

分枝过程中的 矩量问题

Fenzhi Guocheng Zhongde
Juliang Wenti

梁新刚◎著



中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

分枝过程中的 矩量问题

Fenzhi Guocheng Zhongde
Juliang Wenti

梁新刚◎著



中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

图书在版编目 (CIP) 数据

分枝过程中的矩量问题/梁新刚著.

北京: 中国经济出版社, 2014. 8

ISBN 978 - 7 - 5136 - 3399 - 4

I. 分… II. ①梁… III. ①分枝—矩量问题—研究

IV. ①O177. 91 ②O174. 43

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 179900 号

责任编辑 王 建

责任审读 贺 静

责任印制 巢新强

封面设计 华子图文设计公司

出版发行 中国经济出版社

印 刷 者 北京市媛明印刷厂

经 销 者 各地新华书店

开 本 880mm × 1230mm 1/32

印 张 5.375

字 数 160 千字

版 次 2014 年 8 月第 1 版

印 次 2014 年 8 月第 1 次

定 价 38.00 元

广告经营许可证 京西工商广字第 8179 号

中国经济出版社 网址 www.economyph.com 社址 北京市西城区百万庄北街 3 号 邮编 100037

本版图书如存在印装质量问题, 请与本社发行中心联系调换 (联系电话: 010 - 68330607)

版权所有 盗版必究 (举报电话: 010 - 68355416 010 - 68319282)

国家版权局反盗版举报中心 (举报电话: 12390) 服务热线: 010 - 88386794

前言

分枝过程是一种特殊的随机过程，是描述一组粒子分裂或灭亡过程的数学模型。学术界对分枝过程的研究已经超过了半个世纪。20 世纪 30 年代，这一模型被尝试着应用于分析英国贵族姓氏的存亡问题。这一研究的飞速发展则始于 20 世纪 40 年代末 50 年代初，许多学者对这一模型做了大量的研究，如 Kolmogorov、Yaglom、Sevastyano、Harris、Bellman 等。大量关于分枝过程的书籍也陆续出现（如文后注 [4] [7] [28] [51] [31]）。1969 年，Smith 和 Wilkinson 将随机环境引入了分枝过程，使之所描述的过程更加接近于现实；分枝过程与随机游动的结合——分枝随机游动，使得研究内容不再仅限于粒子数量，还涉及粒子位置的分布。很多学者都对这个模型进行了深入的研究，如 Athreya、Kahane、Biggins、Lyons、Liu 等。随着计算机科学的发展，分枝过程在快速排序算法、数据结构、组合理论、分子生物学（如 DNA 序列）等问题中都有着广泛的应用。

在分枝过程这一课题中, 该模型的极限性质是一个很重要的研究内容, 如粒子数的退化性、收敛性和极限分布等。本书重点从粒子数的矩量角度来研究该模型的极限性质; 矩量问题与收敛速度、收敛分布等问题都有很密切的联系。经典的 Galton-Watson 过程中的矩量问题最早由 Kesten 和 Stigum 进行研究, 给出了著名的 Kesten-Stigum 定理; 其后 Bingham 和 Doney 给出了矩存在的充要条件, 并在一定的条件下研究了加权矩的存在性问题; 20 多年后, Lyons 给出了加权分枝过程的非退化条件, Liu 给出了 α -阶矩的充要条件, Alsmeyer、Rösler、Kuhlbusch 将 Bingham 和 Doney 的条件减弱, 给出了 (加权) 分枝过程中加权矩的存在性条件。对于随机环境中的分枝过程, Tanny 给出了非退化的充要条件, Guivarc'h 和 Liu 给出了 α -阶矩的存在性条件; 对于随机环境中的加权分枝过程, 其非退化性由 Biggins 和 Kyprianou、Kuhlbusch 给出。

本书的主要内容是研究 (加权) 分枝过程 (包括常环境和随机环境) 中的矩量问题, 在介绍已有研究成果的基础上, 进一步研究相关的 (加权) 矩量问题。具体地讲: 本书将文献 [1] [3] [18] [19] 中的条件去掉, 直接给出分枝过程和加权分枝过程中的加权矩存在性条件; 同时本书还研究了随机环境中的分枝过程和加权分枝过程, 给出了这两类过程中的 α -阶

矩和加权矩的存在性条件。

本书分为四章。第一章为预备知识，主要介绍概率论和随机过程中的一些基本概念、定理和不等式，以及缓变函数的相关内容，以便于后文定理证明中的直接应用；第二章主要研究经典的分枝过程，并给出其（加权）矩的相关结果；第三章主要研究随机环境中的分枝过程，并给出其（加权）矩的相关结果；第四章主要研究加权分枝过程的矩量问题，并给出其相关结果。在第四章的最后一节中，本文还介绍了随机环境中的加权分枝过程，并给出了其 α -阶矩和加权矩的相关结论。

由于本人水平有限，书中难免会有诸多错误和疏漏之处，敬请同行与读者批评指正。

作者

2014年6月

目 录

前 言	1
第一章 预备知识	1
1.1 概率论的基本概念	1
1.2 期望	5
1.3 条件期望	11
1.4 随机过程的基本概念	12
1.5 鞅	15
1.6 正则变化函数	22
第二章 分枝过程的矩量问题	32
2.1 模型与记号	32
2.2 α -阶矩	35
2.3 加权矩 I: $\alpha > 1$	39
2.4 加权矩 II: $\alpha = 1$	51

第三章 随机环境中分枝过程的矩量问题	60
3.1 模型与记号	60
3.2 α -阶矩	64
3.3 加权矩 I: $\alpha > 1$	78
3.4 加权矩 II: $\alpha = 1$	94
第四章 加权分枝过程的矩量问题	112
4.1 模型与记号	112
4.2 α -阶矩	117
4.3 加权矩 I: $\alpha > 1$	123
4.4 加权矩 II: $\alpha = 1$	134
4.5 随机环境中的加权分枝过程	144
参考文献	151
致 谢	161

第一章 预备知识

本章中，我们将简要地介绍一些预备知识，包括概率论和随机过程中的基本概念、鞅的概念与重要不等式，以及正则变化函数的相关性质。这些性质和不等式将在后续章节中经常出现。

1.1 概率论的基本概念

本节中，我们将介绍一些概率论中的基本概念及其性质。

定义1.1.1 设 $\mathcal{A}$ (英文中的 A) 为集合 Ω 的一个子集类，则在以 $\mathcal{A}$ 为定义域的广义实直线 (即一切实数和 $\pm\infty$ 的全体) 上取值的函数 $\phi(\cdot)$ 称为定义在 $\mathcal{A}$ 上的集函数。

定义1.1.2 设 Ω 为一个集合。则 Ω 的子集类 $\mathcal{A}$ 称为代数，如果满足

- (a) $\Omega \in \mathcal{A}$;
- (b) 如果 $A, B \in \mathcal{A}$, 则 $A \cup B \in \mathcal{A}$ 且 $A \cap B \in \mathcal{A}$;

(c) 如果 $A \in \mathcal{A}$, 则 $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ 。

注意在该定义中, 利用条件 (c), 条件 (b) 中只需要 $A \cup B \in \mathcal{A}$ 和 $A \cap B \in \mathcal{A}$ 二者之一成立即可。

定义1.1.3 设 $\mathcal{A}$ 为集合 Ω 的某个子集上的代数, 集函数 $\mu = \mu(A)$ ($A \in \mathcal{A}$) 取值为 $[0, \infty]$ 。如果对 $\mathcal{A}$ 中的任意两个互不相交的集合 A 和 B , 有

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

则称集函数 $\mu(\cdot)$ 为定义在 $\mathcal{A}$ 上的有限-可加测度。如果有限-可加测度 $\mu(\cdot)$ 满足 $\mu(\Omega) < \infty$, 则称 $\mu(\cdot)$ 是有限的; 当 $\mu(\Omega) = 1$ 时, 称 $\mu(\cdot)$ 为有限-可加概率测度。

定义1.1.4 集合 Ω 的子集类 $\mathcal{F}$ (英文中的 $\mathcal{F}$) 称为 σ -代数, 如果 $\mathcal{F}$ 是一个代数, 且满足下列性质:

(d) 如果 $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \dots$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \quad \text{且} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

实际上, 我们只需要其中一个式子成立即可。

定义1.1.5 设 $\mu(\cdot)$ 为定义在集合 Ω 的子集的代数 $\mathcal{A}$ 上的有限-可加测度。如果对于两两不相交的集合

$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, 有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

则称 $\mu(\cdot)$ 为 σ -可加测度, 简称为测度。如果 σ -可加测度 $\mu(\cdot)$ 还满足 $\mu(\Omega) = 1$, 则称 $\mu(\cdot)$ 为定义在代数 $\mathcal{A}$ 上的概率测度, 简称为概率。

显然, 由定义可以得出概率 $\mu(\cdot)$ 还具有以下一些性质:

- (a) 一切 $A \in \mathcal{A}$, $0 \leq \mu(A) \leq 1$, 且 $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$;
- (b) 若 $A, B \in \mathcal{A}$, 则

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B);$$

- (c) 若 $A, B \in \mathcal{A}$ 且 $B \subset A$, 则 $\mu(B) \leq \mu(A)$;
- (d) 若 $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, 且 $\bigcup A_n \in \mathcal{A}$, 则

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots.$$

定义1.1.6 设 Ω 为一个集合, $\mathcal{A}$ 为 Ω 的一些子集构成的 σ -代数, $\mu(\cdot)$ 为 $\mathcal{A}$ 上的测度, 则称 Ω 为空间, 二元组 $(\Omega, \mathcal{A})$ 为可测空间, 三元组 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为测度空间, $\mathcal{A}$ 中元素称为 $\mathcal{A}$ -可测集, 简称为可测集。特

别地, 如果 $\mu(\cdot)$ 为一个概率, 则称三元组 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为概率空间或概率场。

接下来, 我们将介绍一下随机变量的相关概念及其性质。

定义1.1.7 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 为一个概率空间, $\xi = \xi(\omega)$ ($\omega \in \Omega$) 是定义在 Ω 上的实值函数, 且对任何的实数 x ,

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F},$$

则称 ξ 关于 $\mathcal{F}$ 可测, 也称 ξ 为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上的一个随机变量; 函数

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}, \quad x \in \mathbf{R}$$

称为随机变量 ξ 的分布函数。

记 $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ (英文中的 B) 为 Borel 集, 即包含 $\mathbf{R}$ 上的所有开集的最小 σ -代数。

定义1.1.8 $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上的概率 $\mathbf{P}$ 连同

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$

称为随机变量 ξ 的概率分布。

定义1.1.9 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 为一个概率空间, ξ, η 为其上的两个随机变量。

(a) 如果

$$\mathbf{P}(\omega : \xi(\omega) \neq \eta(\omega)) = 0,$$

则称随机变量 ξ 和 η 是几乎处处 (a.s.) 相等;

(b) 如果

$$\mathbf{F}_\xi(x) = \mathbf{F}_\eta(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

则称随机变量 ξ 和 η 是同分布的。

定义1.1.10 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 为一概率空间, $\xi_1, \xi_2, \dots$ 为其上的一列随机变量。如果对任意有限下标组 $k_1, k_2, \dots, k_n$, 变量 $\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, \dots, \xi_{k_n}$ 独立, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_{k_1} \in B_{k_1}, \dots, \xi_{k_n} \in B_{k_n}\} = \\ \mathbf{P}\{\xi_{k_1} \in B_{k_1}\} \cdots \mathbf{P}\{\xi_{k_n} \in B_{k_n}\}, \end{aligned}$$

则称随机变量序列 $\xi_1, \xi_2, \dots$ 独立。

由随机变量独立的定义, 容易得到随机变量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 独立的充分必要条件是: 对所有的向量 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, 有

$$\mathbf{F}_{(\xi_1, \dots, \xi_n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{F}_{\xi_1}(x_1) \cdots \mathbf{F}_{\xi_n}(x_n).$$

1.2 期望

在本节中, 我们将介绍随机变量的数学期望以

及条件期望的相关概念与性质。

定义1.2.1 给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, 设 ξ 为该空间上的一个随机变量。

(a) 若 ξ 是一个非负简单函数, 即

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^n x_k I_{A_k}(\omega)$$

(其中, $n \in \mathbf{N}^+$, $x_k \geq 0$, $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$), 则定义 ξ 的数学期望 (简称期望) 为

$$\mathbf{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbf{P}(A_k),$$

其中, I_A 为示性函数 (当 $\omega \in A$ 时, $I_A(\omega) = 1$; 否则 $I_A(\omega) = 0$);

(b) 若 ξ 是非负随机变量, 定义 ξ 的数学期望为

$$\mathbf{E}\xi = \sup\{\mathbf{E}s : s \text{ 非负简单且 } s(\omega) \leq \xi(\omega), \forall \omega \in \Omega\};$$

(c) 若 ξ 是一个实随机变量, 记 $\xi^+ = \max(\xi, 0)$ 和 $\xi^- = \max(-\xi, 0)$ 。如果 $\mathbf{E}\xi^+$ 和 $\mathbf{E}\xi^-$ 中至少一个有限, 则称随机变量 ξ 的数学期望 $\mathbf{E}\xi$ 存在, 且定义 ξ 的数学期望为

$$\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\xi^+ - \mathbf{E}\xi^-.$$

如果 $\mathbf{E}\xi^+ < \infty$ 且 $\mathbf{E}\xi^- < \infty$, 则称 ξ 的数学期望有限 (或者 ξ 可积)。

对于随机变量的期望, 我们给出以下一些基本性质:

- (a) 若 $\mathbf{E}\xi$ 存在, a 为常数, 则 $\mathbf{E}(c\xi)$ 也存在, 且 $\mathbf{E}(c\xi) = c\mathbf{E}\xi$;
- (b) 若 $\mathbf{E}\xi$ 和 $\mathbf{E}\eta$ 都存在, 且 $\xi \leq \eta$, 则 $\mathbf{E}\xi \leq \mathbf{E}\eta$;
- (c) 若 $\mathbf{E}\xi$ 存在, 则 $|\mathbf{E}\xi| \leq \mathbf{E}|\xi|$;
- (d) 若 $\mathbf{E}\xi$ 和 $\mathbf{E}\eta$ 都存在, 且 $\mathbf{E}\xi + \mathbf{E}\eta$ 也存在, 则

$$\mathbf{E}(\xi + \eta) = \mathbf{E}\xi + \mathbf{E}\eta;$$

- (e) 若 $\mathbf{E}\xi$ 存在且 $A \cap B = \emptyset$, 则

$$\mathbf{E}(\xi I_{A \cap B}) = \mathbf{E}(\xi I_A) + \mathbf{E}(\xi I_B);$$

- (f) 若 $\xi = 0$ a.s. (即 $\mathbf{P}(\xi \neq 0) = 0$), 则 $\mathbf{E}\xi = 0$;
- (g) 若 $\xi = \eta$ a.s., 且 $\mathbf{E}\xi$ 和 $\mathbf{E}\eta$ 存在, 则 $\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}\eta$;
- (h) 若 $\xi \geq 0$ a.s., 且 $\mathbf{E}\xi = 0$, 则 $\xi = 0$ a.s.;
- (i) ξ 为可积的, 当且仅当 $\mathbf{E}|\xi| < \infty$; 而且此时, $|\xi| < \infty$ a.s.;
- (j) 若 $\mathbf{E}|\xi| < \infty$ 和 $\mathbf{E}|\eta| < \infty$, 且对一切的 $A \in \mathcal{F}$, 都有 $\mathbf{E}(\xi I_A) \leq \mathbf{E}(\eta I_A)$, 则 $\xi \leq \eta$;
- (k) 若 ξ 和 η 独立, 且 $\mathbf{E}|\xi| < \infty$ 和 $\mathbf{E}|\eta| < \infty$, 则 $\mathbf{E}(\xi\eta) = \mathbf{E}\xi \cdot \mathbf{E}\eta$ 。

接下来, 我们介绍一下关于数学期望的极限定理和不等式。

定理1.2.1 (单调收敛定理) 设 $\eta, \xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ 为一列随机变量序列。

(a) 若 $\xi_n \geq 0$ a.s. ($\forall n \geq 1$) 且 $\xi_n \uparrow \xi$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\xi_n = \mathbf{E}\xi;$$

(b) 若 $\xi_n \geq \eta$ ($\forall n \geq 1$), $\mathbf{E}\eta > -\infty$, 且 $\xi_n \uparrow \xi$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\xi_n = \mathbf{E}\xi;$$

(c) 若 $\xi_n \leq \eta$ ($\forall n \geq 1$), $\mathbf{E}\eta < \infty$, 且 $\xi_n \downarrow \xi$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\xi_n = \mathbf{E}\xi.$$

定理1.2.2 (Fatou引理) 设 $\eta, \xi_1, \xi_2, \dots$ 为一列随机变量序列。

(a) 如果对一切 $n \geq 1$, $\xi_n \geq \eta$, 且 $\mathbf{E}\eta > -\infty$, 则

$$\mathbf{E} \liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\xi_n;$$

(b) 如果对一切 $n \geq 1$, $\xi_n \leq \eta$, 且 $\mathbf{E}\eta < \infty$, 则

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\xi_n \leq \mathbf{E} \limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n.$$

定理1.2.3 (Lebesgue控制收敛定理) 设 $\eta, \xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ 为随机变量序列, 满足条件: $|\xi_n| \leq \eta, E\eta < \infty$, 且 $\xi_n \rightarrow \xi$ a.s. ($n \rightarrow \infty$), 则 $E|\xi| < \infty$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n = E\xi;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E|\xi_n - \xi| = 0.$$

定理1.2.4 (Jensen不等式) 设函数 $\phi(\cdot)$ 是一个可积的凸函数, 且 $E|\xi| < \infty$, 则

$$\phi(E\xi) \leq E\phi(\xi).$$

定理1.2.5 (Hölder不等式) 设 $1 < p < \infty, 1 < q < \infty$ 且 $1/p + 1/q = 1$. 如果 $E|\xi|^p < \infty$ 且 $E|\eta|^q < \infty$, 则 $E|\xi\eta| < \infty$, 且

$$E|\xi\eta| \leq (E|\xi|^p)^{1/p} \cdot (E|\eta|^q)^{1/q}.$$

定理1.2.6 (Minkowski不等式) 设 $1 \leq p < \infty$. 如果 $E|\xi|^p < \infty$ 且 $E|\eta|^p < \infty$, 则 $E|\xi + \eta|^p < \infty$, 且

$$(E|\xi + \eta|^p)^{1/p} \leq (E|\xi|^p)^{1/p} + (E|\eta|^p)^{1/p}.$$

最后, 我们介绍几种随机变量的收敛:

定义1.2.2 设 $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$