价，即集合 A 包含于集合 B 等价于 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$；集合 A 真包含于集合 B 等价于 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$；特别地，空集$\varnothing$是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

②不包含关系：若集合 A 中至少有一个元素不属于集合 B，就称集合 A 不包含于集合 B，记作 $A\nsubseteq B$.

③集合的相等：若 $A\subsetneqq B$ 且 $B\subsetneqq A$，则集合 A，B 相等，记作 $A=B$.

3. 集合的运算

(1)集合的交、并、补的运算

$A\cap B=\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\in B\}$，$A\cup B=\{x\,|\,x\in A$ 或 $x\in B\}$，

$\complement_U A=\{x\,|\,x\in U, x\notin A, A\subseteq U\}$.

(2)集合运算中一些常用的结论

①交换律：$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$；

②结合律：$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

③分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

④吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$；

⑤反演律（摩根律）：$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$，$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

4. 有限集子集的个数

若有限集 A 含有 n 个元素，则 A 的子集有 2^n 个，真子集有(2^n-1)个.

5. 有限集的元素个数

对任意两个有限集合 A,B，有 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$，$\mathrm{card}[\complement_U(A\cup B)]=\mathrm{card}U-\mathrm{card}A-\mathrm{card}B+\mathrm{card}\,\complement_U(A\cap B)$. 此结论可以推广到任意 n 个有限集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$（称为容斥原理）.

项目二 例题精选

任务 1：集合的概念及简单运算

【例题 1】 已知集合 $M=\{x\mid ax+1=0\}$，$N=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$M\cap N=M$，求实数 a 的值.

【分析】 $M\cap N=M$，则 $M\subseteq N$，化简集合 M,N.

【解答】 由 $M\cap N=M$，得 $M\subseteq N$，而 $N=\{1,2\}$. 为了求 M 分两种情况讨论：

(1)当 $a=0$ 时，$M=\varnothing$，适合条件；

(2)当 $a\neq 0$ 时，$M=\left\{-\dfrac{1}{a}\right\}$，要使 $M\subseteq N$，只需 $-\dfrac{1}{a}=1$，或 $-\dfrac{1}{a}=2$，所以 $a=-1$，或 $a=-\dfrac{1}{2}$. 综上所述，$a=0$ 或 $a=-1$ 或 $a=-\dfrac{1}{2}$.

【思考】 解决两个或两个以上集合关系问题不可忽视空集、全集. 含有参数时，一般需要对参数进行讨论.

任务 2：集合概念、有限等集的性质

【例题 2】 已知集合 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，若集合 $A\cap B=B$ 且 $A\cap(\complement_U B)=\varnothing$，求$(x+\dfrac{1}{y})+(x^2+\dfrac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2013}+\dfrac{1}{y^{2013}})$的值.

【分析】 要求值归结于求出 x,y，需从已知条件中导出两个独立的等量关系，由 $A\cap B=B$，所以 $B\subseteq A$，$A\cap(\complement_U B)=\varnothing$，所以 $A\subseteq B$，所以 $A=B$.

【解答】 根据元素的互异性，由集合 B 知 $x\neq 0$，$y\neq 0$，及 $A=B$，根据有限等集的性质有$\begin{cases}x+xy+\lg(xy)=|x|+y,\\ x\cdot xy\cdot\lg(xy)=|x|\cdot y\cdot 0.\end{cases}$

因为 $0\in B$，所以 $0\in A$，故有 $\lg(xy)=0$，从而 $xy=1$. 又由于 $1\in A$，$A=B$，得 $1\in B$，于是有$\begin{cases}|x|=1,\\ xy=1,\end{cases}$或$\begin{cases}y=1,\\ xy=1,\end{cases}$其中 $x=y=1$ 与元素的互异性矛盾，所以 $x=y=-1$，将其代入得$(x+\dfrac{1}{y})+(x^2+\dfrac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2013}+\dfrac{1}{y^{2013}})=-2+2-2+\cdots+2-2=-2$.

【思考】 本题主要利用有限等集的性质，显得计算量不大，但概念性较强. 如果利用讨论法求解，则显得较烦. 关于集合的运算性质主要用到：$A\subseteq B\Leftrightarrow\complement_U B\subseteq\complement_U A\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow$

$A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap(\complement_U B)=\varnothing$.

任务3:集合与方程组的关系

【例题3】 设集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$,$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$,$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$.

(1)当 a 取何值时,$(A\cup B)\cap C$ 为含有2个元素的集合?

(2)当 a 取何值时,$(A\cup B)\cap C$ 为含有3个元素的集合?

【分析】 由分配律公式 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,所以只要求出 $A\cap C$ 与 $B\cap C$ 中的元素,再分别加以讨论即可.

【解答】 (1)因为 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,$A\cap C$ 与 $B\cap C$ 分别为方程组

(Ⅰ)$\begin{cases}ax+y=1,\\x^2+y^2=1,\end{cases}$ (Ⅱ)$\begin{cases}x+ay=1,\\x^2+y^2=1,\end{cases}$ 的解集.

由(Ⅰ),得 $(x,y)=(0,1)$ 或 $\left(\dfrac{2a}{1+a^2},\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)$.

由(Ⅱ),得 $(x,y)=(1,0)$ 或 $\left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2},\dfrac{2a}{1+a^2}\right)$.

要使 $(A\cup B)\cap C$ 含有2个元素,只需① $\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=0,\\\dfrac{1-a^2}{1+a^2}=1,\end{cases}$ 或② $\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=1,\\\dfrac{1-a^2}{1+a^2}=0.\end{cases}$

由①得 $a=0$. 由②得 $a=1$. 故当 $a=0$ 或1时,$(A\cup B)\cap C$ 含有2个元素.

(2)要使 $(A\cup B)\cap C$ 含有3个元素,只需 $\dfrac{2a}{1+a^2}=\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$,解得 $a=-1\pm\sqrt{2}$.

故当 $a=-1\pm\sqrt{2}$ 时,$(A\cup B)\cap C$ 含有3个元素.

【思考】 本题的关键之所在是利用分配律公式 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,只需讨论 $A\cap C$ 与 $B\cap C$ 中元素的个数即可.

任务4:子集概念、元素个数的讨论

【例题4】 (1995年高中联赛题)设 $M=\{1,2,3,\cdots,1995\}$,A 是 M 的子集且满足条件当 $x\in A$ 时,$15x\notin A$,则 A 中元素个数最多是________.

【分析】 因为 x 与 $15x$ 这两个元素至少有一个不属于集合 A,从而将集合分类,再求出 A 中元素最多个数是多少.

【解答】 填1870. 用 $|A|$ 表示集合 A 所含元素的个数. 由题设知,k 与 $15k$ 这两个数中至少有一个不属于集合 A,因为 $\left[\dfrac{1995}{15}\right]=133$,所以 $k=134,135,\cdots,1995$ 时,$15k$ 一定不属于 A. 同理 $\left[\dfrac{133}{15}\right]=8$,当 $k=9,10,11,\cdots,133$ 时,k 与 $15k$ 这两个元素中至少有一个不属于 A,所以至少有 $133-9+1=125$ 个元素不属于 A,所以 $|A|\leqslant 1995-125=1870$.

另一方面,可取 $A=\{1,2,\cdots,8\}\cup\{134,135,\cdots,1995\}$,$A$ 满足题设条件,此时 $|A|=1870$. 故 $|A|$ 的最大值就是1870.

【思考】 处理这类问题,将集合中的元素分类是关键,如:$k=\left[\dfrac{1995}{15}\right]+1,\left[\dfrac{1995}{15}\right]+2,$

$\cdots,1995$. 以及$\left[\frac{133}{15}\right]=8$,将集合进行适当划分,然后求解.

任务 5:集合的相等及元素

【例题 5】 (1986 年安徽省集训题)设 S_1,S_2,S_3 为非空整数集合,对于 1,2,3 的任意一个排列 i,j,k,若 $x\in S_i$,$y\in S_j$,则 $x-y\in S_k$. 证明:

(1)三个集合中至少有两个相等;(2)三个集合中是否可能有两个集合无公共元素?

【分析】 由集合的相等可知 $A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,只要找到两个集合满足上述关系即可.再只要构造两个集合无公共元素.

【证明】 (1)若 $x\in S_i$,$y\in S_j$,则 $x-y\in S_k$,从而 $-x=(y-x)-y\in S_i$,所以每个集合均含有非负元素.

当 3 个集合中的元素均为 0 时,命题显然成立.否则,设 S_1,S_2,S_3 三个集合中最小的正整数为 a,不妨设 $a\in S_1$;设 b 为 S_2,S_3 中最小的非负整数,不妨设 $b\in S_2$,则 $b-a\in S_3$.

若 $b>0$,则 $b\geqslant a$,于是 $b>b-a\geqslant 0$,与 b 的取法矛盾,所以 $b=0$.于是任取 $x\in S_1$,因 $0\in S_2$,故 $x-0\in S_3$,所以 $S_1\subseteq S_3$.

同理可得 $S_3\subseteq S_1$.故 $S_1=S_3$.

(2)可能.例如 $S_1=S_2=\{$奇数$\}$,$S_3=\{$偶数$\}$,这三个集合显然是满足条件的,但 S_1,S_2 与 S_3 均无公共元素.

【思考】 本题主要涉及集合相等的证明,分类讨论,简单的反证法,以及构造集合,综合性比较强.

任务 6:子集的概念,周期性的应用

【例题 6】 (第 7 届美国邀请赛)设 S 是整数集合$\{1,2,\cdots,1989\}$的一个子集,且 S 中任意两个数的差不等于 4 或 7.问:S 中最多可以包含多少个数?

【分析】 因为 4 与 7 的和为 11,从前 10 个数中找出符合条件的数,再考虑周期 11,构造符合条件的子集.

【解答】 因为 1,4,6,7,9 这 5 个数中任何两个的差都不等于 4 或 7,各加 11 得 12,15,17,18,20,显然这 5 个数也具有前面的性质,而且每个数与前 5 个数中的任何一个的差也不等于 4 或 7.以此类推,每连续 11 个数中可取 5 个,一起组成集合 S.(因为 $1989=11\times 180+9$,最后只有 9 个数 $1981,1982,\cdots,1989$,但仍然可以取 5 个数 1981,1984,1986,1987,1989),那么,S 包含的数的个数是 $5\times 181=905$.

下面证明:S 中不可能包含更多的数.若不然,则上述 181 组数中,至少有一组可以从中取 6 个数,使得两两的差不是 4 或 7.不妨考虑 $1,2,\cdots,11$ 这组数,把它分为五组:$\{4,7,11\}$,$\{3,10\}$,$\{2,6\}$,$\{5,9\}$,$\{1,8\}$,其中至少有一个组要取出两个数,显然,后面四组数的每一对都不能同时取出,只能在$\{4,7,11\}$中取 4,7,于是$\{3,10\}$中只能取 10,$\{2,6\}$中只能取 2,$\{5,9\}$中只能取 5,$\{1,8\}$中两个数都不能取,也就是不可能取得第 6 个数.故结论获证.

【思考】 从前 10 个数中取出 5 个数,周期 11 是很重要的,构造符合条件的集合,再证明是唯一的.

任务 7:子集的个数、一一映射

【例题 7】 对集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$及其每一个非空子集,定义一个唯一确定的"交替

和"如下：按照递减的次序重新排列该子集，然后从最大的数开始，交替地减、加后继的数所得的结果. 例如，集合$\{1,2,4,7,10\}$的"交替和"是$10-7+4-2+1=6$，$\{7,10\}$的"交替和"是$10-7=3$，$\{5\}$的"交替和"是5等. 试求A的所有非空子集的"交替和"的总和.

【分析】 因为A的非空子集有(2^n-1)个，逐个计算"交替和"再求总和是不可能的，必须通过分析"交替和"的特点，寻找"交替和"的规律. 为了找到"交替和"的规律，可以先令n为某一恰当的具体的数(如$n=4$)，这是解决数学问题的常用方法(从特殊到一般的方法).

当$n=4$时，$A=\{1,2,3,4\}$的非空子集共有15个. 写出它们的全部"交替和"如下

$\{1,2,3,4\}$ $4-3+2-1=2$；
$\{1,2,3\}$ $3-2+1=2$；
$\{1,3,4\}$ $4-3+1=2$；
$\{1,3\}$ $3-1=2$；
$\{1,4\}$ $4-1=3$；
$\{1\}$ 1；
$\{1,2,4\}$ $4-2+1=3$；
$\{1,2\}$ $2-1=1$；
$\{2,3,4\}$ $4-3+2=3$；
$\{2,3\}$ $3-2=1$；
$\{2,4\}$ $4-2=2$；
$\{2\}$ 2；
$\{3,4\}$ $4-3=1$；
$\{3\}$ 3；
$\{4\}$ 4.

从以上写出的"交替和"我们发现，除了集合$\{4\}$以外，可以把A的子集分成两类：一类子集中包含4，另一类不包含4. 并且可以在这两类集合之间建立起一个一一映射：设A_i是A的一个不包含4的子集，则令A_i与集合$A_i\cup\{4\}$相对应. 显然A_i与$A_i\cup\{4\}$的"交替和"之和为4. 由于这样的A_i共有$\frac{1}{2}(2^4-2)=7$个，故A的所有子集的"交替和"的总和是$7\times4+4=32$.

【解答】 集合$A=\{1,2,\cdots,n\}$的非空子集中，除去集合$\{n\}$，还有2^n-2个非空子集. 将这2^n-2个子集分成两类：第一类是包含元素n的子集，第二类是不包含n的子集. 在第二类子集与第一类子集之间建立如下对应关系$f:A_i\to A_i\cup\{n\}$，其中A_i是第二类子集，显然这种对应是一一映射. 设A_i的"交替和"为k，则$A_i\cup\{n\}$的"交替和"为$n-k$，这一对集合的"交替和"的和等于n，故集合A的所有非空子集的"交替和"的总和是$\frac{1}{2}(2^n-2)\cdot n+n=2^{n-1}\cdot n$.

【思考】 从特殊到一般是一种很重要的解题方法，找到两类子集的一一映射$f:A_i\to A_i\cup\{n\}$，则这一对集合的"交替和"的和等于n是解题的关键.

任务8：容斥原理的应用

【例题8】 集合S的元素个数简记为$|S|$，对于三个集合A,B,C，满足条件：

(1) $|A|=|B|=100$；

(2) 集合A,B,C各自的所有子集个数之和等于集合$A\cup B\cup C$的所有子集个数，求$|A\cap B\cap C|$的最小值.

【分析】 集合A的所有子集(含空集)的个数是$2^{|A|}$. 由容斥原理$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$.

【解答】 由条件(2)知：$2^{|A|}+2^{|B|}+2^{|C|}=2^{|A\cup B\cup C|}$，即$2^{100}+2^{100}+2^{|C|}=2^{|A\cup B\cup C|}$，即$2^{|A\cup B\cup C|-101}=1+2^{|C|-101}$.

上式左边是一个2的自然数幂，因此右边应是一个大于1且等于2的整数幂的数，当且仅当$|C|=101$时成立. 从而$|A\cup B\cup C|=102$.

由容斥原理得

$|A\cap B\cap C|=|A\cup B\cup C|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|$

(又由于$|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|$等)

$=|A\cup B\cup C|-|A|-|B|-|C|+(|A|+|B|-|A\cup B|)$

$+(|B|+|C|-|B\cup C|)+(|A|+|C|-|A\cup C|)$

$=|A\cup B\cup C|+|A|+|B|+|C|-|A\cup B|-|B\cup C|-|A\cup C|$.

由于$A\cup B,A\cup C,B\cup C\subseteq A\cup B\cup C$,从而$|A\cup B|,|A\cup C|,|B\cup C|\leqslant 102$.因此,

$|A\cap B\cap C|=102+100+100+101-|A\cup B|-|A\cup C|-|B\cup C|\geqslant 403-102\times 3=97$.

构造$A=\{1,2,3,\cdots,100\},B=\{3,4,5,\cdots,102\},C=\{1,2,4,5,6,\cdots,100,101,102\}$.

此时$|A\cap B\cap C|=|\{4,5,\cdots,100\}|=97$.

【思考】 为了估计$|A\cap B\cap C|\geqslant 97$,需用到

$|A\cap B\cap C|=|A\cup B\cup C|+|A|+|B|+|C|-|A\cup B|-|A\cup C|-|B\cup C|$.

若直接使用容斥原理公式

$|A\cap B\cap C|=|A\cup B\cup C|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|$,

得不到有效的不等式.

项目三 课外练习

A 组

1. 设集合$M=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\},N=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,则 ( )

A. $M=N$　　B. M是N的真子集　　C. N是M的真子集　　D. $M\cap N=\varnothing$

2. 设全集$U=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$,$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-3}{x-2}=1,x,y\in\mathbf{R},且\ x\neq 2\right\}$

$B=\{(x,y)\mid y=x+1,x,y\in\mathbf{R}\}$,则$(\complement_U A)\cap B=$ ( )

A. $\complement_U A$　　B. $\complement_U B$　　C. $\{(2,3)\}$　　D. $\varnothing$

3. 已知全集$U=\{1,2,3,4,5\}$,$P\subsetneqq U,T\subsetneqq U$.若$P\cap T=\{2\},(\complement_U P)\cap T=\{4\}$,$(\complement_U P)\cap(\complement_U T)=\{1,5\}$,则有 ( )

A. $3\in P,3\in T$　　B. $3\in\complement_U P,3\in T$

C. $3\in P,3\in\complement_U T$　　D. $3\in\complement_U P,3\in\complement_U T$

4. (2005年南昌市竞赛)设集合A,B,C满足:$A\cup\complement_R B=A\cup\complement_R C$,则必成立 ( )

A. $B=C$　　B. $A\cap B=A\cap C$

C. $A\cap\complement_R B=A\cap\complement_R C$　　D. $\complement_R(A\cap B)=\complement_R(A\cap C)$

5. (2006年全国联赛)已知集合$A=\{x\mid 5x-a\leqslant 0\},B=\{x\mid 6x-b>0\},a,b\in\mathbf{N}$,且$A\cap B\cap\mathbf{N}=\{2,3,4\}$,则整数对$(a,b)$的个数为 ( )

A. 20　　B. 25　　C. 30　　D. 42

6. (2010年江苏)设集合$A=\{-1,1,3\},B=\{a+2,a^2+4\},A\cap B=\{3\}$,则实数$a$的值为________.

7.(2009 年陕西)某班有 36 名同学参加数学、物理、化学课外探究小组,每名同学至多参加两个小组.已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 26,15,13,同时参加数学和物理小组的有 6 人,同时参加物理和化学小组的有 4 人,则同时参加数学和化学小组的有__________人.

8.(2005 年全国高中联赛)设 a 为实数,集合 $A=\{x\mid -a,a^2,a^2+a)\}$,$B=\{-1,-1-a,1+a^2\}$,$A\cap B\neq\varnothing$,则 $A\cap B=$__________.

9.(2005 年辽宁竞赛)设 $A=\{1,3,5,\cdots,2n-1\}$,S_n 是 A 的所有三元子集的元素和之和,则 $S_n=$__________.

10.(2011 年全国联赛)设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B=\{-1,3,5,8\}$,则集合 $A=$__________.

11. 已知 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$,$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2,a_5^2\}$,其中 $a_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,3,4,5)$.设 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$,且 $A\cap B=\{a_1,a_4\}$,$a_1+a_4=10$,又 $A\cup B$ 中所有元素之和为 224,求(1)a_1,a_4 的值;(2)集合 A.

12. 一次会议有 1990 位数学家参加,每人至少有过 1327 位合作者,求证,可以找到 4 位数学家,他们中每两个人都合作过.

13.(第二届东南数学奥林匹克)设 n 是正整数,集合 $M=\{1,2,\cdots,2n\}$,求最小的正整数 k,使得对于 M 的任何一个 k 元子集,其中必有 4 个互不相同的元素之和等于 $4n+1$.

B 组

14. 已知集合 $A=\{x\mid x^3+2x^2-x-2>0\}$,$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$,$A\cup B=\{x\mid x+2>0\}$,$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$,那么 $a=$__________,$b=$__________.

15. 已知集合 A 中有 2 个元素,集合 B 中有 5 个元素,则集合 $A\cup B$ 中的元素个数的可能取值是__________.

16.(2007 年武汉大学自主招生)运动会上,甲、乙、丙三名同学各获得一枚奖牌,其中 1 人得金牌、1 人得银牌、1 人得铜牌.王老师猜测“甲得金牌、乙不得金牌、丙不得铜牌”,结果王老师只猜对了一人,那么甲、乙、丙分别获得______、______、______牌.

17.(2009 年上海交大自主招生)珠宝店丢失了一件珍贵珠宝.以下四人只有一个人说真话,只有一人偷了珠宝.甲:我没有偷;乙:丙是小偷;丙:丁是小偷;丁:我没有偷.则说真话的人是__________,偷珠宝的人是__________.

18.(2004 年上海市竞赛)已知集合 $M=\{(a,b)\mid(y^2+4)a^2-2(xy+by+8)a+x^2+2bx+2b^2+12$ 是关于 x,y 一次式的平方$\}$,当(a,b)取遍集合 M 的所有元素时,点(a,b)到原点 O 的最大距离是__________.

19.(2004 年复旦大学自主招生)有 1987 个集合,每个集合有 45 个元素,任意两个集合的并集有 89 个元素,问此 1987 个集合的并集有多少个元素.

20.(第五届西部数学奥林匹克)设 $S=\{1,2,\cdots,2005\}$,若 S 中任意 n 个两两互质的数组成的集合中都至少有一个质数,试求 n 的最小值.

第二节　常用逻辑用语

项目一　知识概要

1. 简单命题与复合命题

命题的概念：命题是指可以判断真假的语句. 要注意：开语句(如“$x^2-3x+2=0$”这种含变量的语句)、疑问句、祈使句这些没有做出判断的语句都不是命题.

简单命题：不含逻辑联结词的命题.

复合命题：由简单命题与逻辑联结词构成的命题. 简单的逻辑联结词有“或($\vee$)”、“且($\wedge$)”、“非($\neg$)”. 复合命题有“p 或 q($p\vee q$)”、“p 且 q($p\wedge q$)”、“非 p($\neg p$)”三种形式. 当 p,q 中有一个为真时，$p\vee q$ 为真；当 p,q 均为真时，$p\wedge q$ 为真；p 与$\neg p$ 的真假相反.

2. 四种命题

原命题：若 p 则 q；

逆命题：若 q 则 p；

否命题：若$\neg p$ 则$\neg q$；

逆否命题：若$\neg q$ 则$\neg p$.

原命题与它的逆否命题是等价命题，而原命题与其逆命题是不等价命题.

利用反证法证明命题的理论依据是“原命题与逆否命题的等价性”. 若所要证明的结论中含有“至多”、“至少”、“不是”、“唯一”、“存在”、“有限(无限)”等这些词时，常常用反证法.

3. 量词

量词分为“全称量词($\forall$)”和“存在量词($\exists$)”. 含有全称量词的命题，叫全称命题. 含有存在量词的命题叫特称命题. 全称命题的否定是特称命题，特称命题的否定是全称命题.

4. 充要条件

条件 p 与结论 q 的四种关系：

p 是 q 的充分而不必要条件($p\Rightarrow q$，且 $q\not\Rightarrow p$)；p 是 q 的必要而非充分条件($p\not\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$)；p 是 q 的充要条件($p\Leftrightarrow q$)；p 既不是 q 的充分条件也不是必要条件($p\not\Rightarrow q$，且 $q\not\Rightarrow p$).

项目二　例题精选

任务 1：简单命题真假的判断.

【例题 1】　已知 a,b 为实数，给出命题：若 $x^2+ax+b=0$ 有实数解，则 $a^2-4b\geqslant 0$. 试写出该命题的逆命题、否命题和逆否命题，并判断这些命题的真假.

【分析】　直接根据一元二次方程有无实根的性质进行判断.

【解答】　逆命题：若 $a^2-4b\geqslant 0$，则 $x^2+ax+b=0$ 有实数解.

否命题：若 $x^2+ax+b=0$ 无实数解，则 $a^2-4b<0$.

逆否命题：若 $a^2-4b<0$，则 $x^2+ax+b=0$ 无实数解.

由于原命题、逆命题均为真命题，因此四个命题均为真命题.

【思考】 (1)解决本题的关键是分清原命题中的条件与结论，正确写出条件、结论的否定形式，并掌握四种命题的组成结构.

(2)在四个命题中，任意两个命题之间的关系或是“互否”，或是“互逆”，或是“互为逆否”，而互为逆否命题的两个命题具有相同的真假性；互为逆命题或否命题的两个命题不具有相同的真假性.

任务2：命题的否定形式

【例题2】 写出下列命题的“$\neg p$”命题：

(1)命题 p：所有素数是奇数；

(2)命题 p：存在正整数 n，使不等式 $2^n<2n+1$ 成立.

【分析】 上述两个命题分别是全称命题和存在命题. 在命题中“所有的”、“存在一个”表示数量，它们分别被称为全称量词和存在量词，还可以用“任意的”、“每一个”等代替全称量词；用“有些”、“至少一个”等代替存在量词. 对于全称命题“任意 x 具有性质 p”，它的“$\neg p$”命题为“存在 x 不具有性质 p”；反之亦然.

【解答】 (1)此命题为全称命题，其“$\neg p$”命题为：存在一个素数不是奇数，或所有的素数不都是奇数.

(2)此命题为特称命题，其“$\neg p$”命题为：对于任意正整数 n，有不等式 $2^n\geqslant 2n+1$ 成立.

【思考】 (1)写命题的否定形式时，不能一律在关键词前加“不”，而要搞清这个命题研究的对象是个体还是全体. 如果研究对象是个体，那么将“是”改为“不是”，或将“不是”改为“是”即可. 如果研究对象不是个体，就要分清命题是全称命题，还是特称命题，从而写出否定形式.

(2)常用的否定陈述如下表：

正面词语	否定	正面词语	否定
都是	不都是	至多有一个	至少有两个
都不是	至少有一个是	p 或 q	$\neg p$ 且 $\neg q$
所有的(任意一个)	某些(存在一个)	p 且 q	$\neg p$ 或 $\neg q$
有些(至少一个)	一个都没有		

任务3：充要条件的判断

【例题3】 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，且 $f(m)f(n)\neq 0(m<n)$，证明方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的实根，且仅有一个实根属于 (m,n) 的充要条件为 $f(m)f(n)<0$.

【分析】 本题即证明两个互逆命题是真命题. 充分性即证 $f(m)f(n)<0$，则方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的实根，且仅有一个实根属于 (m,n)；必要性即证其逆命题.

【证明】 仅对 $a>0$ 的情况作证明，首先给出一个重要的恒等式

$4af(x)=(2ax+b)^2-(b^2-4ac)$ ①

又由 $m<n$，知 $2am+b<2an+b$ ②

(1)充分性：由①及已知有 $0>16a^2f(m)f(n)=[\Delta-(2am+b)^2][\Delta-(2an+b)^2]$ ③

这等价于$\begin{cases}\Delta>(2am+b)^2,\\ \Delta<(2an+b)^2,\end{cases}$或$\begin{cases}\Delta<(2am+b)^2,\\ \Delta>(2an+b)^2.\end{cases}$ ④

可见，两种情况下 $\Delta>0$，从而 $f(x)=0$ 有两个不相等的实根，记 $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. 这时④等价于$\begin{cases}x_1<m<x_2,\\ n<x_1 \text{ 或 } n>x_2,\end{cases}$或$\begin{cases}m<x_1 \text{ 或 } m>x_2,\\ x_1<n<x_2.\end{cases}$

等价于 $x_1<m<x_2<n$ 或 $m<x_1<n<x_2$，表明 $f(x)=0$ 仅有一个实根属于 (m,n).

(2)必要性：由已知有 $x_1<m<x_2<n$ 或 $m<x_1<n<x_2$ 成立，等价于$\begin{cases}x_1<m<x_2,\\ x_2<n,\end{cases}$或$\begin{cases}m<x_1,\\ x_1<n<x_2.\end{cases}$把求根公式代入，得$\begin{cases}-\sqrt{\Delta}<2am+b<\sqrt{\Delta},\\ \sqrt{\Delta}<2an+b,\end{cases}$或$\begin{cases}2am+b<-\sqrt{\Delta},\\ -\sqrt{\Delta}<2an+b<\sqrt{\Delta}.\end{cases}$

等价于$\begin{cases}(2am+b)^2<\Delta,\\ (2an+b)^2>\Delta,\end{cases}$或$\begin{cases}(2am+b)^2>\Delta,\\ (2an+b)^2<\Delta.\end{cases}$故有 $0>[\Delta-(2am+b)^2][\Delta-(2an+b)^2]=16a^2f(m)f(n)$，得 $f(m)f(n)<0$.

【思考】 证明本题的关键是建立恒等式①，作用是沟通方程 $f(x)=0$ 的根、$f(m)$、$f(n)$、判别式 Δ 之间的关系. 在证明充分性时，一定要注意对 $\Delta>0$ 的证明.

任务 4：配凑法的应用.

【例题 4】 已知 x 是整数，$F(x)=ax^2+bx+c$. 问：a,b,c 满足什么条件时，$F(x)$ 是整数？

【分析】 本题寻找对任何整数 x，$F(x)$ 均为整数的充要条件.

【解答】 首先寻求必要条件. 因为对任何整数 x，$F(x)=ax^2+bx+c$ 是整数，

所以 $F(0)=c$ 是整数，$F(1)=a+b+c$ 是整数，所以 $a+b$ 是整数.

又因为 $F(2)=4a+2b+c=2a+2(a+b)+c$ 是整数，所以 $2a$ 是整数.

下面证明，当 $c,a+b,2a$ 是整数时，对任何整数 x，$F(x)=ax^2+bx+c$ 是整数.

事实上，$F(x)=ax^2+bx+c=ax^2-ax+(a+b)x+c=ax(x-1)+(a+b)x+c$

$=2a\cdot\dfrac{x(x-1)}{2}+(a+b)x+c$. 因为 $x,c,a+b,2a$ 均为整数，所以 $F(x)$ 为整数.

【思考】 寻求使结论成立的充要条件，通常先求出必要条件，然后证明所得的必要条件是充分条件. 本题通过特殊方法寻求必要条件，在证明充分条件时，使用恒等变形的方法——配凑法.

任务 5：复合命题的真假判断

【例题 5】 已知 p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负实根，q：方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根，若 $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假. 求实数 m 的取值范围.

【分析】 本题涉及一元二次方程的判别式和根与系数的关系，一元二次不等式及不等式组，集合的补集，$p\vee q$，$p\wedge q$ 复合命题真假的判断.

【解答】

由 p：$\begin{cases}\Delta=m^2-4>0,\\ m>0,\end{cases}$解得 $m>2$. q：$\Delta=16(m-2)^2-16=16(m^2-4m+3)<0$.

因为 $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假，所以 p 为真，q 为假，或 q 为真，p 为假.

即$\begin{cases} m>2, \\ m\leqslant 1 \text{ 或 } m\geqslant 3 \end{cases}$或$\begin{cases} m\leqslant 2 \\ 1<m<3 \end{cases}$ 解得 $m\geqslant 3$ 或 $1<m\leqslant 2$.

【思考】 尽量把命题 p,q 简化，再根据题意 $p\vee q$ 为真，$p\wedge q$ 为假，推出所有的可能情况.

任务 6:是否存在问题

【例题 6】 (2011 年宗沪杯决赛)将 1,2,…,10 这十个数按着某一顺序排成一行，使得每相邻三个数的和都不超出 n. 问：

(1)当 $n=10$ 时，能否排成？请说明理由；

(2)当能够排成时，n 的最小值是多少？

【分析】 (1)当 $n=10$ 时，能否排成就要作出证明或者予以否定.

(2)当为 $n-1$ 时，不能排出，再证明为 n 时，可以排出，即得 n 的最小值.

【解答】 (1)假设 $n=10$ 时，已经排成，则后九个数之和小于或等于 30. 从而，第一个数不小于 25，矛盾. 故不能排成.

(2)与(1)的考虑方式相同. 当 $n=11,12,13,14$ 时，均不能排出.

当 $n=15$ 时，由前九个数之和小于或等于 45. 推出第十个数排 10，又从后面九个数之和小于或等于 45，推出第一个数排 10，然而只有一个 10，故也不能排出.

当 $n=16$ 时，可以排出. 如下

10,5,1,7,6,2,8,3,4,9，或 9,4,3,7,2,6,8,1,5,10. 据此知可以排出时，n 的最小值是 16.

【思考】 证明当 $n=10$ 时，若能排成，就会得到矛盾的结论；再证明当 $n=15$ 时，若能排成得出矛盾结论，当 $n=16$ 时，就要具体排出一行，从而得到 $n=16$ 为最小值.

任务 7:逻辑推理问题

【例题 7】 (1998 年上海市高中竞赛)旅游车上乘坐着日本、美国、法国三个国家的游客，现知道日本游客有 18 人，法国游客有 9 人；成年男游客中美国 5 人，法国 3 人；成年女游客中，法国 3 人，日本 5 人；男孩中日本 3 人，美国 2 人；女孩中美国 2 人，法国 1 人，还知道成年女游客比成年男游客少 2 人，而男孩和女孩一样多，则美国游客有多少人？

【分析】 采用解逻辑推理题的常用方法——表格法

【解答】 先将已知条件列成表格，如表 1：

表 1

	日本	美国	法国
成年男游客		5	3
成年女游客	5		3
男孩游客	3	2	
女孩游客		2	1
总人数	18		9

由表 1 知，应从法国人入手，法国男孩有 2 人，又男孩与女孩一样多，则日本女孩有 4 人；再看日本总人数是 18 人，则日本成年男游客有 6 人；又成年男游客比成年女游客多 2

人，则美国成年女游客有 4 人；最后看美国，其游客总人数为 $5+4+2+2=13$，即美国游客有 13 人(见表 2).

表 2

	日本	美国	法国
成年男游客	6	5	3
成年女游客	5	4	3
男孩游客	3	2	2
女孩游客	4	2	1
总人数	18	13	9

【思考】 对于这种类型的逻辑推理问题表格法是最重要的方法之一.

任务 8:推理问题的应用.

【例题 8】 (2009 年上海市 TI 杯竞赛)两个三位数写在一起形成了一个六位数.若这个六位数恰等于原来两个三位数乘积的整数倍,求这个六位数.

【解答】 设这个六位数为$\overline{abcdef}$.依题意可设$\overline{abcdef}=k\,\overline{abc}\cdot\overline{def}$,即

$\overline{abc}\cdot 1000+\overline{def}=k\,\overline{abc}\cdot\overline{def}$,所以,$\overline{abc}\mid\overline{def}$.

记$\overline{def}=l\,\overline{abc}$($l\in\{1,2,\cdots,9\}$),于是,$kl\,\overline{abc}^2=(1000+l)\overline{abc}$,

即 $kl\,\overline{abc}=1000+l$,从而 $l\mid 1000$.

故 $l=1$ 或 2 或 5.

若 $l=1$,则 $k\,\overline{abc}=1001=7\times 11\times 13$,只能是 $k=7$,$\overline{abc}=143$,此时六位数$\overline{abcdef}=143143$;

若 $l=2$,则$\overline{abc}<500$,且 $2k\,\overline{abc}=1002$,$k\,\overline{abc}=501=3\times 167$,只能是 $k=3$,$\overline{abc}=167$,此时,六位数$\overline{abcdef}=167334$;

若 $l=5$,则$\overline{abc}<200$,且 $5k\,\overline{abc}=1005$,$k\,\overline{abc}=201=3\times 67$,这不可能.

综上,所求的六位数为 143143 和 167334.

项目三 课外练习

A 组

1. 已知命题 p:不等式$\dfrac{2x+1}{x-1}>1$ 的解集是$\{x\mid x>-1\}$,命题 q:关于 x 的不等式 $2x^2-3x-1-a^2>0$ 的解集是无限集,则在"①$p\vee q$,②$p\wedge q$,③$\neg p$,④$\neg q$"形式的复合命题中,为真命题的是 ( )

A. ①与③　B. ②与③　C. ②与④　D. ①,③与④

2. 已知命题:若 $|k|\leqslant 1$,则关于 x 的不等式 $(k^2-4)x^2+(k+2)x-1\geqslant 0$ 的解集是空集,那么它的逆命题、否命题、逆否命题及原命题中,假命题的个数是 ( )

A. 4 个　B. 3 个　C. 2 个　D. 1 个

3. 已知 a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 均为非零实数,设命题 p:关于 x 的不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$