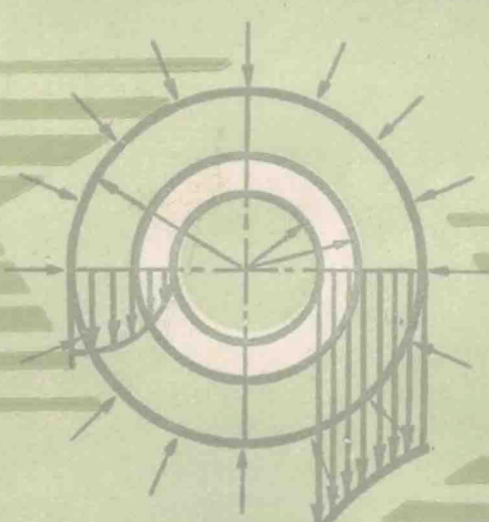
高等学校教学用书

相似理论与模型试验

崔广心　编著



中国矿业大学出版社

高等学校教学用书

相似理论与模型试验

崔广心　　编著

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书介绍了相似理论基础，物理模拟和数学模拟的模型试验台设计及试验，试验优化和数据处理方法。对地下工程、矿山建筑，特别对在地质条件复杂的工程的试验研究，做了实例介绍。

本书可作为高等院校采矿工程、地下工程、矿山建筑等专业本科生选修课教材及硕士研究生选修课教材，也可供上述各专业的科研、设计人员和现场工程技术人员参考。

责任编辑 周立吾

高等学校教学用书
相似理论与模型试验
崔广心 编著
中国矿业大学出版社出版
江苏省新华书店经销 中国矿业大学印刷厂印刷
开本850×1168毫米1/32 印张5.6875 字数141千字
1990年9月第一版 1990年9月第一次印刷
印数：1—1000册
ISBN 7-81021-378-4
O·13 定价：1.20元

前　　言

模型试验是解决复杂的工程问题的一个行之有效的重要方法。

模型试验方法五十年代开始在我国矿山建筑业应用，到六十年代取得一些成果。

为了适应经济建设和科学研究的需要，从1980年开始开设“相似理论与模型试验”课，先后在三个专业、几届学生中讲授。

“相似理论与模型试验”课的任务是：使学生初步掌握以相似理论为基础的物理模拟和数学模拟的试验方法，为适应地下工程和矿山建筑工程中问题的研究，以及推广应用试验结果的需要打下技术基础。有些院校和专业将本课与“量测技术”两课合并而成“试验技术”课。考虑到采矿工程、地下工程和矿山建筑专业的特点，仍应按两门课程开设为宜。故本书未含“量测技术”课的内容。

作者基于本人1984年编印的《相似理论与模型试验》讲义，结合教学、科研的实践和成果，并参阅了有关专家学者的论著（参考文献附后）编著了本书。谨以此书献给现在和未来从事地下工程和矿山建筑的同行。并向参考文献的作者表示衷心的感谢。

由于编著者水平所限，不当之处实属难免，敬请读者批评指正！

编　者

1989年9月

目　录

概　述

社会生产不断发展，各个产业部门所提出的问题日益复杂和繁多。用数学解析法来解决这些课题愈来愈感到困难。有些课题至今尚未得到解析解，或者只能作一些假设和简化再求解，因而带来了一些误差。为了解决生产中和工程中提出的问题，人们开展了试验研究，然而个别试验的结果不能广泛地推广。相似理论与模型试验就是在这种情况下产生和发展的。它是把数学解析法和试验法的优点结合起来，来研究和解决生产和工程中的问题。它是科学研究的主要方法之一，是解决生产和工程问题的一种有效方法。

早在1606～1620年，人们就开始研究和应用相似的概念。到1686年，牛顿（J.Newton）研究解决了两个物体运动的相似，并且确定了两个力学系统相似的准则——牛顿准则。1882年，付利业（J.Fourier）提出了两个冷却球体温度场相似的条件。1848年，法国科学家贝特朗（J.Bertrand）以力学方程的分析为基础，首次确定了相似现象的基本性质——相似第一定理，以后许多学者都应用它。例如：法国学者贝特朗自己就在1878年探讨了热和电的相似；弗鲁特（W.Froude）用模型研究了船的航行特性；雷诺（O.Reynolds）以一般的形式，用相似准则来描述了流体沿管道流动的规律，得到了人们熟知的雷诺准则；1909年，俄国学者茹柯夫斯基（Н.Б.Жуковский）把相似理论应用于航空动力学的研究，将模型试验的结果转换到与模型相似的飞机上

去。德国学者普兰特（L.Prantle）在航空动力的模型试验上也做了许多工作。

1911～1914年间，俄国的费捷尔曼（А.Федерман）和美国的波根汉（E.Buckingham）先后导出相似第二定理——即π定理。1925年爱林费斯特—阿法那赛夫（T.A.Erenfest—Afanassiewa）对自然界任何现象相似的最普遍的情况，证明出了第一定理和第二定理。至此，在最普遍情况下，关于相似现象性质的学说基本上建立了。

相似第一定理与第二定理，是在假设现象相似的基础上导出的。但是，它没有回答如何判定两现象是否相似。1930年苏联学者基尔皮契夫（М.В.Кирпичев）和古赫曼(А.А.Гухман）提出了相似第三定理。回答了如何判定两现象相似的问题。至此，相似理论便形成了较完整的理论。

科学技术的发展，特别是工程数学和电子计算机的发展，为模拟试验技术的发展开拓了广阔的前景。现在模拟试验技术可以分为：

1．物理模拟（也称“同类模拟”）

它是被研究的原型与模型均属于同一类物理现象间的相似。物理模拟是基础，它是研究原型的最基本的方法，也是给原型建立数学模型的重要方法之一，又是检验所建立的理论的方法之一。

2．数学模拟（也称“异类模拟”）

它是把被研究的原型用与其有相同规律的另一类物理模型进行模拟研究，来求得原型解的模拟研究方法。它是在已知数学函数式的基础上，对模拟技术的一个发展。水—热模拟、非电量电测的仪表多属于数学模拟范围。

3．计算机模拟（也称“数值模拟”）

随着电子计算机的应用和工程数学的发展，计算机数值模拟也获得了迅速发展。它具有研究宏观事物、得出各种条件下的参

量数值的功能，也能研究物质微观运动过程。虽然在计算机模拟中，还有计算机容量和计算速度及一些参量的数值计算技术等问题，但在应用中已显示了这种技术的优点和发展前景。

4. 信息模拟（也称“功能模拟”）

在计算机模拟的基础上，以系统论、信息论和控制论为理论指导，将信息、数值模拟和机械的或电的运动相结合，能够作到系统中的功能模拟。它是“机器人”人机对话和运动的基础。

由于现代高技术发展的需要，计算机模拟和功能模拟已逐渐发展成独立的分支——计算机模拟与功能模拟（信息模拟），因此，本书不作深入介绍。本书以物理模拟技术为主，并介绍一些数学模拟技术。

现在模型试验已为许多部门和学科，例如力学、建筑结构学、化工学、热工学、空气动力学、采矿学、地下工程学、矿山建筑等所应用，特别是在化工学、空气动力学和地下工程学的一些应用课题上，在目前用相似理论为指导的模型试验，还是求解的主要方法。

以相似理论为基础的模型试验（或称模拟），首先对待研究的对象（原型）进行分析，列数学方程或罗列各影响参数，经过相似转换求出相似准则；其次，考虑量测传感器的尺寸和所需精度、试验条件等因素，确定模型的几何缩比；第三，按各准则来设计试验模型（试验台），试验后用准则形式来处理试验数据；最后，仍用相似理论确定试验结果可扩大应用的范围。本书即是按这一顺序进行介绍的。

第一章　相似理论基础

第一节　相似的概念

一、几何相似

相似的概念，最初产生在几何学中。两个几何上相似的图形或物体，其对应部分的比值必等于同一个常数。这种相似叫几何相似。

例如：两个相似的三角形 A 和 B（图1-1）其对应边必互成比例。

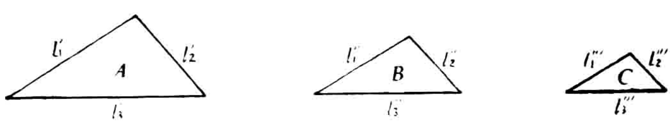


图1-1　几何相似图

三角形 A 和 B 各对应边之比为：

$$\frac{l'_1}{l''_1}=\frac{l'_2}{l''_2}=\frac{l'_3}{l''_3}=C_l \qquad (1\text{-}1)$$

式中的 C_l 叫相似常数，对于相似三角形 A 和 B 具有某一定值，而对于另一个与之相似的三角形 C，其相似常数则具有另一个定值。如相似三角形 A 与 C 之比为：

$$\frac{l'_1}{l'''_1}=\frac{l'_2}{l'''_2}=\frac{l'_3}{l'''_3}=C'_l \qquad (1\text{-}2)$$

C'_l 与 C_l 的数值是不相同的。

假若我们以三角形 A作为标本，而将其每边放大相同的倍数 C_l 时，则可得到相似于原来图形A的另一个三角形。随着相似常数C_l数值的不同，可以获得各种不同尺寸的但都与原来图形相似的三角形。这种将原来图形转换成不同大小相似图形的方法叫相似转换。

若将同一三角形的二边相比，则在所有相似的三角形中，其比值必为同一个数值。例如：

$$\frac{l'_1}{l'_2}=\frac{l''_1}{l''_2}=\frac{l_1'''}{l_2'''}=\cdots\cdots=L_{12} \qquad (1\text{-}3)$$

或

$$\frac{l'_1}{l'_3}=\frac{l''_1}{l''_3}=\frac{l_1'''}{l_3'''}=\cdots\cdots=L_{13} \qquad (1\text{-}4)$$

这种在所有相似的三角形中都保持着同一个数值的比值 L_{12} 和 L_{13} 叫相似准则(或相似准数，或相似定数)。显然，在一个不等边的三角形中，比值 L_{12} 和 L_{13} 是不相同的。

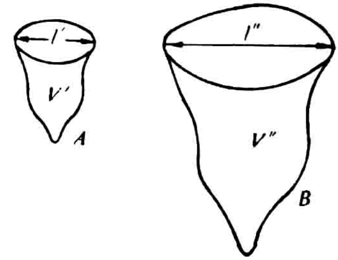


图1-2　体积相似图

现再举一例：设有两个几何相似的容器A和B(图1-2)。容器A的示性尺寸为 l'，容积为 V'；容器B的示性尺寸为 l''，容积为 V''。假使我们要求出这类形状相似的容器的V和 l 的关系，由于容器的形状比较复杂，就需要用比较复杂的数学积分。然而，我们知道，任何容器的V和 l 的关系为：

$$V\propto l^3 \qquad (1\text{-}5)$$

或

$$V=k_v l^3 \qquad (1\text{-}6)$$

式中 k_v 为一常数，随容器的几何形状而异。对于相似的容器，其 k_v 值必然相同。只要我们用试验的方法量得小容器 A 的 l' 与

V'，就能求得其常数k_v值，并将k_v值应用于大容器B。只要知道大容器B的示性尺寸l''，将k_v值代入即可求得其容积V''。同样，k_v值可以适用于这一类几何相似的容器。

改写式（1-6）为

$$\frac{V}{l^3}=k_v \tag{1-7}$$

k_v的数值随容器几何形状的不同而异。然而，同一类几何相似的容器k_v必为同一个数值，在相似理论中称为相似准则。显然，相似准则k_v是无因次数的，相似准则的数值叫相似准数。

当研究这一类容器时哪一些量可以完全地规定这一组相似容器中的个别容器呢？显然，只要它的示性尺寸l规定了，则这个容器也就被决定了。所以，示性尺寸l是这组相似容器中某一容器区别于其它容器的特征值。若是两个相似的容器，其示性尺寸l的数值相同，那就是同一个形状和大小的容器；若其示性尺寸l的数值不同，那就是两个不同大小的容器。示性尺寸l这个几何量就称之为单值条件。在这一组相似容器中，容积V是示性尺寸l的函数，因此容积V并不是单值条件。

二、物理现象的相似——同类相似

几何相似的概念，可以推广应用到物理现象上去。在进行着的物理过程的系统中，若系统几何相似，并且其中各个对应点（或对应部分）上的各个物理量也互成常数的比例时，则称为现象的物理相似（也叫同类相似）。

若U'_1、U'_2、U'_3……；U''_1、U''_2、U''_3……表示二相似系统在各个对应点上的任一物理量，则得：

$$\frac{U'_1}{U''_1}=\frac{U'_2}{U''_2}=\frac{U'_3}{U''_3}=\cdots\cdots=C_u \tag{1-8}$$

式中　C_u为一相似常数，下标u表示任一种物理量。

物理过程常常是随时间的发展而进行和发展的，因此，两个

现象相似时也一定具有时间上的相似。若以τ'_1、τ'_2……；τ''_1、τ''_2……表示二个相似系统的相应时间，C_τ表示时间相似的比例常数，则得：

$$\frac{\tau'_1}{\tau''_1} = \frac{\tau'_2}{\tau''_2} = \cdots\cdots = C_\tau \tag{1-9}$$

过程的进行常与过程开始时的状况有关，同时，被研究的系统也常受周围介质的影响。因此，除上面所说的相似外，还有初始条件相似和边界条件相似。举例来说，在不稳定热传导的现象中，我们必须知道过程开始时物体内温度分布的情况是否相似，即是初始条件相似。在过程进行中，我们还必须知道物体界面上的温度分布（或是变化规律）是否相似，这就是边界条件相似。

1. 运动的相似

两个物体A和B，沿着几何相似的路径作相似运动（图1-3）。其中，A和B两物体运动时具有不同的、然而却是相似的变速度。

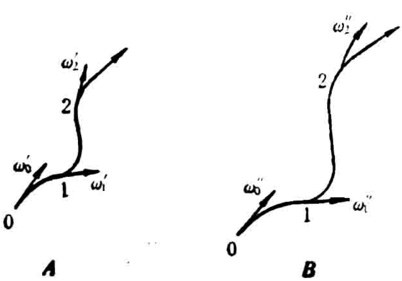


图1-3　运动相似图

因A和B的运动相似，在几何相似的路径上，在相应的点0，1、2……上，其速度ω'与ω''必互成比例，即：

$$\frac{\omega'_0}{\omega''_0} = \frac{\omega'_1}{\omega''_1} = \frac{\omega'_2}{\omega''_2} = \cdots\cdots = \frac{\omega'}{\omega''} = C_\omega \tag{1-10}$$

且由 0 至 1 点所需的时间 τ_1' 与 τ_1''……，由 1 至 2 点所需的时间 τ_2' 与 τ_2''……，亦都成比例。即

$$\frac{\tau_1'}{\tau_1''}=\frac{\tau_2'}{\tau_2''}=\cdots\cdots=\frac{\tau'}{\tau''}=C_\tau \tag{1-11}$$

任何物体的运动，其瞬时速度都可以用如下方程式表示：

$$\omega=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\tau} \tag{1-12}$$

对于物体 A，其方程式为：

$$\omega'=\frac{\mathrm{d}l'}{\mathrm{d}\tau'} \tag{1-13}$$

对于物体 B，其方程式为：

$$\omega''=\frac{\mathrm{d}l''}{\mathrm{d}\tau''} \tag{1-14}$$

既然这两个运动是相似的，存在着式(1-10)、(1-11)以及几何相似的关系，因而，以 $\omega'=C_\omega\omega''$，$\tau'=C_\tau\tau''$以及 $l'=C_l l''$代入（1-13）式，可得：

$$C_\omega\omega'=\frac{C_l\mathrm{d}l''}{C_\tau\mathrm{d}\tau''} \tag{1-15}$$

或

$$\frac{C_\omega C_\tau}{C_l}\omega''=\frac{\mathrm{d}l''}{\mathrm{d}\tau''} \tag{1-16}$$

比较方程式（1-14）与（1-16），则得如下之关系：

$$\frac{C_\omega C_\tau}{C_l}=1 \tag{1-17}$$

（1-17）式是物体 A 和物体B运动相似的必然结果，它标志着两个物体运动相似的特征，称之为相似指标。由此可得结论：若现象相似，则其相似指标为 1 。

可以看到，相似现象的各个相似常数C_ω、C_τ和C_l是为一定的关系式（1-17）而互相联系着的。关系式（1-17）是由描述物体运动的方程式（1-12）导出来的，这说明自然界现象总是服从某一定的规律。所以，各个描述现象的物理量之间必具有某种一定的关系。

将（1-10）、（1-11）相似关系式代入（1-17）式，可得：

$$\frac{\dfrac{\omega'}{\omega''}\cdot\dfrac{\tau'}{\tau''}}{\dfrac{l'}{l''}}=1 \qquad (1\text{-}18)$$

移项，得$\frac{\omega'\tau'}{l'}=\frac{\omega''\tau''}{l''}$。也就是说，在相似的两个系统$A$和$B$中，表示不同类物理量间关系的乘积$\frac{\omega'\tau'}{l'}$及$\frac{\omega''\tau''}{l''}$，在两系统的相应点上，必然数值相等，即：

$$\frac{\omega\tau}{l}=\text{idem（同一个数值）} \qquad (1\text{-}19)$$

$\frac{\omega\tau}{l}$是一个相似准则，因与参数时间τ有关，故常称为谐时准则。

当两个运动的现象相似时，其开始的条件（即开始状况的准则$\frac{\omega_0\tau_0}{l_0}$）必然具有同一个数值，也就是初始条件相似。而当现象发展下去（即物体沿路径的运动仍然保持着相似）时，则其各个相应点上的准则$\frac{\omega\tau}{l}$必然具有各自的同一个数值。

由于我们只考虑到物体运动的情况，并不深入到物体受力对

其运动的关系，因而完全地描述这一运动现象的参量只是ω、τ和l三个，而与物体的大小、形状及质量等无关。因此，运动相似的单值条件是几何条件l、时间条件τ以及物体运动的速度ω。这些量完全能描写一个物体的运动情况，也就是其中的一个现象区别于另一个现象的特征，所以，它们是单值条件。而物体的几何形状和质量等就不是单值条件了。

2．力的相似

研究物体受力运动的情况，称力学系统相似运动问题。

按牛顿第二定律，任何物体受力运动，都服从如下方程式：

$$F = m\frac{d\omega}{d\tau} \tag{1-20}$$

式中 F ——作用于物体上的力；

m ——物体的质量；

$\frac{d\omega}{d\tau}$ ——物体受力的作用而产生的加速度。

若两个物体受力运动相似时，则其各个对应量必互成比例，即存在着如下之相似条件：

$$\frac{F'}{F''} = C_F;\quad \frac{m'}{m''} = C_m;$$

$$\frac{\omega'}{\omega''} = C_\omega;\quad \frac{\tau'}{\tau''} = C_\tau \tag{1-21}$$

将（1-21）代入方程式（1-20）中，经过如前的转换，可以获得如下的准则：

$$N_e = \frac{F\tau}{m\omega} = \text{idem} \tag{1-22}$$

这个准则称为牛顿准则（或牛顿准数），常用N_e表示之。当两个力学系统运动的情况相似时，其牛顿准则的数值必然相同。

在一组力学系统运动相似时，首先是其运动所经过的几何轨迹必须相似，即几何相似；其次是相应点上的各个物理量的比值各自相同。对于上述力学系统相似运动，若几何相似，且规定了F、m、τ的数值，则ω就被决定了。因此，几何条件和F、m、τ是单值条件，而速度ω就不是单值条件。

总之，现象的相似，是其系统的几何相似，同时在其系统的相应点上，其各个物理量以及时间等单值条件的比值各自相同（即是单值条件相似）。而且，由于自然界现象总是服从于某一定的规律，这种规律常常可以应用微分方程式来表示。当现象相似时，其由微分方程式转换所得的相似准则的数值必然相同。

三、数学相似——异类相似

自然界各种现象都具有规律性，不仅在同一类性质的物理现象中常常具有相似的性质，在不同性质的物理现象中，也常具有相类似的特点。这样，反映这些不同性质的物理现象各自规律的数学方程（也称“数学模型”），其形式即是相同的（或称具有相同的数学模型）。例如，一个数学方程

$$y = a + bx \qquad (1\text{-}23)$$

从数学上讲，它是一个线性关系的数学模型，把它应用在不同的物理现象中，就具有不同的意义。在运动学中，y可以表示距离，a表示初始距离，b表示等速度，x表示时间；也可以令y表示速度，a表示初速度，b表示匀加速度，x表示时间。在电学中，y可表示电流，b表示电导（电导×电阻＝1），x表示电压。在水力学中，y可表示流量，b表示渗透系数，x表示水压头，等等。若把研究A现象的结果经过相似转换，可用来研究与A现象性质不同的、但具有相同数学方程的B现象中去，就称之为数学模拟，或异类相似。例如，用电测的电量表示水流量，表示应变、应力等等都是以数学相似的原理为基础的。

凡描写不同性质的现象，其数学方程相同时（也叫具有同一