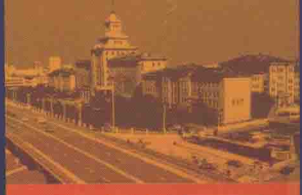


HIT

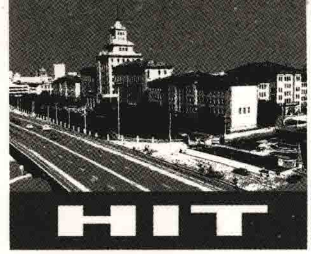
全国优秀数学教师专著系列

To Discover the Mathematical Essence With Inspiration
—Elementary Mathematics Study

数贝偶拾——初等数学研究

蒋明斌 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



全国优秀数学教师专著系列

数贝偶拾——初等数学研究

To Discover the Mathematical Essence With Inspiration

—Elementary Mathematics Study

蒋明斌 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书汇集了涉及函数、数列、不等式、圆锥曲线等初等数学方面的研究论文54篇.本书内容借鉴最新初等数学研究方面的理论与实践成果,在阐述理论内容的同时,结合中学数学内容,特别是近几年高考、各种竞赛的试题等,给出了具体的例子,并做了详细地解答.

本书适合于高中师生及广大数学爱好者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

初等数学研究/蒋明斌著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.4

(数贝偶拾)

ISBN 978-7-5603-4556-7

Ⅰ.①初… Ⅱ.①蒋… Ⅲ.①初等数学-研究

Ⅳ.①O12

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第309938号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 刘家琳

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006

传 真 0451-86414749

网 址 http://hitpress.hit.edu.cn

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张14.75 字数295千字

版 次 2014年4月第1版 2014年4月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-4556-7

定 价 38.00元

序言

中国社会科学院农村研究所研究员党国英认为：

> 冯小刚的电影《1942》触动了国人的神经.直到今天，集体饥饿的记忆还在严重地影响着国人的职业选择行为.人们把找工作叫找饭碗，把失业叫饭碗砸了.最好的工作不是自己认为最有趣的工作，而是最有保障的工作.相反，在农产品相对成本低，食物相对便宜的国家，例如美国，人们把吃饭不当一回事，便把兴趣作为职业选择的第一决定因素，如此创新潜力也就被更大地开发出来.

教师这个职业是一个相当古老的职业.这个职业中的很多人都是把它当作一个饭碗，但本书的作者蒋先生显然不是，他是把这项职业当成了一项事业来做，而且是很神圣的事业.微信中一位老农说得好：如果一件事，你今天做，明天还得做，那是工作；如果一件事，你今天做，明天还想做，那它就是事业.蒋先生做中学数学教育这件事，一做就是近30年，没有热爱，不视其为事业是很难坚持的.

在近30年的教学实践中,蒋先生边干边钻研发表了200多篇论文,而且大多发表在所谓的“核心期刊”上.如北师大的《数学通报》,华中师大的《数学通讯》,华东师大的《数学教学》,天津师大的《中等数学》.当然有些杂志现在早已停刊,如湖南教育出版社主办的由欧阳维城老先生担任主编的《数学竞赛》杂志,它是我国迄今为止,唯一一本专门刊登数学竞赛高端文章的杂志,因故停刊,着实可惜.

作家于坚曾说过:

> 专业首先要有量.如果到今天还是“一本书主义”,这一百年就白过了.专业精神正是资本主义最基本的一种精神.这不是你愿不愿意接受的问题,它是你的命运,如果你不是一个工匠式专业的写作,那你的写作会被淘汰.

对于初等数学论文的写作来说:质和量缺一不可,没有一定的量就不会达到一定的质.值得耐人寻味的是,如此高产的作者的知名度并不大,且仅限于圈内.

歌手朴树的父亲是北大教授叫濮祖荫,前些年他去做一次空间物理的讲座,主办方介绍,“这是朴树的爸爸.”下面二三十位研究生齐刷刷鼓掌.这种事不只一次发生.

空间物理界的同行说:你现在没有你儿子出名了.其实朴树的学历仅是高中毕业.

这就是中国目前的现状,中国年青人对周杰伦的喜爱和熟悉程度远远超过了华罗庚、陈省身、丘成桐.虽然在大多数人的眼中这再正常不过了,但这绝对是中国的不幸.不过对于热爱初数研究的蒋先生来说这可能倒是一件幸事.在没有关注的环境中往往能研究出一点真正有价值的东西,自己认为自己成功就可以,或圈内同行认可就够了,何必再苛求社会的认可.

高晓松在2011年3月27日21:55发了一条微博:

> 其实没几个孩子长大真成功了,而且成功是命,无法教育.所以最需要最实用的教育是:如何在没能成功的人生里随遇而安,心安理得地混过漫长的岁月而不怨天尤人.这时候,那些“没用”的东西就变得弥足珍贵.

高晓松这里所说的“没用”的东西当然是指音乐,亦或还包括文学和艺术,对于痴迷数学的人来说,也包括数学(非应试类).

蒋先生的初数研究面很宽,题材很多,但笔者认为不等式是其中的精华,不等式的本质是排序.相信许多人都听到过这样的说法:泼洗澡水时不要把婴儿一起泼了出去(Don't throw the baby out with the bath water).老实讲我们最初听到这种表述时,就觉得疑点甚多.婴儿怎么会如此之脏?洗澡水会混浊得连

孩子在里面也看不清吗？天下竟有这么粗心大意的家长？留美经济学博士，中央电视台女播音员李瑞英之夫张宇燕研究员给出了一个专业解释，他认为：此“典”不仅有出处，而且从“逻辑上”推测，恐怕还有相当多的经验基础呢！

据说在1 500年以前，绝大多数的英国人一年之中只是在5月洗一次澡．那时候洗澡这项相当奢侈的“服务”，是一家人在盛满热水的大盆里按“长幼尊卑”的顺序共同享用的．入浴时家中的男性长者为先，其次是成年男子，接下来为妇女，然后才轮到孩子们．依此次序，最后一位洗澡的应是家中年龄最小的成员，而且很可能就是一两岁的婴儿．当时的欧洲家庭规模都不小，经过一年时间人的肮脏程度不难想象，根据分工给婴儿洗澡的活儿大多由妇女承担，而倒水这样的重体力活则由家中的壮劳力干．“能见度”很低的洗澡水恰好又赶上天色较暗，即使不太粗心的父亲或叔伯，都完全有可能在泼洗澡水时“犯错误”．

不等式的研究属于顶天立地型，下可接中学数学之地气，上可攀世界现代数学研究之高峰．

本书的文章发表的时间跨度很大，早期的发表于20世纪80年代，近期的发表于近几年．笔者也是从那时开始数学论文写作的，那个时代中学数学教学研究十分红火．上海教育出版社还专门出版了一套《初等数学论丛》丛书，像莫绍奎、常庚哲、单壿、蒋生、苏淳等大家都积极投稿，但后来也夭折了．

20世纪80年代理想主义的盛行，除了压抑后的政治清明，还有“现代化”这么一个让人兴奋的东西．它似乎言之凿凿地会在未来的某个时候出现．其在政治、社会、经济方面的伟大抱负，给了人们明确的心理预期．不需要心理防御，活在这种魅化的理想中，人是幸福的，人能够超越世俗生活，是因为既可以赋予现在的生活以意义，又可以相信会有更好的生活．

但它很快烟消云散．20世纪90年代，马上对这种理想主义进行了祛魅．被确定的未来，其确定性开始暗淡，而“现代化”被还原成世俗的物质主义，以及阶层的博弈进程．这样的政治社会背景，不再适合20世纪80年代的那种理想的存在，它已显得是多么的天真可笑．

此后的社会演化过程，不过是加剧了20世纪90年代露出历史地表的那些东西：越来越物质主义；越来越功利、浮躁；越来越短视．

蒋先生早年在农村学校，那种耕读生活令人向往．据浙大的一位生物学家回忆：1940年，浙大理学院迁至离遵义75公里的湄潭县，苏步青老师一家十口（那时他还带着一位从平阳家乡来的女亲戚，他家里人都称她为表姐）住在湄潭南门外的破庙中（朝贺寺）．庙很小，搬走了四大天王和弥勒佛等一批神像才能入住．苏先生对这位生物学家说：

> 白天忙着教课和家务，里里外外，马不停蹄，夜里先要张罗家务，等到一家人陆续入睡后，夜阑人静，万籁俱寂，他才开始专心写研究论文．钢笔

在纸上写着算式，笔尖接触白纸，发出一些微动的声响，好像音弦演奏的乐曲，对自己既是一种陶冶，也是一种慰籍，心情也十分舒畅了.

在山水之间耕读，是一种有着高度文化抱负和理想追求的农耕生活方式，是中国传统文化的价值取向，是士阶层的精神寄托. 清高、怀远、超脱，淡然是士人格的理想境界. 古代士人的山水情怀与耕读生活的结合，士人的精神移民与士人的大同理想的文化移植，造就了一个农业文明中充满诗意的乡村自治的文化形态.

近日有一本叫《自由》的小说热卖，它的作者是美国一个当红的作家叫乔纳森·弗兰岑，他应该40多岁，为了写作，他从闹市搬到一个悬崖旁边住，写作的时候把自己的耳朵捂上，眼睛也蒙上，在完全的寂静和黑暗当中写作，他写的《自由》这本书有600多页. 中国美女作家蒋方舟评价说：我个人觉得最理想的写作环境应该是平静，能够拒绝得了诱惑的.

本书的书名是笔者给起的，源自于笔者中学时读过的一本秦牧的《艺海拾贝》印象深刻，颇觉贴切，但愿作者和读者都能接受!

刘培杰
2013年12月17日
于哈工大

前言

20世纪80年代第四个年头，作者从四川一所师范学院数学系毕业，分配到一所农村中学任教，为了尽快熟悉中学数学教学工作，作者阅读了大量的参考书，订阅了十多种数学期刊．通过研读，结合自己的教学，尝试着将一些研究成果撰写成论文，投稿到有关刊物，自1985年第一篇论文在《中学理科参考》上发表，至今二十多年中，在《数学通报》、《数学教学》、《中等数学》、《数学通讯》、《中学数学》、《中学教研》、《中学数学研究》、《数学传播》（中国台湾）、《数学教育》（中国香港）、《数学竞赛》、《数学奥林匹克与数学文化》等书刊上发表了论文200多篇，现从中选出120篇编成本书．

本书包括奥数题研究、高考数学题研究和初等数学研究共三卷，第一卷收录了对奥数题的解法、背景、推广、加强等方面研究的论文41篇；第二卷收录了对高考数学题的解法、背景、推广等方面研究的论文25篇；第三卷收录了涉及函数、数列、不等式、圆锥曲线等初等数学研究论文54篇．这些都是作者随机研究的成果，所谓随机研究就是从教学中自己找问题进行研究．教师天天在课堂，天天和学生打交道，可供研究的

问题很多,只要我们处处留心,多思善想,定会发现问题,再想办法解决问题,这一过程就是研究.新课程理念中有一个观点就是教师要做研究者,把教学过程作为研究过程,教师在教学及研究过程中实现自我发展.在第三卷书末有一篇作者的体会“谈谈如何撰写数学教研论文”可供参考.研究初等数学也是作者的业余爱好,这些成果是作者在数学大海中偶尔拾得的几个小小贝壳.作者原打算将“奥数题.高考题.初等数学研究”作为书名,刘培杰先生建议将三卷书名分别改为“数贝偶拾——奥数题研究、数贝偶拾——高考数学题研究、数贝偶拾——初等数学研究”,作者正暗合此意,欣然采纳.

值本书出版之际,作者对多年来在教学及初等数学研究中给予支持关心的领导、老师及同行表示衷心的感谢!特别要感谢我的老师——西华师范大学康纪权教授的帮助与鼓励,感谢天津宝坻的杨世明先生的指导,还要感谢哈尔滨工业大学出版社的刘培杰先生和其他编辑们,刘培杰先生为本书的出版付出了很多心血,百忙之中为本书作序,其他编辑老师,为本书的出版也付出了辛勤的劳动.

因本人水平有限,书中可能有许多错误与不足,敬请同行不吝赐教,有关意见或建议发至 scpajmb@tom.com.

蒋明斌

2011 年 10 月

目录

关于函数周期性的一个猜想的完善、推广及应用

作者在 1991 年初提出如下的猜想：

猜想[1] 设 λ 为非零常数，a,b 为实常数，$b\neq 0$，函数 $f(x)$ 满足

$$f(x+\lambda)=af(x)+bf(x-\lambda) \tag{1}$$

则 $f(x)$ 为周期函数当且仅当 $b=-1$ 且 $a=\cos\frac{2k\pi}{m}(k,m\in\mathbf{N}^*,k<m)$，且此时周期为 $m\lambda$.

首先指出，猜想提出不久（文[1] 发表之前），作者就发现，当 $a=0,b=-1$ 时，满足式(1) 的任一 $f(x)$ 都是以 2λ 为周期的函数，因而必要性不成立，且必要性应理解为式(1) 的任一解 $f(x)$ 均为周期函数.

在寻求充分性的证明过程中，作者又发现，当 $b=-1$ 且 $a=\cos\frac{2k\pi}{m}(k,m\in\mathbf{N}^*,k<m)$ 时，存在满足式(1) 的 $f(x)$ 不为周期函数，如 $f(x)=(-1)^x(x\in\mathbf{N}^*)$. 因而充分性不成立，需加上“$(k,m)=1,m>2$”这一条件，充分性才成立.

本文完善了这一猜想，并给出了证明，然后作若干推广，并应用有关结果解决了文[3] 中的 whc113.

为了便于推广，将式(1) 改写成

$$f(x+2\lambda)=af(x+\lambda)+bf(x) \tag{2}$$

并称方程

$$x^2=ax+b \tag{3}$$

为式(2) 的特征方程.

对 $\alpha\in\mathbf{C}$，若存在最小正整数 m，使 $\alpha^m=1$，则称 α 为 m 次单位根.

当 $b=-1$ 且 $a=\cos\frac{2k\pi}{m}(k,m\in\mathbf{N}^*,k<m,(k,m)=1,m>2)$ 时，方程(3) 的两根 $\cos\frac{2k\pi}{m}\pm\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{m}$ 为不同的 m 次单位根；当 $a=0,b=-1$ 时，方程(3) 的两根 ±1 为不同的二次单位根. 因此，我们将猜想修正为：

定理1 方程(2) 的任一解 $f(x)$ 为周期函数的充要条件为其特征方程(3) 有相异根，且均为 m 次单位根，此时周期为 $m\lambda$. 也就是或 $a=0,b=-1$，此时周期为 2λ；或 $b=-1$ 且 $a=\cos\frac{2k\pi}{m}(k,m\in\mathbf{N}^*,k<m,(k,m)=1,m>2)$，此时

周期为 $m\lambda$.

证明 必要性,不妨设 $\lambda > 0$,式(2) 的任一解均为周期函数,对方程(3) 的任一根 α,若 $\alpha \in \mathbf{R}$,可取式(2) 的一特解 $f(x)$,使对任何 $n \in \mathbf{Z}$,当 $x \in [n\lambda, (n+1)\lambda)$ 时,$f(x) = \alpha^n$. 易知 $f(0) = 1$,由 $f(0) = 1$ 及 $f(x)$ 为周期函数,必有 $m(m \in \mathbf{Z}^+)$ 使 $\alpha^m = 1$;

若 $\alpha = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(r > 0)$ 为虚数,可取式(2) 的一特解 $f(x)$,使对任何 $n \in \mathbf{Z}$,当 $x \in [n\lambda, (n+1)\lambda)$ 时,$f(x) = \alpha^n f(x) = r^n \cos n\theta$. 易知 $f(0) = 1$,由 $f(0) = 1$ 及 $f(x)$ 为周期函数可得 $r = 1$(否则,若 $0 < \alpha < 1$,则当 $n \to \infty$ 时,$f(x) \to 0$;若 $\alpha > 1$,则当 $n \to \infty$ 时,$|f(x)| \to +\infty$. 两种情形都不可能有无穷多个 $f(x) = 1$). 再由周期性,必有 $m(m \in \mathbf{Z}^+)$ 使 $\cos n\theta = 1$ 即 $\alpha^m = 1$.

以上两种情形均有 α 为单位根. 若方程(3) 的单位根 α 为重根,显然 $\alpha = \pm 1$,可取式(2) 的特解 $f(x)$,使对任何 $n \in \mathbf{Z}$,当 $x \in [n\lambda, (n+1)\lambda)$ 时,$f(x) = nx^n$,显然不是周期函数,因此方程(3) 的单位根不可能为重根.

显然,方程(3) 的相异单位根同为 m 次单位根.

充分性,设方程(3) 有相异单位根 α_1, α_2,且均为 m 次单位根,$\alpha_1^m = 1, \alpha_2^m = 1(m \in \mathbf{N}^*)$,对每一个 $x_0 \in \mathbf{R}$,令 $x_n = x_0 + n\lambda(n \in \mathbf{N}^*)$,由式(2) 可知,$f(x_n) = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n$,其中 c_1, c_2 为常数,由 $f(x_0), f(x_1)$ 所确定,于是 $f(x_m) = c_1\alpha_1^m + c_2\alpha_2^m = c_1 + c_2 = f(x_0)$,即 $f(x_0 + m\lambda) = f(x_0)$,故 $f(x)$ 为周期函数,且以 $m\lambda$ 为周期. 证毕.

注 充分性另证:

当 $a = 0, b = -1$ 时,满足式(2) 的 $f(x)$ 显然为周期函数,周期为 2λ;

当 $b = -1$ 且 $a = \cos\frac{2k\pi}{m}(k, m \in \mathbf{N}^*, k < m, (k,m) = 1, m > 2)$ 时,方程 $t^2 = \left(2\cos\frac{2k\pi}{m}\right)t - 1$ 的两根为

$$\alpha = \cos\frac{2k\pi}{m} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{m}, \beta = \cos\frac{2k\pi}{m} - \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{m}$$

显然 $\alpha \neq \beta, \alpha^m = 1, \beta^m = 1, \alpha + \beta = 2\cos\frac{2k\pi}{m}, \alpha\beta = 1$,由式(1) 有

$$\begin{aligned} f[x + (m+1)\lambda] = \left(2\cos\frac{2k\pi}{m}\right)f(x + m\lambda) - f[x + (m-1)\lambda] = \\ (\alpha + \beta)f(x + m\lambda) - \alpha\beta f[x + (m-1)\lambda] \\ f[x + (m+1)\lambda] - \alpha f(x + m\lambda) = \\ \beta\{f(x + m\lambda) - \alpha f[x + (m-1)\lambda]\} = \\ \beta^2\{f[x + (m-1)\lambda] - \alpha f[x + (m-2)\lambda]\} = \cdots = \\ \beta^m[f(x + \lambda) - \alpha f(x)] = \end{aligned}$$

$$f(x+\lambda)-\alpha f(x)$$

即

$$f[x+(m+1)\lambda]-\alpha f(x+m\lambda)=f(x+\lambda)-\alpha f(x)$$

同理,有

$$f[x+(m+1)\lambda]-\beta f(x+m\lambda)=f(x+\lambda)-\beta f(x)$$

两式相减,并注意到 $\alpha\neq\beta$,得

$$(\alpha-\beta)f(x+m\lambda)=(\alpha-\beta)f(x)\Leftrightarrow f(x+m\lambda)=f(x)$$

即 $f(x)$ 为周期函数,$m\lambda$ 为其一个周期.

推论 1 设 a,b,λ 同定理 1,c 为实常数,$a+b\neq 1$,则

$$f(x+2\lambda)=af(x+\lambda)+bf(x)+c(a,b\text{ 为实常数},b\neq 0)\tag{4}$$

的任一解均为周期函数的充要条件是方程(3) 有相异根,且均为 m 次单位根,此时周期为 $m\lambda$.

证明 令 $g(x)=f(x)+\dfrac{c}{1-a-b}$,由式(4) 有 $g(x+2\lambda)=ag(x+\lambda)+bg(x)$,由定理 1 知推论 1 成立.

定理 1 可以推广为:

定理 2 设 λ 为非零常数,函数 $f(x)$ 满足

$$f(x+k\lambda)=a_1f[x+(k-1)\lambda]+a_2f[x+(k-2)\lambda]+\cdots+a_kf(x)\tag{5}$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为实常数,$a_k\neq 0(k\in\mathbf{N}^*)$,则式(5) 的任一解 $f(x)$ 为周期函数的充要条件是其特征方程

$$x^k=a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_{k-1}x+a_k\tag{6}$$

的根 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为相异单位根,若 α_i 为 m_i 次单位根$(i=1,2,\cdots,k)$,m 为 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 的最小公倍数,则此时 $f(x)$ 的周期为 $m\lambda$.

证明与定理 1 类似,这里从略.

推论 2 设 $\lambda,m,a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 同定理 2,c 为实常数,$a_1+a_2+\cdots+a_k\neq 1$, 函数 $f(x)$ 满足

$$f(x+k\lambda)=a_1f[x+(k-1)\lambda]+a_2f[x+(k-2)\lambda]+\cdots+a_kf(x)+c\tag{7}$$

则式(7) 的任一解 $f(x)$ 为周期函数的充要条件是其方程(6) 的根为相异单位根,此时的周期为 $m\lambda$.

证明 令 $g(x)=f(x)+\dfrac{c}{1-a_1-a_2-\cdots-a_k}$,则

$$g(x+k\lambda)=a_1g[x+(k-1)\lambda]+a_2g[x+(k-2)\lambda]+\cdots+a_kg(x)$$

由定理 2 知,推论 2 成立.

在定理 2 及推论 2 中,取 $\lambda=1,x=n\in\mathbf{N}^*,x_n=f(n+k)$,可得:

推论 3　设 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为实常数，$a_k\neq 0(k\in\mathbf{N}^*)$，则由给定的 k 个初值 $x_i(i=1,2,\cdots,k)$ 及递推关系

$$x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+\cdots+a_kx_{n-k} \tag{8}$$

所确定任一数列 $\{x_n\}$ 均能为周期数列的充要条件是其特征方程(6) 有 k 个不同的单位根，此时周期为 m(m 同定理 2).

推论 4　设 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$，m 同定理 2，c 为实常数，$a_1+a_2+\cdots+a_k\neq 1$，满足

$$y_n=a_1y_{n-1}+a_2y_{n-2}+\cdots+a_ky_{n-k}+c \tag{9}$$

的任一数列 $\{y_n\}$ 均能为周期数列的充要条件是其特征方程(6) 有 k 个不同的单位根，此时周期为 m.

由此，我们给出了 k 阶常系数线性递归数列为周期数列的充要条件. 值得一提的是，文[2] 给出的仅仅为充分条件，文[3] 将其误认为充要条件.

另外，将方程(6) 变形为

$$F(x)=x^k-a_1x^{k-1}-a_2x^{k-2}-\cdots-a_{k-1}x-a_k \tag{10}$$

注意到式(10) 是实系数方程，易知，$F(x)=0$ 有 k 个不同的单位根当且仅当：

(1) k 为奇数时

$$F(x)=(x+1)\prod_{i=1}^{\frac{k-1}{2}}\left[x^2-\left(2\cos\frac{2k_i\pi}{m_i}\right)x+1\right] \tag{11}$$

或

$$F(x)=(x-1)\prod_{i=1}^{\frac{k-1}{2}}\left[x^2-\left(2\cos\frac{2k_i\pi}{m_i}\right)x+1\right] \tag{12}$$

(2) k 为偶数时

$$F(x)=(x^2-1)\prod_{i=1}^{\frac{k}{2}-1}\left[x^2-\left(2\cos\frac{2k_i\pi}{m_i}\right)x+1\right] \tag{13}$$

或

$$F(x)=\prod_{i=1}^{\frac{k}{2}}\left[x^2-\left(2\cos\frac{2k_i\pi}{m_i}\right)x+1\right] \tag{14}$$

其中 $k_i,m_i\in\mathbf{N}^*$，$(k_i,m_i)=1$，$k_i<m_i$，$\cos\frac{2k_i\pi}{m_i}$ 互不相同，$m_i>2(i=1,2,\cdots,\frac{k-1}{2}$ 或 $\frac{k}{2})$.

由此，可对文[3] 中的 whc113“是否不用特征根，仅据 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 直接判别 k 阶常系数线性递归数列周期性方法(条件)？”作出肯定回答. 我们有：

定理 3　存在用 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 直接判别 k 阶常系数线性递归数列周期性的条件.

证明　将上述式(11) ~ (14) 展开成 x 的 k 次多项式,再与式(10) 的左边比较同次项的系数即得 $a_1,a_2,\cdots,a_k$. 证毕.

定理 3 从理论上解决了 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的存在性,当 k 较大时,要具体求出 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$,则较为麻烦.

下面给出 $k=3,4$ 的结论.

定理 4　设 $a_i(i=1,2,3)$ 为实常数,$a_3\neq 0$,则由给定的初值 $x_i(i=1,2,3)$ 及递推关系

$$x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+a_3x_{n-3} \tag{15}$$

所确定的任一数列 $\{x_n\}$ 为周期数列的充要条件为

$$a_1=2\cos\frac{2k\pi}{m}-1,a_2=2\cos\frac{2k\pi}{m}-1,a_3=-1$$

或

$$a_1=2\cos\frac{2k\pi}{m}+1,a_2=-\left(2\cos\frac{2k\pi}{m}+1\right),a_3=1$$

(k,m 同定理 1,此时周期为 m).

证明　在式(11),(12) 中,取 $k=3$,则有

$$F(x)=(x+1)\left[x^2-\left(2\cos\frac{2k\pi}{m}\right)x+1\right]=$$

$$x^3-\left(2\cos\frac{2k\pi}{m}-1\right)x^2-\left(2\cos\frac{2k\pi}{m}-1\right)x+1$$

或

$$F(x)=(x-1)\left[x^2-\left(2\cos\frac{2k\pi}{m}\right)x+1\right]=$$

$$x^3-\left(2\cos\frac{2k\pi}{m}-1\right)x^2+\left(2\cos\frac{2k\pi}{m}+1\right)x-1$$

将它们分别与 $F(x)=x^3-a_1x^2-a_2x-a_3$ 比较 x 的同次项系数即得.

定理 5　设 $a_i(i=1,2,3,4)$ 为实常数,$a_4\neq 0$,则由给定的初值 $x_i(i=1,2,3,4)$ 及递推关系

$$x_n=a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}+a_3x_{n-3}+a_4x_{n-4} \tag{16}$$

所确定的任一数列 $\{x_n\}$ 为周期数列的充要条件为

$$a_1=2\cos\frac{2k\pi}{m},a_2=0,a_3=-2\cos\frac{2k\pi}{m}-1,a_4=1$$

k,m 同定理 1,此时周期为 m,或

$$a_1=2\left(\cos\frac{2k_1\pi}{m_1}+\cos\frac{2k_2\pi}{m_2}\right),a_2=-\left(\cos\frac{2k_1\pi}{m_1}+\cos\frac{2k_2\pi}{m_2}+1\right)$$

$$a_3 = 2\left(\cos\frac{2k_1\pi}{m_1} + \cos\frac{2k_2\pi}{m_2}\right), a_4 = -1$$

$$\left(k_i, m_i \in \mathbf{N}^*, k_i < m_i, (k_i, m_i) = 1, m_i > 2(i = 1,2), \cos\frac{2k_1\pi}{m_1} \neq \cos\frac{2k_2\pi}{m_2}\right)$$

周期为 m_1, m_2 的最小公倍数.

证明　在式(13),(14)中,取 $k = 4$,则有

$$F(x) = (x^2 - 1)\left[x^2 - \left(2\cos\frac{2k\pi}{m}\right)x + 1\right]$$

或

$$F(x) = \left[x^2 - \left(2\cos\frac{2k_1\pi}{m_1}\right)x + 1\right]\left[x^2 - \left(2\cos\frac{2k_2\pi}{m_2}\right)x + 1\right]$$

分别将它们展开与 $F(x) = x^4 - a_1x^3 - a_2x^2 - a_3x - a_4$ 比较 x 的同次项系数即得.

参考文献

[1] 蒋明斌. 迭代. 递归. 一类函数的周期性[J]. 中学数学(湖北),1991(5).

[2] 黄闻宇. 常系数齐次或非齐次线性递归数列是周期数列的一个充分条件[J]. 数学通讯,1989(4).

[3] 杨之. 初等数学研究的问题与课题[M]. 湖南教育出版社,1993.