21世纪高职高专规划教材——公共基础课系列

大学数学基础教程

张科锋 编著

清华大学出版社

21世纪高职高专规划教材——公共基础课系列

大学数学基础教程

张科锋 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书用浅显易懂的语言，讲述了高职高专数学的三大基础，即微积分、线性代数和概率与数理统计．本书遵循"以应用为目的，理论知识以必要、够用为度"的原则，浅化数学概念与定理的推导，注重用现实生活中的问题来引出数学概念，最后再回到现实生活中，来解决实际的问题．全书体现了数学课程的循序渐进、由浅入深的特点，并且充分发挥了计算机辅助教学的功能，书中还引入了办公软件 Excel 的应用．

本书可作为高职高专院校、成人高校、本科院校的二级学院的 IT 类和管理类专业的教材，也可作为对数学感兴趣的读者的参考资料．

图书在版编目(CIP)数据

大学数学基础教程/张科锋编著．—北京：清华大学出版社，2012．2
(21 世纪高职高专规划教材．公共基础课系列)
ISBN 978-7-302-27978-5

Ⅰ．①大…　Ⅱ．①张…　Ⅲ．①高等数学—高等职业教育—教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 015806 号

责任编辑：孟毅新
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘　静
责任印制：杨　艳
出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
　　社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京市密东印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：9　　**字　　数**：212 千字
版　　次：2012 年 2 月第 1 版　　**印　　次**：2012 年 2 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：20.00 元

产品编号：045385-01

前　言

对每一位刚入校的理工科大学生来说，都会花上一年多的时间学习数学的三大基础课程，即微积分、线性代数及概率与数理统计，这种情形也反映了大学数学在大学生以后的学习和发展中所占据的重要地位.而对高职高专层次的学生来说，其数学基础不牢，学习时间短.虽然在大学数学上的学习要求比本科院校的学生略有下降，但并不意味着我们就可以随意删除某些章节和知识点，以至于忽略了数学思维的整体性和连贯性.特别是对IT专业和金融、经济专业的学生，高数知识和思维技巧是不可或缺的.数学思维的整体性是：实际问题→抽象成数学问题→产生新的概念和定理→再基于这些概念和定理，进行一系列的抽象和转换，产生新的数学方法→应用于实际→问题解决.对于任何一个层次的学生来说，都是不能随意省略掉的.

国内现有的一些高职高专的数学教材，或偏重于理论证明，造成难度较大的问题；或偏重于公式计算，学生学过以后，如囫囵吞枣，不知其味.这样的教材或许能够应付考试，但遇到实际问题学生便不知如何入手，这说明学生在学习中并没有体会到数学的实质.本书正是针对这样的现状而编写的，书中的每一章都是一套完整的数学体系，从实际的问题出发，到问题的抽象化，再到问题的具体化，最后到问题的解决，环环相扣，循序渐进.书中采用“追着问题跑”的形式，寻找解决问题的方法，每一步的问题从抽象化到具体化，都使我们对数学思维有耳目一新的感觉.有时我们都在思考：那些数学家能想到，要是我们也能想到就好了！当你有这种感叹的时候，跟着这本书的思路走，答案就在其中.回顾以前的数学学习之路，我们都是在跟着老师走，老师要求计算时，学生才开始计算，这是一种被动的学习方式.而本书的每一章都是首先提出问题，且所提出的问题都会发人深省、引人入胜，让你步步为营，有融入其中之感.在备受本书熏陶之中，定有着爱不释手之情形，直至最后读到解决问题的方法为止，我们甚至可以用“不到黄河不死心”为之形容，不难有“在无形的鞭策中不断往前读”之体验.

教育不仅要向学生传授知识，更重要的是培养学生运用知识的能力.因此，我们非常重视教育方法和教学内容的改革与创新.特别是在大学数学基础课程改革中，本着加强学生基础学习和实际动手操作能力为教育目标，对教学中的各个环节都进行了调整.基于高职高专学生三年的学习时间，课程内容上贯彻了“少而精”的原则，对于教学中过难、过烦琐的学习内容，我们取其精华之所在，为培养学生实际应用能力奠定扎实的基础.同时，我们又根据不同专业，学生的不同爱好和不同的发展方向以及个人特长，设置了不同的知识，并开设各种选修内容，使学生有更大的选修空间.

本书涵盖了三大数学基础课程的内容，然而更能体现本书特色的地方是，我们并非在原有的知识点上循规蹈矩地讲解，而是用一条新的线索重新组合这些知识点，让读者能从不一般的角度去学习原有的数学知识，是一本难得的学习高数的好教材.

南海东软信息技术学院院长 杨利

2012年1月

目　　录

第1章　再谈无理数

相信大家对于无理数已经不陌生了，π，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，…都是无理数，而且无理数是一类让我们比较头疼的数，头疼的原因就在于它的无限不循环的性质，而且在现实中也很难发觉无理数是如何应用于实际的.或许将来的某一天，当你逛街的时候，发现某商店外面打出这样的标语："本店所有产品的价格一律开根号."这时你才猛然发觉无理数终于派上用场了.在这里不讨论无理数的用途，因为它既然存在了上千年了，自然有它的用途，因此我们把重点放在下面两点上：①无理数这么古怪的数，人们是如何来发现它的呢？②无理数又是如何来定义的呢？

来试想一下，如果我们的数学老师只教给了我们有理数，并没有告诉我们有理数之外还有无理数，也就是我们只生活在有理数的海洋里，那么你能想到世界上还存在无理数这类数吗？有的同学告诉我说无理数就是无限不循环小数.我反问到你怎么知道它不循环呢？这个学生回答是老师告诉他的.对啊，问题来了，你的老师又怎么知道它无限不循环呢？要知道你首先说它是无限的，既然无限，你怎么知道就不循环了呢？万一有一天，一不小心，它就循环了呢？当然，这是不可能的.所以说我们这么来定义无理数，总觉得欠妥当，不能把人来说服.那么就请认真地来读本章的内容吧，让我们追着这两个问题来探索吧.首先让我们追本溯源，从一个个数集谈起.

1.1　数　　集

每一个数字本身是孤立的，当然我们给予了它们一些运算，便建立了它们之间的关系，从而一个个孤零零的数字，通过运算，就构成很漂亮的结构.这就像我们一个个的人，大家本来没有什么联系，但是通过一些关系，比如亲人关系、同事关系、同学关系等，便把我们人类联系起来，构成社会结构.这也像我们建造房子，本来砖头、木材、瓦块等都是孤立的，但是通过人们的设计和水泥的黏合，便构成了漂亮的房子.所以在数学研究中的一个重大问题，便是研究满足某一种运算性质的集合的结构.数字间的运算就包括我们以前学过的"+"、"−"、"×"、"÷"和后面我们还要学习到的极限运算等.而对于运算中一个最基本的问题就是封闭性.因为我们在解方程的时候，总希望方程能在所求解的集合中存在解，也就是说某个数的集合，当赋予某种运算之后，这个数中的全体来进行这个运算，所得到的所有结果还是在这个集合中，这就是封闭性.现在我们从封闭性出发，来研究每一个数的集合.

1. 自然数(natural number)

自然数的集合我们表示成$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$.明显可以看出自然数对于"+"、"×"两种运算是封闭的，而对于减法是不封闭的.我们让所有的自然数相互彼此相减，如果把所有的自然数锁在一个房间内，最终得到的差，既包含了自然数，还有一部分结果跑到了房间外面，于是我们把在外面的结果叫到房间里面来，从而构成一个新的数集，也就是整数集.而且我

们知道，在房间外面的就是负整数.

2. 整数(integer)

整数的集合我们表示成 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$. 可以看出此时整数对于“+”、“−”、“×”3 种运算都是封闭的了，而对于“÷”是不封闭的. 我们让所有的整数彼此相除，如果把所有的整数锁在一个房间里面，最终得到的商，既包含了整数，还有一部分结果跑到了房间外面，于是我们把外面的结果叫到房间里面，从而构成一个新的数集，也就是有理数集，而且我们知道那些在房间外面的就是分数.

3. 有理数(rational number)

经过上面的分析可以将有理数集表示成：$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p,q\in\mathbf{Z},q\neq0 \text{ 且 } p,q \text{ 互素}\right\}$(互素指的是两个整数的最大公因子为 1). 我们可以看出有理数就是一个相对很完美的数了，它对于“+”、“−”、“×”、“÷”4 种基本运算都是封闭的. 古希腊的毕达哥拉斯学派所提出来的“万物皆数”中的“数”指的就是有理数. 他们这个学派对数的研究作出了很大的贡献，他们将整数分成奇数和偶数，并且还发现了勾股定理. 可恰恰就在这个时候，毕达哥拉斯的一个学生希帕索斯发现了有理数之外的数，为此，他的同伴把他抛进大海. 不过更有可能是毕达哥拉斯已经知道这种事实，只是希帕索斯因泄密而被处死，当然这也引发了第一次数学危机. 现在让我们看看危机是怎么出现的，实质就是来证明$\sqrt{2}$为什么是无理数.

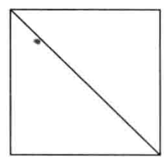

图 1-1

图 1-1 所示为一个边长为 1 的正方形，设对角线长为 x，根据勾股定理，$x^2=1^2+1^2$ 如果 x 是有理数，那么设 $x=\frac{p}{q}$($p,q\in\mathbf{Z},q\neq0$ 且 p,q 互素)，于是得到$\frac{p^2}{q^2}=2$，即 $p^2=2q^2$，从而可以得到 p 一定是个偶数. 我们可以设 $p=2k(k\in\mathbf{Z})$，那么代入后，可以得到 $2k^2=q^2$，从而得到 q 也是个偶数，因此 p,q 就存在一个公因子 2，这与 p,q 互素是矛盾的. 所以可以知道 x 不是有理数，从而可以得到在有理数之外还存在着其他的数的结论. 现在应该知道，$\sqrt{2}$是无理数，且并非像以前说的无限不循环那么简单了，而是需要严格的证明. 这样才能让人信服. 那么同学们就自己来动手证明一下$\sqrt{3}$是无理数吧.

经过前面几个数的扩张，可以看出都是由于某种运算，使得原来的数集不能满足封闭性了，我们就不得不来扩张. 也就是说有理数对于某种运算还是不封闭的. 那么这个运算是什么呢？现在假设我们房间里面都是有理数，让它们彼此进行什么运算，才能使得运算结果跑出房间呢？请读者继续往下阅读.

1.2 数列的极限

定义 1-1 按照一定顺序排成的一列数，叫做数列，组成数列中的每个数叫做这个数列的项.

第一个数叫做数列的第 1 项，记作 a_1；第二个数叫做数列的第 2 项，记作 a_2；第 n 个数

叫做数列的第 n 项，也叫做通项，记作 a_n. 数列一般可以写成：$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，并记作 $\{a_n\}$，有时简单记作 a_n. 对于数列需要说明一点，数列是有无限多项的，不能单纯认为一个数列只有 n 项.

下面看几个例子：

(1) $3,6,12,24,\cdots,3\times 2^{n-1},\cdots$;

(2) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$;

(3) $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$;

(4) $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n+1}}{n},\cdots$.

现在让我们来分析以上几个例子. 第一个例子：$3,6,12,24,\cdots,3\times 2^{n-1},\cdots$，随着 n 的不断增大，整个数列的项也不断增大，可以想象，数列到了最后就是一个正的无穷大了. 第二个例子：$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$，同样随着 n 的不断增大，数列的项也在不断增大，但是它和第一个数列不同的就是，第二个数列不是朝着正无穷大而去，而是不断靠近于 1，n 越大，数列的项和 1 的距离就越小. 第三个例子：$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$，明显看出它没有什么趋势，只是在 1 和 -1 之间来回地跳，有点“脚踏两只船”的感觉. 第四个例子：$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n+1}}{n},\cdots$，乍一看是很难看出它有什么趋势，但是仔细观察一下，我们可以看出，数列的每一项都在 1 的左右来回地跳，而且随着 n 的不断增大，数列的项和 1 之间的距离越来越小. 经过对这几个例子的分析后，我们就可以给出极限的粗略定义了.

定义 1-2　如果当 n 无限增大时，数列 $\{a_n\}$ 无限接近一个确定的常数 A，则称常数 A 是数列 $\{a_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A，记作：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \text{或} \quad a_n \to A(n\to\infty)$$

对于上面的 4 个例子，可以这样来记：$\lim\limits_{n\to\infty} 3\times 2^{n-1}=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$ 不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

对于极限为无穷大和不存在的情况，我们称数列是发散的.

现在从另外两个角度来理解收敛数列的极限，可能使得大家对数列的极限能有更深入的认识.

第一个角度：从数列的子列入手.

如果数列 $\{b_n\}$ 中的任意一项都是数列 $\{a_n\}$ 中的某一项，那么我们就称数列 $\{b_n\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 的子列. 比如由正偶数构成的数列：$2,4,6,\cdots,2n,\cdots$ 就是由正整数构成的数列：$1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 的子列. 对于收敛数列的子列有下面的性质.

定理 1-1　如果一个收敛数列的极限为 A，则其任意子列都收敛，并且极限也都是 A.

定理直观上是很容易理解的，但是这个定理的证明要用到数列极限的精确定义，在后面我们给出数列极限的精确定义后，在课后阅读的部分我们再给出证明.

这个定理就给了一个我们能够证明一个数列不收敛的方法，也就是说，如果一个数列存

在两个收敛的子列，而这两个收敛子列的极限不相等，那么这个数列肯定不收敛. 比如数列 $1,\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{5}{4},\frac{1}{5},\frac{7}{6},\cdots$存在两个子列，由奇数项构成的子列为 $1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\cdots$，由偶数项构成的子列为$\frac{3}{2},\frac{5}{4},\frac{7}{6},\cdots$. 我们可以看出这两个子列都是收敛的，奇数项构成的子列收敛于 0，偶数项构成的子列收敛于 1，两者不相等，所以原来的数列没有极限.

第二个角度：从数轴的对应入手.

如果数列$\{a_n\}$收敛于数 A，我们将数 A 和数列各项 $a_1,a_2,a_3,\cdots$与数轴上对应的点标出来，容易看出，当 n 无限变大时，点 a_n 与 A 之间的距离$|a_n-A|$无限变小，即只要 n 充分大，$|a_n-A|$可以任意小，在数轴上的 A 点附近聚集了$\{a_n\}$的无穷多个点，而且离 A 越来越密集，如图 1-2 所示.

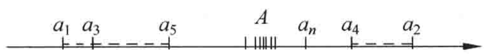

图 1-2

为了更加便于我们从数轴的角度来理解数列的极限，下面介绍一个邻域的概念.

定义 1-3 集合$\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$叫做以 a 为中心，δ 为半径的邻域，记作：$N(a,\delta)$.

邻域实际上就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$，邻域主要是我们为了研究 a 点的某些性质来设定的. 比如我们要研究某个同学 a 的性质，如他的身高、体重，这些我们直接研究 a 就可以. 但是去研究 a 的人际交往，只研究 a 本身就不行了，于是我们就以 a 为中心，以 δ 为半径，来画出 a 的一个人际交往圈，我们就来研究那些在交往圈里面的同学对于 a 这个同学人际交往能力的评价，从而得到 a 的人际交往的能力.

有了邻域的概念之后，下面就来研究这样两个问题.

如果数列$\{a_n\}$收敛于数 A，那么我们以 A 为中心，以任意的 $\delta>0$ 为半径，画一个邻域 $N(A,\delta)$.

问题 1：在 $N(A,\delta)$内有数列$\{a_n\}$的有限项还是无限项？

问题 2：在 $N(A,\delta)$外有数列$\{a_n\}$的有限项还是无限项？

问题 1 是很容易回答的，肯定是无限项，如果只有有限项，可以让 δ 更小一点，这样就可以使得数列$\{a_n\}$没有项在邻域内了，这就和数列极限是 A 相矛盾了. 那么将问题 1 再问得深一点：既然有无限项，那么是不是存在某一项 a_N，使这一项以后的各项都跑进邻域里面呢？要想回答这个问题，就要先解决问题 2. 问题 2 看上去没有问题 1 那么容易回答了，因为当 δ 取得很小的时候，就会使得有更多的数列的项跑到了外面. 那么是有限项还是无限项呢？我们假设是有无限项落在邻域 $N(A,\delta)$的外面，要么在邻域的左边有无限项，要么在邻域的右边有无限项. 我们就取有无限项的一边，从中任意取出数列的一项作为 b_1. 然后我们将有无限项的这边随便一刀砍下去，分成两部分，肯定也会有一部分含有数列的无限项. 我们再从含有无限项的这部分取出数列的一项作为 b_2，然后再将含有无限项的这部分一刀砍下去. 继续前面的过程，如此下去，就可以得到数列$\{a_n\}$的子列$\{b_n\}$，并且我们还可以知道子列$\{b_n\}$收敛或者为无穷大，但是肯定不会收敛于 A，这就和我们前面讲的定理 1-1 相矛盾了. 所以在邻域 $N(A,\delta)$外肯定有数列$\{a_n\}$的有限项. 当然这也就回答了数列肯定存在某一项 a_N，使得这一项以后的各项都跑进邻域里面. 这也就是说，无论以 A 为中心画一个多么小

的邻域，数列都有无限项落在邻域里面，只有有限项落在外面，并且存在某一项 a_N，使得这一项以后的各项都跑进邻域里面. 从这个分析我们可以得出下面的两个结论.

结论 1　收敛的数列必然有界.

这个结论反过来不成立，也就是说，有界数列不见得收敛，比如$\{(-1)^{n-1}\}$.

结论 2　我们可以给出数列极限的精确定义，即已知数列$\{a_n\}$和常数 A，对于任意的 $\varepsilon>0$，都存在某个整数 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，都有 $|a_n-A|<\varepsilon$，那么称 A 就是数列在 n 趋向于无穷大时的极限.

经过前面从两个不同的角度分析，最后给出了数列极限的精确定义，希望读者能对数列的极限有个全新的认识，那么现在来看几个数列极限的例子.

(1) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$：通过观察可以看出其极限为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

(2) $\frac{2}{3},\frac{4}{9},\frac{8}{27},\cdots,\left(\frac{2}{3}\right)^n,\cdots$：通过观察可以看出其极限为$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$.

难度大点的比方说数列 $a_n=\frac{2n^2-3n+4}{5n^2+n+8}$，极限可以这样来求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+4}{5n^2+n+8}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}{5+\frac{1}{n}+\frac{8}{n^2}}=\frac{2}{5}$$

对于数列极限的求法还有很多，这里我们不再多讲了.

下面开始来解决我们前面提出的问题. 前面我们知道有理数集已经是很完美的了，它对于四则运算是封闭的，那么它还对什么运算不封闭呢？这个运算就是我们刚讲的极限运算，也就是说如果我们把所有的有理数放在一个封闭的房间里面，让它们任意地构成有理数的数列，然后找出收敛的有理数的数列来，我们发觉它们这些收敛的极限并没有全部在房间里面，有的极限跑到了房间的外面，那么跑到外面的这些数就是我们所说的无理数. 也就是说由有理数组成的收敛数列，最后的极限未必是有理数. 举个例子来说明.

数列 $1+1,1+\frac{1}{1+1},1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}},\cdots$的通项表达式是 $a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}$，我们可以看出这个数列是一个有理数的数列，每一项都是有理数，那么它最后的极限还是有理数吗？不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x$，那么自然就有$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}=x$，对通项表达式两边同时取极限，那么就可以得到 $x=1+\frac{1}{x}$，解方程可以得到 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 由于数列的每一项都是大于 1 的，所以$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去)，最终我们得到上面的这个有理数列的极限为$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，是一个无理数. 这个例子就明显说明了，在一个封闭的房间里面，装满了有理数，如果我们赋予了有理数以极限的运算后，发现有理数对这个极限运算不封闭，有的跑到了外面，跑到外面的就是无理数. 现在我们就比较容易给出无理数的定义了：任何一个无理数都是某个收敛的有理数列的极限. 我们把在房间外面的无理数全部叫到房间里面来，构成一个新的数集，就是实数集.

下面来讲述一下实数(real number).

实数集合表示成 **R**. 实数集是一个非常完美的数，它对于"＋"、"－"、"×"、"÷"和极限

运算都是封闭的.所以以后我们研究的问题全部都是建立在实数集上的.

这里要交代一下,比实数更广泛的还有复数和四元数,在这里我们不讲解了.

为了更方便大家对无理数的了解,我们再来举几个例子.

(1) $\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1},\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2},\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3},\cdots$:在这个数列中,每一个数都是有理数,可是它的极限是无理数 $\mathrm{e}=2.718\cdots$.

(2) $1,1-\frac{1}{2},1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\cdots$:在这个数列中,每一个数也都是有理数,可是它的极限是无理数 $\ln 2$.

(3) $4,4\left(1-\frac{1}{3}\right),4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right),\cdots$:在这个数列中,每一个数也都是有理数,可是它的极限是无理数圆周率 $\pi=3.1415926\cdots$.

上面几个例子是如何求出来的,需要用到后面微积分和级数的知识,在这不给大家推导了.此时我们了解,既然无理数是有理数列的极限,那么任何一个无理数身边都被无数的有理数包围着,要多紧密有多紧密.用数学的语言来说就是对于任意一个无理数 a,以 a 为中心,以任意 $\delta>0$ 为半径,作一个邻域 $N(a,\delta)$,里面都包含了无数的有理数.像这种情况的关系,我们就说有理数在无理数中是稠密的.那么我们又会问另外一个问题了,那无理数在有理数中是否也是稠密的呢?也就是说任何一个以有理数为中心,以任意长为半径构成的邻域,里面是否都包含无数的无理数呢?或者说得更简单点,对于任何一个有理数,是否都存在某个无理数列,使得这个有理数是这个无理数列的极限呢?回答是肯定的,比如说 b 是任意一个有理数,那么无理数列 $b+\pi,b+\frac{\pi}{2},b+\frac{\pi}{3},\cdots$ 的极限就是 b.说明无理数在有理数中也是稠密的.作为练习,大家不妨求下列无理数列的极限:

$$\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$$

像有理数在无理数中稠密,无理数在有理数中稠密,该怎么去理解呢?这就像是海水中的水和盐,任何多么小的杯子,舀起来的海水里面都含有水和盐,水的周围有盐,盐的周围有水.这章我们就讲到这儿吧,希望读者能加深了对无理数的认识.下面我们来选读一些知识,有兴趣的朋友可以细细读来.

1.3　复习与选读

1. 复习

现在来回忆一下,在数列里面有两类特殊的数列;一类是等差数列;一类是等比数列.等差数列就是在数列中任意相邻的两项,后面一项与前面一项的差,恒为一个常数.等差数列的通项表达式为 $a_n=a_1+(n-1)d$,d 是公差.等比数列就是在数列中任意相邻的两项,后面一项与前面一项的商,恒为一个常数.等比数列的通项表达式为 $a_n=a_1q^{n-1}$,q 是公比.对于数列我们还往往求出其前 n 项的和,即 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.下面来看看对于等差数列和等比数列的前 n 项和的公式的推导.

设$\{a_n\}$是等差数列，利用倒序相加法，我们有

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1$$

将上面两式加起来得

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1)$$

因为$\{a_n\}$是等差数列，所以有

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_n + a_1$$

于是我们得到

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

所以等差数列的前 n 项和的公式为

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

设$\{a_n\}$是等比数列，利用错位相减法，我们有

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$$
$$S_n q = a_1 q + a_2 q + \cdots + a_n q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n$$

将上面两式错位相减，有

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1 q^n = a_1(1-q^n)$$

所以等比数列的前 n 项和的公式为

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

2. 选读

(1) 选读 1

作为常识，我们再给大家讲解几道数论中的问题. 记得在我小学 2 年级的时候，我问过我的父亲一个问题，就是到现在为止还有什么数学问题没有解出来的呢？我父亲回答我说："1+1=2 这个问题还没有证明出来."当时就觉得很疑惑，后来长大了，才知道原来是哥德巴赫猜想.

① 哥德巴赫猜想

任何一个大于 4 的偶数都可以表示成两个素数之和，简称"1"+"1"="2". 对于这个问题的证明，中国数学家陈景润作出了很大的贡献. 此问题至今还没有得到完全解决.

② 费马猜想

对于每个大于 2 的正整数 n，任意两个正整数的 n 次方之和不能为另一个正整数的 n 次方. 也就是说，方程 $x^n + y^n = z^n (n>2)$ 没有正整数解. 这个著名的猜想如此浅显易懂，可是证明却出奇的艰难. 300 多年来，许多专业数学家和业余数学爱好者为解决这个问题做了很多的努力，最终在 1994 年由 41 岁的英国数学家怀尔斯所证明.

(2) 选读 2

对于开区间、闭区间的概念，我们都很熟悉了，这里我们简单提两个地方，希望能给大家一些小的提示.

开区间：$\{x \mid a<x<b, a, b \in \mathbf{R}, a<b\}$. 我们都知道任意有限个开区间的交，结果是开区

间或空集,那么当到达无限的情况呢?我们来看个例子:

$$(-0.1,1.1)\cap(-0.01,1.01)\cap(-0.001,1.001)\cap\cdots=[0,1]$$

闭区间:$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,a,b\in\mathbf{R},a<b\}$. 我们都知道任意有限个闭区间的并集结果还是闭区间或者两个不相交的闭区间,那么当达到无限的情况呢?我们来看个例子:

$$[0.1,0.9]\cup[0.01,0.99]\cup[0.001,0.999]\cup\cdots=(0,1)$$

从这两个例子可以看出,有限的情况如果推广到无限,可能结果就会发生变化.

(3) 选读 3

定理 1-2 如果一个收敛数列的极限为 A,则其任意子列都收敛,并且极限也都是 A.

证明:设数列$\{a_n\}$的极限为 A,那么根据数列极限的精确定义,对于任意的 $\varepsilon>0$,都存在一个整数 $N>0$,使得当 $n>N$ 时,有 $|a_n-A|<\varepsilon$. 设$\{a_{k_n}\}$是$\{a_n\}$的任意一个子列,所以有 $k_n>n$,于是数列$\{a_{k_n}\}$也存在一个整数 k_N,使得当 $k_n>k_N>N$ 时,有 $|a_{k_n}-A|<\varepsilon$,因此子列$\{a_{k_n}\}$的极限也是 A.

证毕.

(4) 选读 4

最后介绍 3 个常用的符号.

$\forall$:表示对于任意的;$\exists$:存在;$\exists\,|$:存在唯一.

习题

求下列数列的极限.

1. $\sqrt{2},\sqrt[3]{2},\sqrt[4]{2},\cdots$.
2. $\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[4]{4},\cdots$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n-8}{4n^2+2n+3}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)$.
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$到底是 1 还是 0?
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.
8. 求数列$\left\{1-\dfrac{1}{10^n}\right\}$的极限,相信读者朋友能从这个题目中体会 $1=0.999\cdots$.

第2章　面　　积

对于一些规则图形的面积公式，相信朋友们都不陌生了：

长方形的面积＝长×宽

正方形的面积＝边长^2

三角形的面积＝$\frac{1}{2}$×底×高

梯形的面积＝$\frac{1}{2}$×(上底＋下底)×高

圆的面积＝π×半径^2

扇形面积＝$\frac{1}{2}$×弧长×半径

这些图形都是我们所熟知的规则图形，而对于不规则图形，比如下面两个例子.

例 2-1　函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,1]$上的图形与 x 轴、直线 $x=1$ 所围成的图形的面积(见图 2-1)是多少？

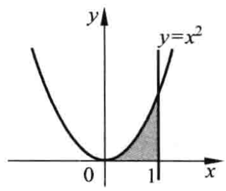

图　2-1

例 2-2　函数 $f(x)=\sin x$ 在区间$[0,\pi]$上的图形与 x 轴所围成的图形的面积(见图 2-2)是多少？

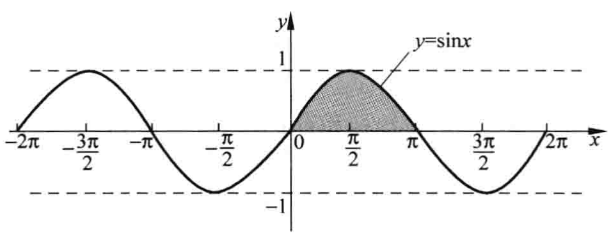

图　2-2

还有许许多多类似的问题，那么该如何来求取这些不规则图形的面积呢？这就是我们第2章所要追着跑的问题，也就是我们常常听说的微积分最开始要解决的问题.求出这些问题自然没有那么简单的，我们要走出一个非比寻常的长征路来.当然读者也能从中体会到数学家的巧妙思维，我们分成6步来走：①复习函数；②再谈极限；③导数；④微分；⑤不定积分；⑥面积.

这里我们要说明一点，对于例 2-1，运用我们前面讲过的数列极限，是可以求出来的，这里我们不妨给大家求一下，只是这种方法不具有普遍性，只能针对个别面积来求.

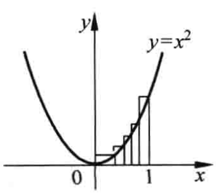

图　2-3

例 2-1 的数列极限求法是：先将区间$[0,1]$分割成 n 份，那么每一份的长度为$\frac{1}{n}$，构造出n个小矩形，把这 n 个矩形的面积求出来，并且求和，如图 2-3 所示.

n 个矩形面积的和为

$$S_{\text{和}}=\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\frac{3^2}{n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2}\right)$$
$$=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

我们知道当 $n\to\infty$ 时，上述面积便是我们所要求的面积了，所以真正的面积为

$$S=\lim_{n\to\infty}S_{\text{和}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

对于这个题目来说，我们采用上面的方法可以解决，但是对于例 2-2，上述方法就不行了，因此还要采用更加先进的方法.

补充：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 的求法.

首先我们利用等差数列前 n 项和的公式可以求出：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

然后再利用分解式：

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$$

我们就会有

$$(1+1)^3=1^3+3\times1^2+3\times1+1$$
$$(2+1)^3=2^3+3\times2^2+3\times2+1$$
$$(3+1)^3=3^3+3\times3^2+3\times3+1$$

将等式左边加起来，右边加起来，然后约掉相同的项，我们得到

$$\cdots$$
$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$$
$$(n+1)^3=1^3+3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+n$$

整理得

$$(n+1)^3=1^3+3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3\,\frac{n(n+1)}{2}+n$$

移项化简得

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

2.1 函　　数

2.1.1 函数的定义

大家在初中、高中都学习过函数的定义，那我现在问你一下，什么叫函数？可能大家一下会很茫然，觉得函数这个东西是那么神秘得不可言语，或许我们能举出几个函数的

例子，但是它的确切定义就难以描述了，其实不用这么头疼，函数只需要用两个字就可以来描述——“关系”．以下内容相信很多都是大家熟悉的，我们简单说一下，不做深入讨论．

有了一个个数集之后，我们接下来就要来建立各个数集之间的关系，这个时候我们就引进了函数．函数说白了就是一种特殊的关系，而这个特殊性就体现在“任意性”和“唯一性”上．

定义 2-1 A,B 是任意两个集合，$\forall x\in A$，按照某种法则 f，$\exists\,|\,y\in B$ 与 x 相对应，这时候我们称 y 是 x 的函数(function)，记为 $y=f(x)$．x 是自变量，y 是因变量，A 是定义域．

可见函数就是描述了两个变量之间的关系，一个变量的变化，引起了另外一个变量的变化，一个主动地在变，另外一个被动地跟着变，高等数学就是主要用来研究具有主动权的 x 在变化的时候，被动权的 y 是如何变化的．再深入一点就是当主动权的 x 有朝着某个方向变化的冲动时，被动权的 y 有什么样的变化冲动，这就是后面导数、微分部分要研究的问题．

平面直角坐标系中的点集全体 $C=\{(x,y)\,|\,y=f(x)\}$ 称为函数的图像．画函数图像就很重要了，从图像能很明显地看出函数的性质，下面我们来看几个函数的例子．

(1) 常量函数：$y=-2$．

(2) 在等温过程中，定量的理想气体的体积 V 与压强 P 是反比关系：$V=\dfrac{C}{P}$，C 是与该气体有关的常数．

(3) 分段函数：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x & 0\leqslant x\leqslant 10\\ 30-\dfrac{2}{3}x & 10<x\leqslant 20\end{cases}$，画出函数图像，如图 2-4 所示．

(4) 绝对值函数：$f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$，画出函数图像，如图 2-5 所示．

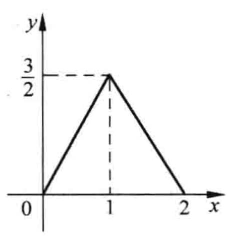

图 2-4

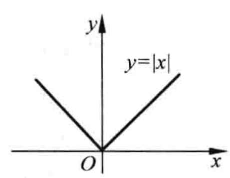

图 2-5

(5) 符号函数：$y=f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$，画出函数图像，如图 2-6 所示．

(6) 取整函数：$y=[x]$，$[x]$表示不超过 x 的最大整数，画出函数图像，如图 2-7 所示．