21世纪高等学校工科数学辅导教材

线性代数学习方法与解题指导

宋岱才　赵晓颖　等编著
刘国志　主　审

化学工业出版社

21世纪高等学校工科数学辅导教材

线性代数学习方法与解题指导

宋岱才　赵晓颖　等编著
刘国志　主审

化学工业出版社
·北京·

本书以教育部制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为依据，与同济大学编写的工程数学《线性代数》（第五版）教材相配套。

全书共分5章，每章内容包括教学基本要求、内容提要、典型例题与练习题（A题、B题），书末附有四套自测题以及练习题和自测题的参考答案。本书在内容上增加了疑难解析部分，题型主要包括填空题、选择题、计算题和证明题，同时摘录了1987～2012年以来的部分考研试题。

本书可作为理工类普通高等院校各专业的教学用书或教学参考书，也可作为《线性代数》课程学习、训练与提高的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习方法与解题指导/宋岱才，赵晓颖等编著.
北京：化学工业出版社，2012.8
21世纪高等学校工科数学辅导教材
ISBN 978-7-122-14743-1

Ⅰ.线… Ⅱ.①宋…②赵… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第147287号

责任编辑：唐旭华　郝英华　　　　装帧设计：张　辉
责任校对：宋　夏

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张10　字数257千字　　2012年10月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：19.00元

前　　言

《线性代数》是高等工科院校学生的一门重要基础课程，也是全国工科硕士研究生入学考试的必考数学内容之一。它是自然科学、社会科学及计算机技术和数学科学本身的重要理论基础和方法。但由于本门课程内容丰富，应用和考研考试要求面较广，所以很多内容和方法不能在教学时数内完成，又加之课程中的概念抽象，运算容易出错，多数学生感到难学，做题时甚至感觉无从下手。为了帮助广大学生充分利用自习时间来自学以及帮助准备报考研究生的学生系统复习《线性代数》课程，我们根据多年的教学经验与体会，编写了这本《线性代数学习方法与解题指导》一书，以期对学习《线性代数》课程的学生有所帮助。

为了使学生能正确理解和掌握本门课程的内容，本书在形式上除了包括内容提要和一般的计算题与证明题之外，还搜集了大量的填空题、选择题，并增加了释疑解难内容。另外，从 1987～2012 年以来全国工学、经济学硕士研究生入学试题中摘录了《线性代数》课程的部分试题。每章附有练习题，书末附有练习题的答案与提示。初学者只要求试做练习题的 A 题，B 题可作为学有余力或准备复习考研的同学参考试做。最后，我们还给出了四套自测题，并附有自测题解答。其目的是为了帮助广大学生更好地学习本门课程。所以本书不仅可以作为高等工科学校本科和专科学生学习《线性代数》课程的补充教材，同时也可作为参与自学考试及考研学生复习本课程的辅导教材。

全书由宋岱才教授编写，赵晓颖老师提供了全部自测题及答案，并最终修改定稿。刘国志教授审阅了全部书稿。刘晶老师对自测题参考答案进行了审校。

本书在编写过程中得到辽宁石油化工大学教务处、理学院广大教师的支持和帮助。编者在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，希望广大读者批评指正。

编　者

2012 年 5 月

目　　录

第1章　行列式

本章基本要求

了解行列式的概念，掌握行列式的性质；会应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式；会用克莱姆法则解低阶线性方程组。

1.1　内容提要

1.1.1　n阶行列式的定义

（1）排列和逆序

由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组$(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n)$称为一个 n 元排列．所有不同的 n 元排列共有 $n!$ 个．在一个排列$(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n)$中，如果一个大的数排在小的数前面，就称这两个数构成一个逆序．一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数，通常记为 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$. 若一个排列的逆序数为奇数，则称这个排列为奇排列，否则称为偶排列.

在一个排列$(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n)$中，如果交换任意两个数的位置，称为对排列作一次对换．对换改变排列的奇偶性.

（2）n 阶行列式的定义

由 n^2 个数排成 n 行 n 列的数表，记为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，做出表中所有取自不同行、不同列 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的所有代数和，就称为此行列式的值．这里 $j_1j_2\cdots j_n$是 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列．当 $j_1j_2\cdots j_n$是偶（奇）排列时，该项的前面带正（负）号．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

式中，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 所有不同的 n 元排列求和.

注意：由于 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 所有不同的 n 元排列共有 $n!$ 项，所以 n 阶行列式的值是由所有不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的 $n!$ 项之代数和组成，其结果是一个数值.

1.1.2 余子式、代数余子式

在 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列，由剩下的元素按原位置排成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}．称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$．

1.1.3 行列式的性质

性质 1 行列互换，行列式的值不变.

注意：该性质表明了行列式中行、列地位的对称性．也就是说，行列式中有关行的性质对列也同样成立.

性质 2 对换行列式的两行（列），行列式改变符号.

推论 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

性质 3 用数 k 乘行列式的某一行（列），等于用数 k 乘以此行列式.

推论 行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号外面.

性质 4 行列式中，如果有两行（列）的对应元素成比例，则此行列式等于零.

性质 5 若行列式的某一行（列）的元素都是两个数之和，则此行列式等于两个行列式之和，如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式某一行（列）的若干倍加到另一行（列）上去，行列式不变.

1.1.4 行列式按行（列）展开定理

定理 n 阶行列式等于它的任一行（列）的所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和.

推论 1 n 阶行列式中某一行（列）的每个元素与另一行（列）相应元素的代数余子式的乘积之和等于零.

推论 2 在 n 阶行列式中，若有一行（列）除去一个元素 $a_{ij}\neq 0$ 外其余元素均为零，则此行列式的值等于这个非零元素与其代数余子式的乘积．即 $D=a_{ij}A_{ij}$．

以上结论用公式表示为：设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases} D, & i=k \\ 0, & i\neq k \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\begin{cases} D, & j=k \\ 0, & j\neq k \end{cases} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

1.1.5　几种特殊行列式的结论

（1）对角行列式、上（下）三角行列式的值等于主对角线上元素之积

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

（2）两个特殊的展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

（3）范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

（4）关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & ⋰ & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

1.1.6　行列式的计算方法

（1）基本方法

① 直接利用行列式定义或行列式性质算得结果；

② 用行列式的性质，化行列式成三角形行列式；

③ 按某一行（列）展开.

（2）常用方法

① 递推法；

② 数学归纳法；

③ 利用一些已知结论．如：a. 范德蒙行列式；b. 特殊行列式.

1.1.7　克莱姆法则

（1）如果非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1-1}$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，则方程组有唯一解 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$，$j=1,2,\cdots,n$.

其中 D_j 是把系数行列式 D 中的第 j 列元素换为常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所构成的行列式.

(2) 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{1-2}$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，则方程组有唯一零解.

推论 1 如果非齐次线性方程组 (1-1) 的系数行列式 $D=0$，那么它无解或有无穷多解.

推论 2 如果齐次线性方程组 (1-2) 的系数行列式 $D=0$，那么它有非零解.

注意：以上线性方程组是针对 n 个未知数 n 个方程组成的方程组而言，当方程的个数与未知数的个数不相等时，要按第四章的方法解线性方程组.

1.2 典型例题

1.2.1 填空题

【例 1】 7 阶行列式中项 $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$ 的符号是____________.

【解】 方法一 将以上的项，按行标排列为自然排列重新排列，排列后为 $a_{16}a_{27}a_{33}a_{44}a_{55}a_{61}a_{72}$，考虑列标排列 6,7,3,4,5,1,2 的逆序数 $\tau(6734512)=5+5+2+2+2+0=16$，排列 6,7,3,4,5,1,2 为偶排列，所以其符号为"+".

方法二 将以上的项，按列标排列为自然排列重新排列，排列后为 $a_{61}a_{72}a_{33}a_{44}a_{55}a_{16}a_{27}$，考虑行标排列 6,7,3,4,5,1,2 的逆序数 $\tau(6734512)=5+5+2+2+2+0=16$，排列 6,7,3,4,5,1,2 为偶排列，所以其符号为"+".

方法三 分别考虑行标排列 3,1,7,2,5,6,4 的逆序数 $\tau(3172564)=2+0+4+0+1+1=8$，以及列标排列 3,6,2,7,5,1,4 的逆序数 $\tau(3627514)=2+4+1+3+2+0=12$，二者逆序数之和为 $12+8=20$（偶数），从而其符号为"+".

【例 2】 $\tau(2,4,6,\cdots,2n,2n-1,\cdots,3,1)=$____________.

【解】 $\tau(2,4,6,\cdots,2n,2n-1,\cdots,3,1)=1+2+\cdots+n+(n-1)+\cdots+2+1=n^2$.

【例 3】 $D=\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}=$____________.

【解】 注意到行列式中第 1 列的三个数分别与 100，200，300 较接近，而第 3 列的三个数分别与 200，400，600 较接近，所以由行列式的性质知，将第二列的 -1 倍加到第 1 列上，将第二列的 -2 倍加到第 3 列上，第二列再提取公因数 100，则有

$$D=\begin{vmatrix}103 & 100 & 204\\ 199 & 200 & 395\\ 301 & 300 & 600\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}3 & 1 & 4\\ -1 & 2 & -5\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}$$

对于最后的行列式，可以将第 3 行加到第 2 行上，同时将第 3 行的 -3 倍加到第 1 行上，再按第 1 列展开，得 $D=100\begin{vmatrix}0 & -8 & 4\\ 0 & 5 & -5\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=100\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-8 & 4\\ 5 & -5\end{vmatrix}=100\cdot(40-20)=2000.$

注意：①用行列式性质计算行列式时，为减少重复书写，通常计算一步行列式可以多次利用行列式性质；②以后为简单起见，行列式的第 i 行（列）的 k 倍加到第 j 行（列）上，常记为 kr_i+r_j（kc_i+c_j）.

【例 4】 若 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 0 & 0 & x & 3\\ 0 & 0 & 4 & 5\end{vmatrix}=0$，则 $x=$____________.

【解】 方法一　用 $(-5)r_1+r_2$，然后两次都按第 1 列展开，得

$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 0 & 0 & x & 3\\ 0 & 0 & 4 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -4 & -8 & -12\\ 0 & 0 & x & 3\\ 0 & 0 & 4 & 5\end{vmatrix}=1\cdot(-4)\begin{vmatrix}x & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-4(5x-12)=0$，所以，$x=\dfrac{12}{5}$.

方法二　直接用“1.1.5 几种特殊行列式的结论”中（2），得到

$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 0 & 0 & x & 3\\ 0 & 0 & 4 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-4(5x-12)=0$ 得到答案，$x=\dfrac{12}{5}$.

【例 5】 $D=\begin{vmatrix}n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}=$____________.

【解】 方法一　直接按行列式展开公式［在此按第一行（列）展开］及对角行列式的结论得

$$D=n\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot(-1)^{n-1+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & \cdots & 0\\ \cdots & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & n-1\end{vmatrix}=(-1)^n n!.$$

方法二　注意到所有 $n!$ 项中，不等于零的项只有 $a_{11}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n2}$ 这一项，它为

$$(-1)^{\tau(1,3,4,\cdots n,2)}n!=(-1)^{n-2}n!=(-1)^n n!.$$

【例 6】 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中，x^3 的系数为________.

【解】 方法一 根据行列式的定义考察能组成 x^3 的项．由于行列式的 $n!$ 中每一项都是不同行、不同列的 n 个元素的乘积，在此组成 x^3 的项中必须每项都含有 x，由于第一、三行中各只含有一个带 x 的项，即 a_{11} 和 a_{33}，所以根据不同行、不同列的原则，带有 a_{11} 和 a_{33} 的项只能是 $a_{11}a_{22}a_{33}$，又因为这一项的符号为正，所以此项为 $2x\cdot(-x)\cdot x=-2x^3$，得 x^3 的系数为 -2.

方法二 要求 x^3 的系数，只需考察组成 x^3 的项即可．事实上，只需考察 $2x\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -x & x \\ 2 & x \end{vmatrix}=-2x^3-4x^2$，或 $x\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ -x & -x \end{vmatrix}=-2x^3+x^2$ 中 x^3 的系数即可．得 x^3 的系数为 -2.

【例 7】 设 a,b 为实数，则当 $a=$______，$b=$______ 时，行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$．

【解】 将行列式按第 3 列展开，得

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}=-(a^2+b^2)，所以应填 a=0,b=0.$$

【例 8】 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}=$________.

【解】 因为所有 $4!=24$ 项中，只有 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ 这一项不为零，此时列标的排列为 4，1，2，3，且为奇排列，符号为负，所以原式$=(-1)\times2\times3\times4=-24$.

【例 9】 已知 $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$________.

【解】 考察所求行列式，可见先进行 $3r_3+r_1$，即得

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

为了利用已知行列式，再将 a_{22} 位置元素化为零，为此进行 $(-2)r_3+r_2$，得到

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，这正是已知行列式的转置行列式．再由“1.1.3 行列式的性质”中的性质 1 得

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

【例 10】 已知 a 为实数，$D=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=0$，$a=$________.

【解】 $D=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&a&0\\0&1&a\\a&0&1\end{vmatrix}=1-a\cdot a\cdot$ $(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}a&0\\1&a\end{vmatrix}=1-a^4=0$，所以 $a=\pm1$.

1.2.2 选择题

【例 1】 与 3 阶行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ 等值的行列式为______________.

(A) $\begin{vmatrix}a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}\end{vmatrix}$　　(B) $\begin{vmatrix}-a_{11}&a_{12}&-a_{13}\\-a_{21}&a_{22}&-a_{23}\\-a_{31}&a_{32}&-a_{33}\end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix}a_{11}+a_{12}&a_{12}+a_{13}&a_{13}+a_{11}\\a_{21}+a_{22}&a_{22}+a_{23}&a_{23}+a_{21}\\a_{31}+a_{32}&a_{32}+a_{33}&a_{33}+a_{31}\end{vmatrix}$　　(D) $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}+a_{13}&a_{11}+a_{12}+a_{13}\\a_{21}&a_{22}+a_{23}&a_{21}+a_{22}+a_{23}\\a_{31}&a_{32}+a_{33}&a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{vmatrix}$

【解】 由行列式性质，得知，(B) 的第 1、第 3 列均有公因数 -1，提取后为 $(-1)^2$ $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$，所以应选 (B)．而 (A) 与原行列式相差一个负号．对于 (C)、(D) 按行列式性质展开后可以发现与原行列式不相等.

【例 2】 设 a,b 为实数，若 $\begin{vmatrix}-1&b&0\\-b&1&0\\a&0&-1\end{vmatrix}\neq0$，则________.

(A) $b\neq0$　　(B) $a\neq0$　　(C) $b\neq\pm1$　　(D) $a\neq\pm1$

【解】 方法一　按第三列展开，得 $\begin{vmatrix}-1&b&0\\-b&1&0\\-1&0&-1\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{3+3}$ $\begin{vmatrix}-1&b\\-b&1\end{vmatrix}=-(-1+b^2)\neq0$.

由此得，应选 (C).

方法二　按本教材中的对角线法，也可以得到原行列式等于 $1-b^2\neq0$，也可得知应选 (C).

【例 3】 已知 3 阶行列式 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=3$，则 $\begin{vmatrix}a_{11}&2a_{31}-5a_{21}&3a_{21}\\a_{12}&2a_{32}-5a_{22}&3a_{22}\\a_{13}&2a_{33}-5a_{23}&3a_{23}\end{vmatrix}=$________.

(A) 18　　(B) -18　　(C) -9　　(D) 27

【解】 先由"1.1.3 行列式的性质"中的性质 5，将 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31}-5a_{21} & 3a_{21} \\ a_{12} & 2a_{32}-5a_{22} & 3a_{22} \\ a_{13} & 2a_{33}-5a_{23} & 3a_{23} \end{vmatrix}$ 分解成两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31}-5a_{21} & 3a_{21} \\ a_{12} & 2a_{32}-5a_{22} & 3a_{22} \\ a_{13} & 2a_{33}-5a_{23} & 3a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31} & 3a_{21} \\ a_{12} & 2a_{32} & 3a_{22} \\ a_{13} & 2a_{33} & 3a_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & -5a_{21} & 3a_{21} \\ a_{12} & -5a_{22} & 3a_{22} \\ a_{13} & -5a_{23} & 3a_{23} \end{vmatrix},$$

在第 2 个行列式中提取公因数 -5 后发现最后两列成比例，所以等于零．第 1 个行列式分别提取公因数 2 与 3 后，得

$$原式=6\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{21} \\ a_{12} & a_{32} & a_{22} \\ a_{13} & a_{33} & a_{23} \end{vmatrix}=6\cdot(-3)=-18.\ 应选\ (B).$$

【例 4】 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=$ ________.

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　(B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　(D) $(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$

【解】 直接将行列式按第 1 行展开

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}-b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}=a_1a_4(a_2a_3-b_2b_3)-b_1b_4(a_2a_3-b_2b_3)$$，所以应选 (D).

【例 5】 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=0$ 的根的个数为 ________.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

【解】 在此求方程 $f(x)=0$ 的根的个数，实际是求多项式的次数．先进行$(-1)c_1+c_2$，$(-1)c_1+c_3$，$(-1)c_1+c_4$．可得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix},$$

再进行 c_2+c_4，

得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}.$$

在此直接用“1.1.5 几种特殊行列式的结论”中（2）可知，

$f(x)$实际上是一个二次多项式，故有 2 个根.

如果再继续运算，可对上式进行$(-1)r_2+r_1$，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix},$$

所以，$f(x)=-x\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=0$，也可以得到 $f(x)$是一个二次多项式，故有 2 个根，应选（B）.

【例 6】 方程$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3-x^2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 5-x^2 \end{vmatrix}=0$ 的根为________.

（A）$\pm1,\pm\sqrt{3}$　　（B）$\pm\sqrt{3}$，$\pm\sqrt{5}$　　（C）$\pm\sqrt{5}$，$\pm\sqrt{2}$　　（D）$\pm1,\pm\sqrt{5}$

【解】 注意到，方程为 4 次方程，故有 4 个根，又由行列式的性质知，当 $3-x^2=2$，及 $5-x^2=2$ 时，行列式中有两行相同，此时行列式等于零．所以得 $x^2=1$ 和 $x^2=3$，从而 $x=\pm1,\pm\sqrt{3}$，应选（A）.

注意：此题也可以利用行列式的性质展开后，求出结果.

【例 7】 已知线性方程组$\begin{cases} \lambda x-y=a \\ -x+\lambda y=b \end{cases}$有唯一解，则 λ 满足________.

（A）为任意实数　　（B）等于±1　　（C）不等于±1　　（D）不等于零

【解】 由克莱姆法则知，此时系数行列式必有$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}\neq0$，否则无解或有无穷多解．所以 $\lambda\neq\pm1$. 应选（C）.

【例 8】 设线性方程组$\begin{cases} bx-ay=-2ad \\ -2cy+3bz=bc \\ cx+az=0 \end{cases}$，则________.

（A）当 a,b,c 取任意非零实数时，方程组均有解　（B）当 $a=0$ 时，方程组无解

（C）当 $b=0$ 时，方程组无解　　（D）当 $c=0$ 时，方程组无解

【解】 方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}=-5abc,$$

由克莱姆法则知，当 a,b,c 同时取任意非零实数时，方程组有唯一解，当然有解．而当 a,b,c 中有一个为零时，它或无解或有无穷多解，不能确定是否无解．事实上，由第 4 章的结论可知，当 a,b,c 中有一个为零时，方程组有无穷多解．所以应选（A）.

【例 9】 当 $\lambda=$________时，齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+\lambda x_3=0 \\ 2x_1-\ x_4=0 \\ \lambda x_1+\ x_2=0 \\ x_3+2x_4=0 \end{cases}$有非零解.

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $-\frac{1}{4}$

【解】 方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1-4\lambda,$$

由克莱姆法则知，当系数行列式为零时，齐次线性方程组有非零解，所以 $\lambda=\frac{1}{4}$，应选（C）.

【例 10】 对于非齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$，下列结论不正确的是________.

(A) 若方程组有解，则系数行列式 $D\neq0$

(B) 若方程组无解，则系数行列式 $D=0$

(C) 方程组有解时，或者有唯一解，或者有无穷多解

(D) 系数行列式 $D\neq0$ 是方程组有唯一解的充分必要条件

【解】 系数行列式 $D=0$ 时，方程组也可以有解．例如：方程组$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ 2x_1+2x_2=2 \end{cases}$，$x_1=3$，$x_2=-2$ 是方程组的一组解，而系数行列式 $D=0$. 只是方程组有唯一解时，系数行列式 $D\neq0$（这是充要条件）．所以（A）不正确，其余都是正确的．应选（A).

1.2.3 计算题

3 阶以上的高阶行列式一般都不能直接计算，所以计算高阶行列式，特别是 n 阶行列式是线性代数中的重点和难点.

下面结合例子介绍几种计算高阶行列式的常见方法.

(1) 利用行列式的性质将原行列式化为上三角形或下三角形行列式

【例 1】 计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$的值.

分析：用将行列式化为三角形行列式的方法时，一般先把 a_{11} 变换为 1. 常用的方法是：当 $a_{11}\neq0$ 时，用$\frac{1}{a_{11}}$乘以第一行（列）（注意：尽量避免元素变为分数，否则将给后面的计算增加困难）；当 $a_{11}=0$ 时，可以通过交换行或列的方法，使得 $a_{11}\neq0$. 最好的方法是通过

交换行或列的方法直接使得 $a_{11}=1$. 然后把第一行的 (-1) $a_{i1}(i=2,3,\cdots,n)$倍分别加到第 $2,3,\cdots,n$ 行上，这样就把第一列 a_{11} 以下的元素全化为零，再逐次用类似的方法把主对角元素 $a_{22},a_{33},\cdots,a_{n-1,n-1}$ 以下（或以上）的元素全部化为零，则行列式就化为上（或下）三角形行列式了.

【解】 先进行 $r_1\leftrightarrow r_2$，得

$$D=-\begin{vmatrix}1&0&1&2&3\\0&1&2&3&4\\2&1&0&1&2\\3&2&1&0&1\\4&3&2&1&0\end{vmatrix},$$

将 $r_1(-2)+r_3$，$r_1(-3)+r_4$，$r_1(-4)+r_5$得

$$D=-\begin{vmatrix}1&0&1&2&3\\0&1&2&3&4\\0&1&-2&-3&-4\\0&2&-2&-6&-8\\0&3&-3&-7&-12\end{vmatrix},$$

由于 $a_{22}=1$，再对 a_{22} 以下元素化为零. 即进行 $r_2(-1)+r_3$，$r_2(-2)+r_4$，$r_2(-3)+r_5$，得

$$D=-\begin{vmatrix}1&0&1&2&3\\0&1&2&3&4\\0&0&-4&-6&-8\\0&0&-6&-12&-16\\0&0&-9&-16&-24\end{vmatrix},$$

第三、四行提取-2；第五行提取-1，得

$$D=4\begin{vmatrix}1&0&1&2&3\\0&1&2&3&4\\0&0&2&3&4\\0&0&3&6&8\\0&0&9&16&24\end{vmatrix},$$

因为 $a_{33}=2$，为避免元素变为分数，将$(-1)r_4+r_3$，并提取-1，得

$$D=-4\begin{vmatrix}1&0&1&2&3\\0&1&2&3&4\\0&0&1&3&4\\0&0&3&6&8\\0&0&9&16&24\end{vmatrix},$$

再将$(-3)r_3+r_4$，$(-9)r_3+r_5$，得

$$D=-4\begin{vmatrix}1&0&1&2&3\\0&1&2&3&4\\0&0&1&3&4\\0&0&0&-3&-4\\0&0&0&-11&-12\end{vmatrix},$$

第四、五行提取-1，得

$$D=-4\begin{vmatrix}1&0&1&2&3\\0&1&2&3&4\\0&0&1&3&4\\0&0&0&3&4\\0&0&0&11&12\end{vmatrix},$$

交换第四列与第五列，最后$(-3)r_4+r_5$，得到

$$D=4\begin{vmatrix}1&0&1&3&2\\0&1&2&4&3\\0&0&1&4&3\\0&0&0&4&3\\0&0&0&12&11\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&0&1&3&2\\0&1&2&4&3\\0&0&1&4&3\\0&0&0&4&3\\0&0&0&0&2\end{vmatrix}=32.$$

注意：在以上的运算中，若结合行列式的展开，计算会更简单些．见【例 4】及【例 5】.

【例 2】 计算 $D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_0&b_1&b_2&\cdots&b_n\\c_1&a_1&0&\cdots&0\\c_2&0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_n&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$，$a_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$.

【解】 从第二列开始，将行列式 D_{n+1} 的第 i 列（$i=2,3,\cdots,n+1$）的 $\left(-\frac{c_{i-1}}{a_{i-1}}\right)$ 倍，分别加到第一列上，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}b_i&b_1&b_2&\cdots&b_n\\0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}b_i\right).$$

【例 3】 计算 $D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\cdots&1\\1&1+a_2&1&\cdots&1\\1&1&1+a_3&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}$，其中 $a_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$.

【解】 由于行列式中有很多元素等于 1，所以先将第一行的（-1）倍加到各行上去，得到

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\cdots&1\\-a_1&a_2&0&\cdots&0\\-a_1&0&a_3&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$（可见这已经是与上例形状相同的行列式了），

从第二列开始，将行列式 D_n 的第 i 列（$i=2,3,\cdots,n$）的 $\left(\frac{a_1}{a_i}\right)$ 倍，分别加到第一列