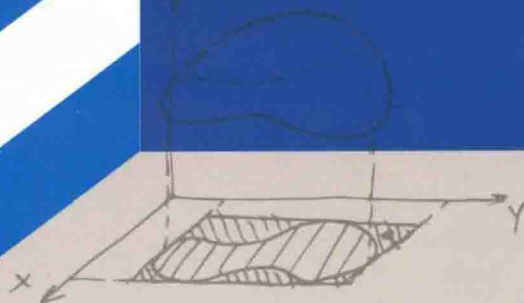




世纪高职高专规划教材
高等职业教育规划教材编委会专家审定



GAODENG SHUXUE

高等数学

王广明 孙琦 龙芳 主编 (第2版)



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21 世纪高职高专规划教材

高等职业教育规划教材编委会专家审定

高等数学

(第 2 版)

王广明	孙琦	龙芳	主 编
陆建秀	韩晓毅	余翔	副主编
俞文辉	邓涛	古君凤	参 编

北京邮电大学出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书按照教育部最新制定的高职高专《高等数学课程教学基本要求》,结合编者多年的教学实践编写而成,反映了当前高职高专教育培养高素质实用型人才数学课程设置的教学理念。

本书具有针对性强、强调数学理论在实际中的应用、重视数学文化功能的特点。适应三年制高职理工类和经管类专业,也可作为高职高专其他各专业教学的参考资料。

本书内容包括函数、极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,微分方程,多元函数微积分,无穷级数。附录包括常用数学公式、简单积分表、数学实验和希腊字母表。每章节后都配有一定数量的习题,书后附有习题参考答案与提示。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王广明等主编. --2 版. --北京:北京邮电大学出版社,2012.7

ISBN 978-7-5635-2941-4

I. ①高… II. ①王… III. 高等数学—高等职业教育—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 043797 号

书 名: 高等数学(第 2 版)

主 编: 王广明 孙 琦 龙 芳

责任编辑: 王晓丹

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编:100876)

发 行 部: 电话:010-62282185 传真:010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京联兴华印刷厂

开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张: 21

字 数: 548 千字

版 次: 2009 年 6 月第 1 版 2012 年 7 月第 2 版 2012 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2941-4

定 价: 42.00 元

• 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

前 言

本书是按照新形势下高职高专高等数学教学改革的精神,针对高职高专学生学习的特点,结合编者多年教学实践编写而成的。该教材力求反映高职课程和教学内容体系改革方向,以应用为目的,必需够用为尺度,在充分考虑数学课程的工具功能的前提下,注重发挥其文化功能的作用,既为高职学生学习专业课程服务,又为学生的可持续发展打下良好的基础。本教材具有以下几个方面的特点。

1. 针对性强

教材从高职学生的实际出发,注重高等数学与初等数学的衔接,遵循理论与实际相结合的原则,按照“特殊—一般—特殊”的认识规律,尽可能借助客观实例及几何直观图形来阐述数学基本概念和定理,力求使抽象的数学概念形象化,复杂的理论过程简单化,便于高职学生的理解和掌握。

2. 注重数学应用能力的培养

为了提高学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力,在编写过程中,加强了数学知识在工程技术及经济管理等方面的应用,力图体现高职教育实践性、应用性强的特点。

3. 体现以人为本的教育理念

编写教材时,根据教学的基本要求,按照“服务专业,够用为度”的原则确定教材基本内容,在每章末都给出本章小结,这样既为教师提供教学参考,又可方便学生自学。

4. 例题、习题数量充足

在编写过程中,列举了大量的典型例题,例题解答思路清晰,过程简明扼要,有利于学生开拓思路。习题题型丰富,难易比例适当,以满足不同层次学生学习的需要。

本书由王广明、孙琦、龙芳担任主编,陆建秀、韩晓毅、余翔担任副主编,俞文辉、邓涛、古君凤参与本书的编写。全书由王广明统稿。限于编者水平有限,错漏之处在所难免,恳请广大读者批评指正。

目 录

第 1 章 函数、极限与连续	1
1.1 函 数	1
1.1.1 常量与变量	1
1.1.2 函数的概念	1
习题 1.1	4
1.2 函数的几种特性	5
1.2.1 有界性	5
1.2.2 单调性	6
1.2.3 奇偶性	7
1.2.4 周期性	8
习题 1.2	8
1.3 反函数和复合函数	9
1.3.1 反函数	9
1.3.2 复合函数	12
习题 1.3	13
1.4 幂函数、指数函数与对数函数	14
1.4.1 幂函数	14
1.4.2 指数函数	15
1.4.3 对数函数	16
习题 1.4	16
1.5 三角函数与反三角函数	17
1.5.1 三角函数	17
1.5.2 反三角函数	19
习题 1.5	23
1.6 初等函数	24
1.6.1 基本初等函数	24
1.6.2 初等函数	24
1.6.3 非初等函数的例子	24
1.6.4 初等函数定义域求法	25
1.6.5 建立函数关系举例	25
习题 1.6	27

1.7 经济中常用的函数	27
1.7.1 需求函数与供给函数	27
1.7.2 成本函数、收入函数与利润函数	28
1.7.3 库存函数	29
习题 1.7	30
1.8 数列的极限	30
习题 1.8	32
1.9 函数的极限	33
1.9.1 自变量趋于无穷大时函数 $f(x)$ 的极限	33
1.9.2 自变量趋于有限值 x_0 时函数的极限	36
1.9.3 函数极限性质	37
习题 1.9	38
1.10 无穷小与无穷大	38
1.10.1 无穷小	38
1.10.2 无穷大	40
习题 1.10	41
1.11 极限的运算法则	42
习题 1.11	45
1.12 极限存在准则两个重要极限	46
1.12.1 极限存在准则	46
1.12.2 两个重要极限	46
习题 1.12	49
1.13 无穷小的比较	49
习题 1.13	52
1.14 函数的连续性	53
1.14.1 函数连续性	53
1.14.2 函数的间断点及其分类	55
1.14.3 连续函数的运算法则及初等函数的连续性	56
1.14.4 闭区间上连续函数的性质	59
习题 1.14	61
小结	62
复习题一	66
第 2 章 导数与微分	68
2.1 导数的概念	68
2.1.1 导数概念的引例	68
2.1.2 导数的定义	69
2.1.3 用导数定义求导数	70
2.1.4 左导数和右导数	72
2.1.5 可导与连续的关系	72
2.1.6 导数的几何意义	73

习题 2.1	73
2.2 函数的和、差、积、商的求导法则	74
2.2.1 函数和、差的求导法则	74
2.2.2 函数积的求导法则	75
2.2.3 函数商的求导法则	75
习题 2.2	76
2.3 反函数与复合函数的求导法则	77
2.3.1 反函数的求导法则	77
2.3.2 复合函数的求导法则	78
习题 2.3	80
2.4 隐函数的导数和由参数方程确定的函数的导数	80
2.4.1 隐函数的导数	80
2.4.2 由参数方程确定的函数的导数	82
2.4.3 初等函数的导数	84
习题 2.4	85
2.5 高阶导数	85
习题 2.5	87
2.6 函数的微分	88
2.6.1 微分的定义	88
2.6.2 微分的几何意义	90
2.6.3 微分公式与微分运算法则	90
2.6.4 微分在近似计算中的应用	92
习题 2.6	93
小结	94
复习题二	97
第 3 章 中值定理与导数的应用	99
3.1 中值定理	99
3.1.1 罗尔(Rolle)定理	99
3.1.2 拉格朗日(Lagrange)定理	101
3.1.3 柯西(Cauchy)定理	102
习题 3.1	102
3.2 罗必达法则	103
3.2.1 未定式 $\frac{0}{0}$ 型的极限求法	103
3.2.2 未定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限求法	104
3.2.3 其他类型的未定式极限求法	106
习题 3.2	107
3.3 函数单调性的判别法	107
习题 3.3	109
3.4 函数的极值	110

3.4.1 函数极值的定义	110
3.4.2 函数极值的判定和求法	110
习题 3.4	113
3.5 函数的最大值和最小值	113
习题 3.5	115
3.6 曲线的凹凸性与拐点	116
习题 3.6	117
3.7 函数图形的描绘	118
3.7.1 曲线的水平渐近线和铅直渐近线	118
3.7.2 函数图形的描绘	119
习题 3.7	121
3.8 曲率	121
3.8.1 弧微分	121
3.8.2 曲率及其计算公式	122
3.8.3 曲率圆和曲率半径	123
习题 3.8	124
3.9 导数的经济意义	124
3.9.1 边际分析	124
3.9.2 函数的弹性	125
习题 3.9	127
小结	127
复习题三	130
第 4 章 不定积分	131
4.1 不定积分的概念	131
4.1.1 原函数的概念	131
4.1.2 不定积分的定义	132
4.1.3 不定积分的性质	132
4.1.4 不定积分的几何意义	133
习题 4.1	133
4.2 不定积分的运算法则与直接积分法	134
4.2.1 不定积分的基本公式	134
4.2.2 不定积分的基本运算法则	135
4.2.3 直接积分法	136
习题 4.2	137
4.3 换元积分法	137
4.3.1 第 1 类换元积分法	137
4.3.2 第 2 类换元积分法	140
习题 4.3	143
4.4 分部积分法	143
4.4.1 分部积分法的公式	143

4.4.2 应用分部积分公式举例	144
4.4.3 u 与 v 的选取方法	145
习题 4.4	145
4.5 积分表的应用	146
习题 4.5	147
4.6 不定积分在经济中的应用举例	147
习题 4.6	148
小结	149
复习题四	150
第 5 章 定积分及其应用	152
5.1 定积分的概念及性质	152
5.1.1 定积分问题举例	152
5.1.2 定积分定义	154
5.1.3 定积分的几何意义	155
5.1.4 定积分的基本性质	156
习题 5.1	158
5.2 微积分基本公式	159
5.2.1 变速直线运动中位置函数与速度函数的关系	159
5.2.2 积分上限的函数及其导数	159
5.2.3 微积分基本公式	161
习题 5.2	162
5.3 定积分的换元积分法和分部积分法	162
5.3.1 定积分的换元积分法	162
5.3.2 定积分的分部积分法	165
习题 5.3	165
5.4 广义积分	166
5.4.1 无穷区间上的广义积分	166
5.4.2 无界函数的广义积分	168
习题 5.4	169
5.5 定积分的应用	170
5.5.1 微元法	170
5.5.2 定积分在几何上的应用	171
5.5.3 定积分在物理上的应用	174
习题 5.5	176
小结	177
复习题五	179
第 6 章 微分方程	181
6.1 微分方程的一般概念	181
习题 6.1	182

6.2 一阶微分方程	182
6.2.1 变量可分离的微分方程	183
6.2.2 齐次微分方程	184
6.2.3 一阶线性微分方程	185
习题 6.2	189
6.3 可降阶的高阶微分方程	189
6.3.1 $y^{(n)}=f(x)$ 类型的 n 阶微分方程	190
6.3.2 $y''=f(x,y')$ 类型的二阶微分方程	190
6.3.3 $y''=f(y,y')$ 类型的微分方程	191
习题 6.3	193
6.4 二阶线性微分方程解的结构	193
6.4.1 二阶线性齐次微分方程解的结构	193
6.4.2 二阶线性非齐次微分方程解的结构	194
习题 6.4	195
6.5 二阶常系数齐次线性微分方程	195
习题 6.5	198
6.6 二阶常系数非齐次线性微分方程	198
习题 6.6	203
小结	203
复习题六	204
第 7 章 多元函数微积分	206
7.1 空间解析几何简介	206
7.1.1 空间直角坐标系	206
7.1.2 空间曲面与方程	207
习题 7.1	209
7.2 多元函数	209
7.2.1 多元函数的概念	209
7.2.2 二元函数的极限	211
7.2.3 二元函数的连续性	212
习题 7.2	213
7.3 偏导数	214
7.3.1 偏导数的概念	214
7.3.2 高阶偏导数	216
* 7.3.3 偏导数的经济意义	217
习题 7.3	218
7.4 全微分	219
7.4.1 全微分的概念	219
7.4.2 全微分在近似计算中的应用	221
习题 7.4	222
7.5 复合函数的偏导数	222

7.5.1 复合函数的偏导数	222
7.5.2 隐函数的偏导数	225
习题 7.5	226
7.6 多元函数的极值	227
7.6.1 极值及其求法	227
7.6.2 最大值与最小值	229
7.6.3 条件极值、拉格朗日乘数法	230
习题 7.6	232
7.7 二重积分	232
7.7.1 二重积分的概念与性质	232
7.7.2 在直角坐标系下二重积分的计算	235
习题 7.7	238
小结	239
复习题七	240
第 8 章 无穷级数	242
8.1 无穷级数的概念与性质	242
8.1.1 无穷级数的概念	242
8.1.2 收敛级数的性质	244
习题 8.1	247
8.2 数项级数的敛散性	248
8.2.1 正项级数及其敛散性	248
8.2.2 任意项级数及其敛散性	252
习题 8.2	255
8.3 幂级数	256
8.3.1 函数项级数的概念	256
8.3.2 幂级数及其敛散性	256
习题 8.3	261
8.4 函数的幂级数展开式	262
8.4.1 泰勒级数	262
8.4.2 函数展开成幂级数	263
习题 8.4	267
小结	267
复习题八	268
附录 I 常用数学公式	271
附录 II 简单积分表	274
附录 III 数学实验	280
附录 IV 希腊字母表	297
参考答案	298

第1章 函数、极限与连续

函数是数学中最重要的基本概念之一,是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映,也是高等数学的主要研究对象.极限概念是微积分的重要基本概念之一,极限理论是高等数学的基础.本章将介绍函数、极限和函数连续性等基本概念以及它们的一些性质.

1.1 函 数

1.1.1 常量与变量

自然界现象无一不在变化之中,在观察自然现象、研究某些实际问题或从事生产的过程中,总会遇到许多量,如面积、体积、长度、时间、速度、温度等.遇到的量,一般可以分为两种,一种是在过程中不断变化的量,这种量称为变量.变量常用 x, y, z, u, v 等字母表示.另一种量是在过程进行中保持不变的量,这种量称为常量.常量往往用 a, b, c, α, β 等字母来表示.例如,用一根长度为 a 的铁丝围成一个矩形的框架,用 x 表示矩形的长,则矩形的宽为 $y = \frac{a}{2} - x$, 矩形面积为 $S = x\left(\frac{a}{2} - x\right)$. 在这个问题中, a 为常量, x, y, S 都是变量.又如,用一根铁丝围成一个面积为 S 的框形架,若它的周长记为 a , 长记为 x , 宽记为 y , 则 $y = \frac{S}{x}$, 那么 $a = 2x + \frac{2S}{x}$. 在这个问题中, S 为常量, x, y, a 都是变量.这里可以看出,一个量是常量还是变量都是相对某一具体问题而言的.

初等数学中主要研究的是常量,而高等数学中主要研究的是变量,着重研究的是变量与变量之间的关系.

对于某个问题来说,一个变量只能在一定范围内取值.变量的取值范围常用区间表示.

数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间,记做 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$$

类似地, $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ 都称为半开区间, $(a, b) = \{x | a < x < b\}$ 称为开区间.以上这些区间称为有限区间.

另外,还有无限区间,例如

$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\}$$

全体实数集合也可记为 $(-\infty, +\infty)$, 它也是无限区间.

1.1.2 函数的概念

在研究某一自然现象或实际问题的过程中,总会发现问题中变量并不都是独立变化的,它们之间往往存在着依存关系,下面先考查几个具体例子.

例 1.1.1 上述用一根长为 a 的铁丝围成一个矩形框架的问题中,所涉及变量有 x (长), y (宽), S (面积),它们之间的关系为 $y=\frac{a}{2}-x, S=x\left(\frac{a}{2}-x\right)$. 显然 y 和 S 是由 x 所确定的,只要 x 的值确定后, y 和 S 的值就随之确定, x 的变化范围是 $0 < x < \frac{a}{2}$, 而 y 和 S 的变化范围是由 x 的变化范围所确定的. 本例中,变量之间的依存关系都是由一个确定公式表示的. 但应当指出,有无这种确定的表达式,对问题中变量之间有无依存关系存在是无关紧要的.

例 1.1.2 表 1.1.1 是一台发电机启动它一小时内每分钟的转速记录.

表 1.1.1

$t/\text{分}$	1	2	3	4	...	60
$n/\text{转} \cdot \text{分}^{-1}$	2 011	2 981	2 998	3 001	...	3 002

表 1.1.1 给出了时间 t (分)与转速 n (转/分)之间的依存关系,从它可以查出当 t 取 1, 2, ..., 60 等正整数时,转速 n 的对应值.

例 1.1.3 图 1.1.1 是气温自动记录仪描出的某一天气温变化曲线,它给出了时间 t 与气温 T 之间的依存关系.

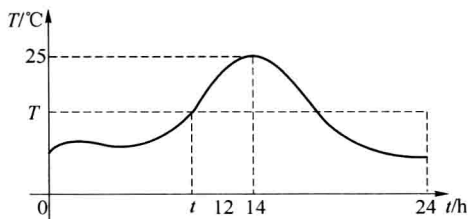


图 1.1.1

时间 t (h)的变化范围是 $0 \leq t \leq 24$, 当 t 在这个范围内取一值时,从图 1.1.1 中的曲线可找出气温的对应值. 例如,当 $t=14$ h 时, $T=25^\circ\text{C}$, 为一天中的最高温度.

很明显,例 1.1.2 与例 1.1.3 中的依存关系都没有一个简明表达公式,而代之以一表格与一条曲线.

从以上的例子可以看到,它们描述的问题虽

各不相同,但都有共同特征:

- (1) 每个问题中都有两个变量,它们之间不是彼此孤立的,而是相互联系,相互制约的;
- (2) 当一个变量在它的变化范围中任意取一定值时,另一个变量依一定法则就有一个确定的值与这一取定的值相对应.

具有这两个特征的变量的依存关系称为函数关系. 下面给出函数的定义.

定义 1.1.1 设 x, y 是两个变量, x 的变化范围是实数集 D , 如果对于任何的 $x \in D$, 按照一定的法则 f , 变量 y 都有唯一确定值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记为 $y=f(x)$, 称 D 是函数的定义域, x 为自变量, y 为因变量.

对于一个确定的 $x_0 \in D$, 与之对应的 $y_0=f(x_0)$ 称为函数 y 在点 x_0 处的函数值, 全体函数值的集合 M 称为函数 y 的值域, 记为 $f(D)$, 即

$$M=f(D)=\{y|y=f(x), x \in D\}$$

由定义 1.1.1 可知, 一个函数 $y=f(x) (x \in D)$ 是由它的定义域 D 和对应法则所确定的. 所以, 定义域和对应法则称为函数的两要素, 说两个函数相同(或相等), 即两个函数定义域相同, 对应法则也相同.

将平面点集

$$G=\{(x, y)|y=f(x), x \in D\}$$

描绘在直角坐标系 Oxy 内,得到的图形称为函数 $y=f(x)$ 的图形或图像,如图 1.1.2 所示.

常用函数表示法有 3 种:①公式法(或解析法),如例 1.1.1,因变量 y 与自变量 x 之间对应法则用数学公式表示;②表格法,如例 1.1.2;③图像法,如例 1.1.3.

下面举几个函数的例子.

例 1.1.4 函数

$$y=2$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$,值域 $M=\{2\}$,它的图形是一条平行于 x 轴的直线,如图 1.1.3 所示.

例 1.1.5 函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$,值域 $M=[0, +\infty)$,它的图形如图 1.1.4 所示,此函数称为绝对值函数.

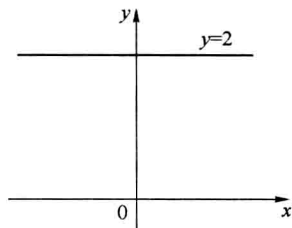


图 1.1.3

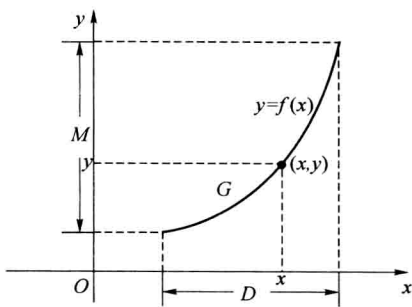


图 1.1.2

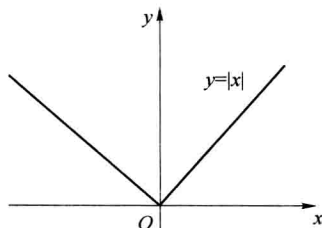


图 1.1.4

例 1.1.6 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$,值域 $M=\{-1,0,1\}$,它的图形如图 1.1.5 所示.

例 1.1.7 设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数为 x 的整数部分,记做 $[x]$. 例如,

$[\frac{5}{7}]=0, [\sqrt{2}]=1, [\pi]=3, [-0.8]=-1, [-3.5]=-4$,把 x 看做变量,则函数

$$y=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$,值域 $M=\mathbf{Z}$,它的图形如图 1.1.6 所示,此图形称为阶梯曲线,在 x 为整数处发生跳跃,跳跃度为 1,此函数称为取整函数.

从例 1.1.6 和例 1.1.7 中可以看到,有时一个函数要用几个式子表示,这种在自变量不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,通常称为分段函数,在自然科学和工程技术中,经常会遇到分段函数的情形.

注意 分段函数是定义域上的一个函数,不要理解为多个函数,分段函数是要分段求值,分段作图.

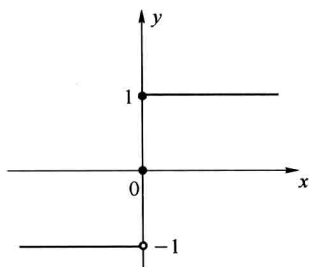


图 1.1.5

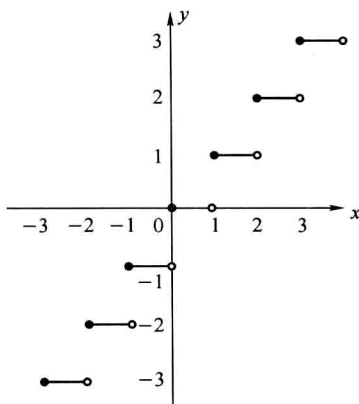


图 1.1.6

例 1.1.8 旅客乘飞机时若行李的重量不超过 20 kg 时不收费;若超过了 20 kg,每超过 1 kg 收运费 a 元,试建立运费 y 与行李重量 x 的函数关系.

解 由题意知,当 $0 \leq x \leq 20$ 时, $y=0$;当 $x > 20$ 时,所超过的部分的重量为 $x-20$,按每千克收运费 a 元,则有 $y=a(x-20)$,于是函数 y 与 x 的对应关系是

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 20 \\ a(x-20), & x > 20 \end{cases}$$

例 1.1.9 设函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 1-2x, & |x| \leq 1 \\ x^2+1, & |x| > 1 \end{cases}$$

求 $f(0)$, $f(1)$, $f(1.5)$, $f(1+K)$.

解 (1) 当 $|x| \leq 1$, 即 $-1 \leq x \leq 1$ 时:

$$f(x) = 1-2x$$

所以 $f(0) = 1-0 = 1$, $f(1) = 1-2 = -1$.

(2) 当 $|x| > 1$, 即 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时:

$$f(x) = x^2+1$$

所以 $f(1.5) = 1.5^2+1 = 3.25$.

(3) 当 $-1 \leq 1+K \leq 1$, 即 $-2 \leq K \leq 0$ 时:

$$f(1+K) = 1-2(1+K) = -1-2K$$

当 $|1+K| > 1$, 即 $K > 0$ 或 $K < -2$ 时:

$$f(1+K) = (1+K)^2+1 = K^2+2K+2$$

习题 1.1

1.1.1 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2$, $g(x) = 2 \lg x$

(2) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x) = x \sqrt[3]{x-1}$

$$(4) f(x)=1, g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$$

1.1.2 求下列函数的定义域.

$$(1) y=\sqrt{3x+2}$$

$$(2) y=\frac{1}{1-x^2}$$

$$(3) y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$$

$$(4) y=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$$

$$(5) y=\frac{1}{x}+\ln(1+x)$$

$$(6) y=\frac{1}{x-1}+\sin(x+1)$$

1.1.3 设

$$\varphi(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3} \\ 0, & |x|\geq\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-2)$, 并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

$$1.1.4 \text{ 设 } y=\begin{cases} 0, & -2<x\leq 0 \\ x^2, & 0<x\leq 1 \\ 2-x, & 1<x\leq 2 \end{cases}, \text{ 求函数定义域及函数值 } f(-1), f(0), f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$f(\sqrt{2})$, 并作出函数的图像.

$$1.1.5 \text{ 求函数 } y=\begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \text{ 的定义域和值域.}$$

1.1.6 某城市居民在购房时,面积不超过 120 m^2 时,按购房总价的 1.5% 向政府缴税;面积超过 120 m^2 时,除 120 m^2 要执行前述的税收政策外,超过部分按 3% 向政府缴税.已知房屋单价是 5000 元/m^2 ,则购买 125 m^2 的房屋应向政府缴税多少元?

1.2 函数的几种特性

1.2.1 有界性

定义 1.2.1 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X\subset D$, 若存在实数 M , 使得对任何 $x\in X$ 都有

$$|f(x)|\leq M$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 X 内有界, 称 M 为 $f(x)$ 的一个界. 若这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 X 内无界.

定义 1.2.2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X\subset D$ 都存在实数 M (或 m), 使得对任何 $x\in X$, 都有

$$f(x)\leq M \quad [\text{或 } f(x)\geq m]$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 X 内有上界(或下界), 称 M (或 m) 为 $f(x)$ 的一个上界(或下界).

显然, 按照定义 1.2.2, 有界函数必有上界和下界; 反之, 既有上界又有下界的函数必定是有界函数.

由定义 1.2.2 可知,若函数存在一个界 M ,则任何比 M 大的实数都可作为该函数的界.例如, $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有 $|\sin x| \leq 1$, 1 是它的界, 2 也是它的界, 因为 $|\sin x| \leq 2$ 成立.

应该注意的是,函数有界性如何定与考虑的自变量 x 的范围有关.

例 1.2.1 证明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $[1, 2]$ 上是有界函数,但它在 $(0, 1)$ 内是无界的.

证明 当 $1 \leq x \leq 2$ 时,有 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$, 所以 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[1, 2]$ 上既有下界又有上界,故是有界函数.

再来证明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内无界. 若任意 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内有界,由定义 1.2.2 知存在 $M > 0$, 对任何 $x \in (0, 1)$, 都有 $|f(x)| = \frac{1}{x} < M$, 即有 $x > \frac{1}{M}$, 这是不可能的, 显然在区间 $(0, 1)$ 内有小于 $\frac{1}{M}$ 的数存在, 所以 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

1.2.2 单调性

定义 1.2.3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的; 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减小的.

单调增加和单调减小的函数统称单调函数, 其对应区间为单调区间.

单调增加的函数的图像是一条沿着 x 轴正向上升的曲线(如图 1.2.1 所示); 单调减少的函数的图像是一条沿着 x 轴正向下落的曲线(如图 1.2.2 所示).

例 1.2.2 证明 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加函数(如图 1.2.3 所示).

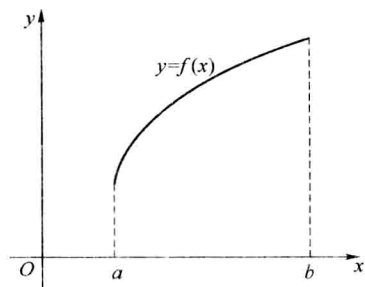


图 1.2.1

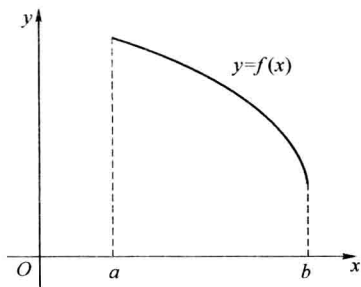


图 1.2.2

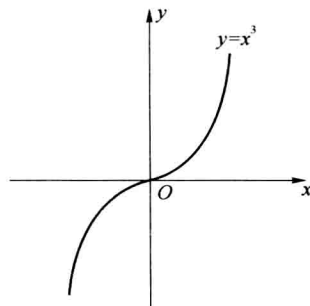


图 1.2.3

证明 任取两数 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 考查

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) \\ &= (x_2 - x_1) \left[\left(x_2 + \frac{x_1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 \right] \end{aligned}$$