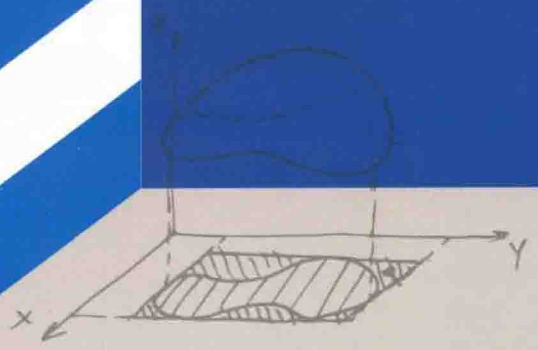
21世纪高职高专规划教材

高等职业教育规划教材编委会专家审定



GAODENG SHUXUE

高等数学

王广明　孙　琦　龙　芳　主编

（第2版）

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高职高专规划教材

高等职业教育规划教材编委会专家审定

高等数学

（第2版）

王广明　孙　琦　龙　芳　主　编
陆建秀　韩晓毅　余　翔　副主编
俞文辉　邓　涛　古君凤　参　编

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书按照教育部最新制定的高职高专《高等数学课程教学基本要求》，结合编者多年的教学实践编写而成，反映了当前高职高专教育培养高素质实用型人才数学课程设置的教学理念。

本书具有针对性强、强调数学理论在实际中的应用、重视数学文化功能的特点。适应三年制高职理工类和经管类专业，也可作为高职高专其他各专业教学的参考资料。

本书内容包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程，多元函数微积分，无穷级数。附录包括常用数学公式、简单积分表、数学实验和希腊字母表。每章节后都配有一定数量的习题，书后附有习题参考答案与提示。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王广明等主编. --2版. --北京：北京邮电大学出版社，2012.7

ISBN 978-7-5635-2941-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… Ⅲ.高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 043797 号

书　　名：高等数学(第2版)

主　　编：王广明　孙　琦　龙　芳

责任编辑：王晓丹

出版发行：北京邮电大学出版社

社　　址：北京市海淀区西土城路10号(邮编：100876)

发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578

E-mail：publish@bupt.edu.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京联兴华印刷厂

开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16

印　　张：21

字　　数：548千字

版　　次：2009年6月第1版　2012年7月第2版　2012年7月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-2941-4　　定　价：42.00元

前　　言

本书是按照新形势下高职高专高等数学教学改革的精神，针对高职高专学生学习的特点，结合编者多年教学实践编写而成的。该教材力求反映高职课程和教学内容体系改革方向，以应用为目的，必需够用为尺度，在充分考虑数学课程的工具功能的前提下，注重发挥其文化功能的作用，既为高职学生学习专业课程服务，又为学生的可持续发展打下良好的基础。本教材具有以下几个方面的特点。

1. 针对性强

教材从高职学生的实际出发，注重高等数学与初等数学的衔接，遵循理论与实际相结合的原则，按照“特殊——一般—特殊”的认识规律，尽可能借助客观实例及几何直观图形来阐述数学基本概念和定理，力求使抽象的数学概念形象化，复杂的理论过程简单化，便于高职学生的理解和掌握。

2. 注重数学应用能力的培养

为了提高学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力，在编写过程中，加强了数学知识在工程技术及经济管理等方面的应用，力图体现高职教育实践性、应用性强的特点。

3. 体现以人为本的教育理念

编写教材时，根据教学的基本要求，按照“服务专业，够用为度”的原则确定教材基本内容，在每章末都给出本章小结，这样既为教师提供教学参考，又可方便学生自学。

4. 例题、习题数量充足

在编写过程中，列举了大量的典型例题，例题解答思路清晰，过程简明扼要，有利于学生开拓思路。习题题型丰富，难易比例适当，以满足不同层次学生学习的需要。

本书由王广明、孙琦、龙芳担任主编，陆建秀、韩晓毅、余翔担任副主编，俞文辉、邓涛、古君风参与本书的编写。全书由王广明统稿。限于编者水平有限，错漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

《高等数学》编写组

目　　录

第1章　函数、极限与连续

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是高等数学的主要研究对象. 极限概念是微积分的重要基本概念之一，极限理论是高等数学的基础. 本章将介绍函数、极限和函数连续性等基本概念以及它们的一些性质.

1.1　函　数

1.1.1　常量与变量

自然界现象无一不在变化之中，在观察自然现象、研究某些实际问题或从事生产的过程中，总会遇到许多量，如面积、体积、长度、时间、速度、温度等. 遇到的量，一般可以分为两种，一种是在过程中不断变化的量，这种量称为变量. 变量常用 x,y,z,u,v 等字母表示. 另一种量是在过程进行中保持不变的量，这种量称为常量. 常量往往用 a,b,c,α,β 等字母来表示. 例如，用一根长度为 a 的铁丝围成一个矩形的框架，用 x 表示矩形的长，则矩形的宽为 $y=\frac{a}{2}-x$，矩形面积为 $S=x\left(\frac{a}{2}-x\right)$. 在这个问题中，$a$ 为常量，x,y,S 都是变量. 又如，用一根铁丝围成一个面积为 S 的框形架，若它的周长记为 a，长记为 x，宽记为 y，则 $y=\frac{S}{x}$，那么 $a=2x+\frac{2S}{x}$. 在这个问题中，S 为常量，x,y,a 都是变量. 这里可以看出，一个量是常量还是变量都是相对某一具体问题而言的.

初等数学中主要研究的是常量，而高等数学中主要研究的是变量，着重研究的是变量与变量之间的关系.

对于某个问题来说，一个变量只能在一定范围内取值. 变量的取值范围常用区间表示.

数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记做 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

类似地，$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 都称为半开区间，$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间. 以上这些区间称为有限区间.

另外，还有无限区间，例如

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$$

全体实数集合也可记为 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间.

1.1.2　函数的概念

在研究某一自然现象或实际问题的过程中，总会发现问题中变量并不都是独立变化的，它们之间往往存在着依存关系，下面先考查几个具体例子.

例 1.1.1 上述用一根长为 a 的铁丝围成一个矩形框架的问题中，所涉及变量有 x(长)，y(宽)，S(面积)，它们之间的关系为 $y=\frac{a}{2}-x$，$S=x\left(\frac{a}{2}-x\right)$. 显然 y 和 S 是由 x 所确定的，只要 x 的值确定后，y 和 S 的值就随之确定，x 的变化范围是 $0<x<\frac{a}{2}$，而 y 和 S 的变化范围是由 x 的变化范围所确定的. 本例中，变量之间的依存关系都是由一个确定公式表示的. 但应当指出，有无这种确定的表达式，对问题中变量之间有无依存关系存在是无关紧要的.

例 1.1.2 表 1.1.1 是一台发电机启动它一小时内每分钟的转速记录.

表 1.1.1

t/分	1	2	3	4	…	60
n/转·分$^{-1}$	2 011	2 981	2 998	3 001	…	3 002

表 1.1.1 给出了时间 t(分)与转速 n(转/分)之间的依存关系，从它可以查出当 t 取 1，2，…，60 等正整数时，转速 n 的对应值.

例 1.1.3 图 1.1.1 是气温自动记录仪描出的某一天气温变化曲线，它给出了时间 t 与气温 T 之间的依存关系.

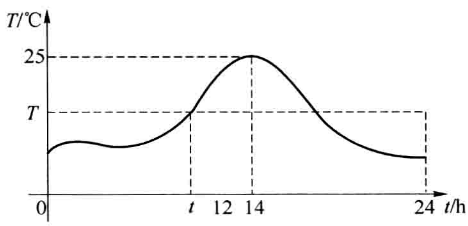


图 1.1.1

时间 t(h)的变化范围是 $0\leqslant t\leqslant 24$，当 t 在这个范围内取一值时，从图 1.1.1 中的曲线可找出气温的对应值. 例如，当 $t=14$ h 时，$T=25$℃，为一天中的最高温度.

很明显，例 1.1.2 与例 1.1.3 中的依存关系都没有一个简明表达公式，而代之以一表格与一条曲线.

从以上的例子可以看到，它们描述的问题虽各不相同，但都有共同特征：

(1) 每个问题中都有两个变量，它们之间不是彼此孤立的，而是相互联系，相互制约的；

(2) 当一个变量在它的变化范围中任意取一定值时，另一个变量依一定法则就有一个确定的值与这一取定的值相对应.

具有这两个特征的变量的依存关系称为函数关系. 下面给出函数的定义.

定义 1.1.1 设 x，y 是两个变量，x 的变化范围是实数集 D，如果对于任何的 $x\in D$，按照一定的法则 f，变量 y 都有唯一确定值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$，称 D 是函数的定义域，x 为自变量，y 为因变量.

对于一个确定的 $x_0\in D$，与之对应的 $y_0=f(x_0)$ 称为函数 y 在点 x_0 处的函数值，全体函数值的集合 M 称为函数 y 的值域，记为 $f(D)$，即

$$M=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

由定义 1.1.1 可知，一个函数 $y=f(x)(x\in D)$ 是由它的定义域 D 和对应法则所确定的. 所以，定义域和对应法则称为函数的两要素，说两个函数相同(或相等)，即两个函数定义域相同，对应法则也相同.

将平面点集

$$G=\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

描绘在直角坐标系 Oxy 内，得到的图形称为函数 $y=f(x)$ 的图形或图像，如图 1.1.2 所示.

常用函数表示法有 3 种：①公式法（或解析法），如例 1.1.1，因变量 y 与自变量 x 之间对应法则用数学公式表示；②表格法，如例 1.1.2；③图像法，如例 1.1.3.

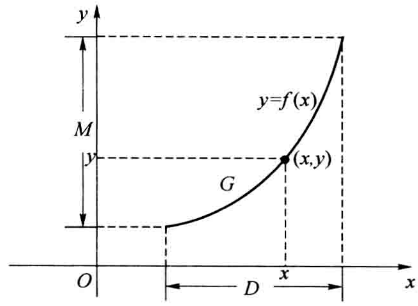


图 1.1.2

下面举几个函数的例子.

例 1.1.4 函数

$$y=2$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=\{2\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图1.1.3 所示.

例 1.1.5 函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=[0,+\infty)$，它的图形如图 1.1.4 所示，此函数称为绝对值函数.

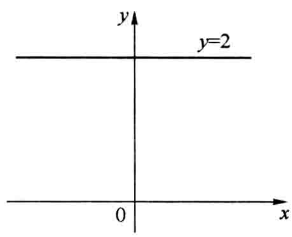


图 1.1.3

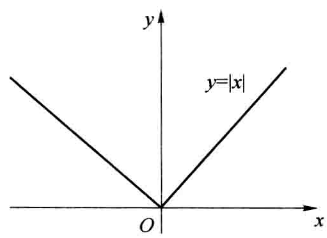


图 1.1.4

例 1.1.6 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1.1.5 所示.

例 1.1.7 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数为 x 的整数部分，记做 $[x]$. 例如，$\left[\frac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-0.8]=-1$，$[-3.5]=-4$，把 x 看做变量，则函数

$$y=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=\mathbf{Z}$，它的图形如图 1.1.6 所示，此图形称为阶梯曲线，在 x 为整数值处发生跳跃，跳跃度为 1，此函数称为取整函数.

从例 1.1.6 和例 1.1.7 中可以看到，有时一个函数要用几个式子表示，这种在自变量不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数，在自然科学和工程技术中，经常会遇到分段函数的情形.

注意 分段函数是定义域上的一个函数，不要理解为多个函数，分段函数是要分段求值，分段作图.

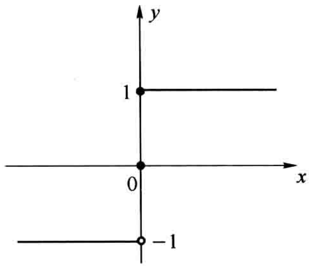


图 1.1.5

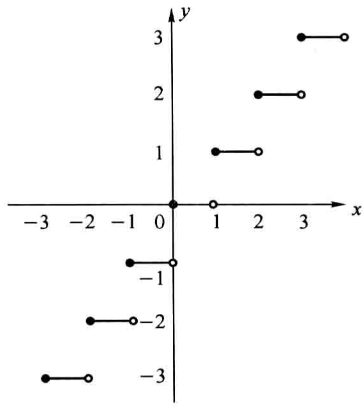


图 1.1.6

例 1.1.8 旅客乘飞机时若行李的重量不超过 20 kg 时不收费用;若超过了 20 kg,每超过 1 kg 收运费 a 元,试建立运费 y 与行李重量 x 的函数关系.

解 由题意知,当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时,$y=0$;当 $x>20$ 时,所超过的部分的重量为 $x-20$,按每千克收运费 a 元,则有 $y=a(x-20)$,于是函数 y 与 x 的对应关系是

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ a(x-20), & x>20\end{cases}$$

例 1.1.9 设函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1-2x, & |x|\leqslant 1\\ x^2+1, & |x|>1\end{cases}$$

求 $f(0)$,$f(1)$,$f(1.5)$,$f(1+K)$.

解 (1) 当 $|x|\leqslant 1$,即 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时:

$$f(x)=1-2x$$

所以 $f(0)=1-0=1$,$f(1)=1-2=-1$.

(2) 当 $|x|>1$,即 $x<-1$ 或 $x>1$ 时:

$$f(x)=x^2+1$$

所以 $f(1.5)=1.5^2+1=3.25$.

(3) 当 $-1\leqslant 1+K\leqslant 1$,即 $-2\leqslant K\leqslant 0$ 时:

$$f(1+K)=1-2(1+K)=-1-2K$$

当 $|1+K|>1$,即 $K>0$ 或 $K<-2$ 时:

$$f(1+K)=(1+K)^2+1=K^2+2K+2$$

习题 1.1

1.1.1 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2$,$g(x)=2\lg x$

(2) $f(x)=x$,$g(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$,$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$

(4) $f(x)=1, g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$

1.1.2 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{3x+2}$　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$　　(4) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$

(5) $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+x)$　　(6) $y=\dfrac{1}{x-1}+\sin(x+1)$

1.1.3 设

$$\varphi(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3} \\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right), \varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$的图形.

1.1.4 设 $y=\begin{cases} 0, & -2<x\leqslant 0 \\ x^2, & 0<x\leqslant 1 \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$,求函数定义域及函数值 $f(-1), f(0), f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$,并作出函数的图像.

1.1.5 求函数 $y=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 的定义域和值域.

1.1.6 某城市居民在购房时,面积不超过 120 m^2 时,按购房总价的 1.5%向政府缴税;面积超过 120 m^2 时,除 120 m^2 要执行前述的税收政策外,超过部分按 3%向政府缴税.已知房屋单价是 5 000 元/m^2,则购买 125 m^2 的房屋应向政府缴税多少元?

1.2 函数的几种特性

1.2.1 有界性

定义 1.2.1 设函数 $f(x)$的定义域为 D,数集 $X\subset D$,若存在实数 M,使得对任何$x\in X$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立,则称 $f(x)$在 X 内有界,称 M 为 $f(x)$的一个界.若这样的 M 不存在,则称 $f(x)$在 X 内无界.

定义 1.2.2 设函数 $f(x)$的定义域为 D,数集 $X\subset D$ 都存在实数 M(或 m),使得对任何 $x\in X$,都有

$$f(x)\leqslant M \quad 〔或\ f(x)\geqslant m〕$$

成立,则称 $f(x)$在 X 内有上界(或下界),称 M(或 m)为 $f(x)$的一个上界(或下界).

显然,按照定义 1.2.2,有界函数必有上界和下界;反之,既有上界又有下界的函数必定是有界函数.

由定义 1.2.2 可知，若函数存在一个界 M，则任何比 M 大的实数都可作为该函数的界. 例如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $|\sin x|\leqslant 1$，1 是它的界，2 也是它的界，因为有 $|\sin x|\leqslant 2$ 成立.

应该注意的是，函数有界性如何定与考虑的自变量 x 的范围有关.

例 1.2.1 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上是有界函数，但它在 $(0,1)$ 内是无界的.

证明 当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，有 $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant 1$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上既有下界又有上界，故是有界函数.

再来证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界. 若任意 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内有界，由定义1.2.2 知存在 $M>0$，对任何 $x\in(0,1)$，都有 $|f(x)|=\dfrac{1}{x}<M$，即有 $x>\dfrac{1}{M}$，这是不可能的，显然在区间 $(0,1)$ 内有小于 $\dfrac{1}{M}$ 的数存在，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

1.2.2 单调性

定义 1.2.3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减小的.

单调增加和单调减小的函数统称单调函数，其对应区间为单调区间.

单调增加的函数的图像是一条沿着 x 轴正向上升的曲线（如图 1.2.1 所示）；单调减少的函数的图像是一条沿着 x 轴正向下降的曲线（如图 1.2.2 所示）.

例 1.2.2 证明 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加函数（如图 1.2.3 所示）.

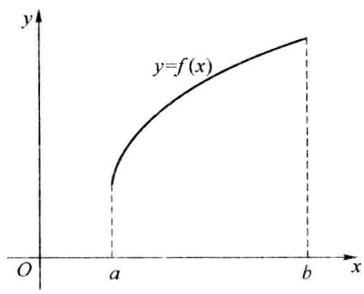


图 1.2.1

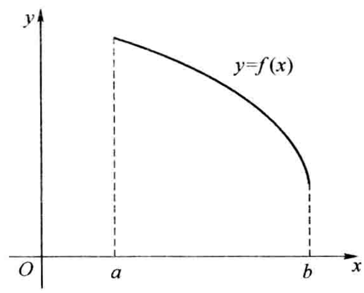


图 1.2.2

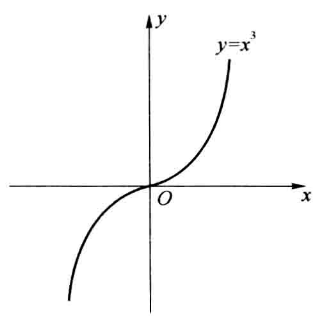


图 1.2.3

证明 任取两数 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，考查

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)\\&=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]\end{aligned}$$